RENATO ZANOVELLO

**Su un integrale definito del prodotto di funzioni di Bessel e di Struve**

*Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova*, tome 64 (1981), p. 187-192

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1981__64__187_0>

Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, Vol. 64 (1981)

# Su un integrale definito del prodotto di funzioni di Bessel e di Struve.

Renato Zanovello (*)

Sunto - In questo lavoro viene studiato l'integrale (1), per $a \gtreqless b$.

Summary - A study of the integral (1) for $a \gtreqless b$ is given.

In un recente lavoro [1], Glasser afferma che fra gli integrali noti di prodotti di funzioni di Bessel e di funzioni ad esse relative, pochissimi riguardano le funzioni di Bessel di seconda specie $Y_\nu(x)$, anche se essi, oltre ad avere un interesse intrinseco, si presentano in problemi concreti, come ad esempio quello della propagazione delle onde lungo un cavo coassiale. Ciò premesso, mi occupo in questa nota dello studio del seguente integrale, che non mi risulta presente nella letteratura:

$$(1) \qquad \int_0^\infty \boldsymbol{H}_\mu(ax)\, Y_\nu(bx)\, dx\,, \qquad (a>0,\ b>0,\ |\mu|+|\nu|<1)\,,$$

ove $\boldsymbol{H}_\sigma(x)$ indica, al solito, la funzione di Struve d'ordine $\sigma$.

Suppongo inizialmente $a \neq b$ e distinguo due casi, a seconda che sia $\mu \neq \frac{1}{2}$ oppure $\mu = \frac{1}{2}$.

(*) Indirizzo dell'A.: Istituto di Matematica, Informatica e Sistemistica, Università, Viale Ungheria 43, Udine.

Lavoro eseguito nell'ambito dei Gruppi di Ricerca Matematica del C.N.R.

**§ 1.** Per $a \neq b$, $\mu \neq \frac{1}{2}$, posso scrivere ([2], p. 227 (17)):

$$\int_0^\infty \boldsymbol{H}_\mu(ax)\, Y_\nu(bx)\, dx = \tag{2}$$

$$= \int_0^\infty \left\{ Y_\mu(ax) + \frac{\cos(\mu\pi)}{\pi^2} G^{3,1}_{1,3}\left( \frac{a^2}{4} x^2 \middle| \begin{matrix} (\mu+1)/2 \\ (\mu+1)/2, \ \mu/2, \ -\mu/2 \end{matrix} \right) \right\} Y_\nu(bx)\, dx\,,$$

ove $G^{3,1}_{1,3}$ indica una particolare funzione di Meijer $G^{m,n}_{p,q}(z)$. Considero ora l'integrale:

$$\int_0^\infty Y_\mu(ax)\, Y_\nu(bx)\, dx\,, \tag{3}$$

che, essendo $|\mu| + |\nu| < 1$, $a \neq b$, è uguale a ([3], p. 102 (10.40)):

$$\int_0^\infty J_\mu(ax)\, J_\nu(bx)\, dx + \frac{4}{\pi^2} \sin\left( \frac{\mu+\nu}{2} \pi \right) \int_0^\infty K_\mu(ax)\, K_\nu(bx)\, dx\,, \tag{4}$$

ove $J_\sigma(x)$ è la funzione di Bessel di prima specie e $K_\sigma(x)$ indica la funzione di Bessel modificata di terza specie, detta anche funzione di Macdonald.

Per il primo integrale in (4) vale la ([3], p. 101 (10.36)):

$$\int_0^\infty J_\mu(ax)\, J_\nu(bx)\, dx = \tag{5}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{a^\mu b^{-\mu-1}}{\Gamma(1+\mu)} \cdot \dfrac{\Gamma((\nu+\mu+1)/2)}{\Gamma((\nu-\mu+1)/2)} \cdot {}_2F_1\left( \dfrac{\nu+\mu+1}{2}, \dfrac{\mu+1-\nu}{2}; \mu+1; \dfrac{a^2}{b^2} \right), \\ \hfill (0 < a < b) \\ \dfrac{b^\nu a^{-\nu-1}}{\Gamma(1+\nu)} \cdot \dfrac{\Gamma((\nu+\mu+1)/2)}{\Gamma((1+\mu-\nu)/2)} \cdot {}_2F_1\left( \dfrac{\nu+\mu+1}{2}, \dfrac{\nu-\mu+1}{2}; \nu+1; \dfrac{b^2}{a^2} \right), \\ \hfill (0 < b < a) \end{cases}$$

con ovvio significato dei simboli, mentre per il secondo integrale di (4), utilizzo per $0 < b < a$ la formula ([4], p. 145 (49)):

$$(6)\qquad \int_0^\infty K_\mu(ax)K_\nu(bx)\,dx = \frac{b^\nu}{4}a^{-\nu-1}\Gamma\left(\frac{\nu+\mu+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu-\mu+1}{2}\right)\cdot$$

$$\cdot\,\Gamma\left(\frac{\mu-\nu+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-\mu-\nu}{2}\right){}_2F_1\left(\frac{\nu+\mu+1}{2},\frac{\nu-\mu+1}{2};1;1-\frac{b^2}{a^2}\right).$$

Per $0 < a < b$, visto l'argomento della ${}_2F_1$ in (6), non posso in generale applicare direttamente la (6) stessa; basta allora scambiare $a$ con $b$ e $\mu$ con $\nu$ rispettivamente, ottenendo quindi:

$$(7)\qquad \int_0^\infty K_\mu(ax)K_\nu(bx)\,dx = \frac{a^\mu}{4}b^{-\mu-1}\Gamma\left(\frac{\mu+\nu+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\mu-\nu+1}{2}\right)\cdot$$

$$\cdot\,\Gamma\left(\frac{\nu-\mu+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-\mu-\nu}{2}\right){}_2F_1\left(\frac{\nu+\mu+1}{2},\frac{\mu-\nu+1}{2};1;1-\frac{a^2}{b^2}\right).$$

Infine nelle mie ipotesi è:

$$(8)\qquad \int_0^\infty Y_\nu(bx)\,G^{3,1}_{1,3}\left(\frac{a^2}{4}x^2\,\middle|\,\begin{matrix}(\mu+1)/2\\(\mu+1)/2,\ \mu/2,\ -\mu/2\end{matrix}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{b}\int_0^\infty t^{-\frac12}\,Y_\nu(2t^{\frac12})\,G^{3,1}_{1,3}\left(\frac{a^2}{b^2}t\,\middle|\,\begin{matrix}(\mu+1)/2\\(\mu+1)/2,\ \mu/2,\ -\mu/2\end{matrix}\right)dt =$$

$$= \frac{1}{b}\,G^{3,3}_{4,4}\left(\frac{a^2}{b^2}\,\middle|\,\begin{matrix}(1-\nu)/2,\ (1+\nu)/2,\ (\mu+1)/2,\ 1+\nu/2\\(\mu+1)/2,\ \mu/2,\ -\mu/2,\ 1+\nu/2\ ,\end{matrix}\right),$$

avendo tenuto conto di ([4], p. 420 (10)).

Ciò premesso, da (2) ricavo in definitiva:

$$(9)\qquad \int_0^\infty \boldsymbol{H}_\mu(ax)\,Y_\nu(bx)\,dx = \frac{a^\mu b^{-\mu-1}}{\Gamma(\mu+1)}\cdot\frac{\Gamma((\nu+\mu+1)/2)}{\Gamma((\nu-\mu+1)/2)}\cdot$$

$$\cdot\,{}_2F_1\left(\frac{\nu+\mu+1}{2},\frac{\mu+1-\nu}{2};\mu+1;\frac{a^2}{b^2}\right)+\frac{\sin[(\nu+\mu)(\pi/2)]}{\pi^2}\cdot$$

$$\cdot a^{\mu} b^{-\mu-1} \Gamma\left(\frac{\mu+\nu+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\mu-\nu+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu-\mu+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1-\mu-\nu}{2}\right) \cdot$$

$$\cdot {}_2F_1\left(\frac{\nu+\mu+1}{2}, \frac{\mu-\nu+1}{2}; 1; 1-\frac{a^2}{b^2}\right) +$$

$$+ \frac{\cos(\mu\pi)}{b\pi^2} G^{3,3}_{4,4}\left(\frac{a^2}{b^2}\middle| \begin{matrix} (1-\nu)/2,\ (1+\nu)/2,\ (\mu+1)/2,\ 1+\nu/2 \\ (\mu+1)/2,\ \mu/2,\ -\mu/2,\ 1+\nu/2 \end{matrix}\right),$$

$$(0 < a < b,\ |\mu| + |\nu| < 1,\ \mu \neq \tfrac{1}{2})$$

e

$$(10) \qquad \int_0^\infty \boldsymbol{H}_\mu(ax)\, Y_\nu(bx)\, dx = \frac{b^\nu a^{-\nu-1}}{\Gamma(1+\nu)} \cdot \frac{\Gamma((\nu+\mu+1)/2)}{\Gamma((1+\mu-\nu)/2)} \cdot$$

$$\cdot {}_2F_1\left(\frac{\nu+\mu+1}{2}, \frac{\nu-\mu+1}{2}; \nu+1; \frac{b^2}{a^2}\right) + \frac{\sin[(\nu+\mu)(\pi/2)]}{\pi^2} \cdot$$

$$\cdot b^\nu a^{-\nu-1} \Gamma\left(\frac{\nu+\mu+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu-\mu+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\mu-\nu+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1-\mu-\nu}{2}\right) \cdot$$

$$\cdot {}_2F_1\left(\frac{\nu+\mu+1}{2}, \frac{\nu-\mu+1}{2}; 1; 1-\frac{b^2}{a^2}\right) +$$

$$+ \frac{\cos(\mu\pi)}{b\pi^2} G^{3,3}_{4,4}\left(\frac{a^2}{b^2}\middle| \begin{matrix} (1-\nu)/2,\ (1+\nu)/2,\ (\mu+1)/2,\ 1+\nu/2 \\ (\mu+1)/2,\ \mu/2,\ -\mu/2,\ 1+\nu/2 \end{matrix}\right),$$

$$(0 < b < a,\ |\mu| + |\nu| < 1,\ \mu \neq \tfrac{1}{2}) .$$

Per il calcolo numerico di $G^{3,3}_{4,4}$ in (9) e (10), posso esprimere la stessa mediante funzioni ipergeometriche generalizzate ${}_pF_q$ magari utilizzando, a seconda dei valori dei parametri, le formule del cap. V di [2]; dopo di che potrò valutare le ${}_pF_q$ tramite sviluppi in serie o approssimazioni razionali (v. ad es. [5]).

**§ 2.** Fermo restando $a \neq b$, $|\mu| + |\nu| < 1$, esamino ora il caso $\mu = \frac{1}{2}$, per il quale non posso applicare ([2], p. 227 (17)), non essendo soddisfatte per le citate funzioni di Meijer tutte le ipotesi previste in ([2], p. 143) riguardo ai parametri.

In virtù di ([6], p. 39 (64)), certamente posso scrivere:

$$(10bis) \qquad \boldsymbol{H}_{\frac{1}{2}}(ax) = \left(\frac{2}{\pi a}\right)^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}} + Y_{\frac{1}{2}}(ax);$$

da ciò, l'integrale (1) diventa nelle mie ipotesi:

$$(11)\qquad \int_0^\infty \boldsymbol{H}_{\frac{1}{2}}(ax)\, Y_\nu(bx)\, dx = \left(\frac{2}{\pi a}\right)^{\frac{1}{2}} \int_0^\infty x^{-\frac{1}{2}}\, Y_\nu(bx)\, dx + \int_0^\infty Y_{\frac{1}{2}}(ax)\, Y_\nu(bx)\, dx\,.$$

Tenendo conto dell'uguaglianza tra (3) e (4) e quindi di (5), (6), (7), sempre per $\mu = \frac{1}{2}$, nonchè del fatto che è:

$$(12)\qquad \int_0^\infty x^{-\frac{1}{2}}\, Y_\nu(bx)\, dx = \frac{\Gamma(\nu/2+\frac{1}{4})\cot\big((\pi/2)\nu + 3\pi/4\big)}{2^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}}\Gamma(\nu/2+\frac{3}{4})}\,,$$

come si vede particolarizzando ad es. ([7], p. 196 (3.3)), la (11) diventa:

$$(13)\qquad \int_0^\infty \boldsymbol{H}_{\frac{1}{2}}(ax)\, Y_\nu(bx)\, dx = \frac{\Gamma(\nu/2+\frac{1}{4})\cot\big((\pi/2)\nu + 3\pi/4\big)}{\pi^{\frac{1}{2}} a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}}\Gamma(\nu/2+\frac{3}{4})} +$$

$$+ \frac{2a^{\frac{1}{2}}}{\pi^{\frac{1}{2}} b^{\frac{3}{2}}}\frac{\Gamma(\nu/2+\frac{3}{4})}{\Gamma(\nu/2+\frac{1}{4})}\, {}_2F_1\left(\frac{\nu}{2}+\frac{3}{4}, \frac{3}{4}-\frac{\nu}{2}; \frac{3}{2}; \frac{a^2}{b^2}\right) + \frac{a^{\frac{1}{2}}\cos(\pi/4 - \nu\pi/2)}{\pi^2 b^{\frac{3}{2}}}\cdot$$

$$\cdot\, \Gamma\left(\frac{\nu}{2}+\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}-\frac{\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu}{2}+\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}-\frac{\nu}{2}\right) {}_2F_1\left(\frac{\nu}{2}+\frac{3}{4}, \frac{3}{4}-\frac{\nu}{2}; 1; 1-\frac{a^2}{b^2}\right),$$

$$(0 < a < b,\ |\nu| < \tfrac{1}{2})$$

e

$$(14)\qquad \int_0^\infty \boldsymbol{H}_{\frac{1}{2}}(ax)\, Y_\nu(bx)\, dx = \frac{\Gamma(\nu/2+\frac{1}{4})\cot\big((\pi/2)\nu + 3\pi/4\big)}{\pi^{\frac{1}{2}} a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}}\Gamma(\nu/2+\frac{3}{4})} +$$

$$+ \frac{b^\nu a^{-\nu-1}}{\Gamma(\nu+1)}\frac{\Gamma(\nu/2+\frac{3}{4})}{\Gamma(\frac{3}{4}-\nu/2)}\, {}_2F_1\left(\frac{\nu}{2}+\frac{3}{4}, \frac{\nu}{2}+\frac{1}{4}; \nu+1; \frac{b^2}{a^2}\right) +$$

$$+ \frac{b^\nu a^{-\nu-1}\cos(\pi/4 - \nu\pi/2)}{\pi^2}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}+\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{\nu}{2}+\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}-\frac{\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}-\frac{\nu}{2}\right)\cdot$$

$$\cdot\, {}_2F_1\left(\frac{\nu}{2}+\frac{3}{4}, \frac{\nu}{2}+\frac{1}{4}; 1; 1-\frac{b^2}{a^2}\right), \qquad (0 < b < a,\ |\nu| < \tfrac{1}{2})\,.$$

**§ 3.** Esamino ora il caso $a = b$, $\mu \neq \frac{1}{2}$, ferme restando le altre ipotesi per (1). Per $a = b$, è noto che vale la ([3], p. 123 (11.46)):

$$\int_0^\infty K_\mu(ax) K_\nu(ax)\, dx = \tag{15}$$

$$= \frac{1}{4a} \Gamma\left(\frac{\nu+\mu+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu-\mu+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\mu-\nu+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1-\mu-\nu}{2}\right).$$

Inoltre posso affermare che, nelle mie ipotesi, l'integrale in (5) è divergente [8]. Da ciò, tenuto conto anche delle (2), (8), sempre valide, posso quindi concludere che l'integrale (1) è pure divergente.

Per $a = b$, $\mu = \frac{1}{2}$, l'integrale in (5) è divergente [8], il che comporta, data anche la (15), che pure l'integrale (3) diverge nel mio caso. Da ciò, tenuto conto anche delle (10*bis*), (12), segue che l'integrale (1) diverge anche per $\mu = \frac{1}{2}$. Ed il lavoro è così completato.

## BIBLIOGRAFIA


[1] M. L. Glasser, *Some Definite Integrals of the Product of Two Bessel Functions of the Second Kind*: (*Order Zero*), Math. of Comp., **28**, 126 (1974), pp. 613-615.

[2] Y. L. Luke, *The Special Functions and Their Approximations*, Vol. I, Academic Press (1969).

[3] F. Oberhettinger, *Tables of Mellin Transforms*, Springer-Verlag (1974).

[4] A. Erdelyi - W. Magnus - F. Oberhettinger - F. G. Tricomi, *Tables of Integral Transforms*, Vol. II, MacGraw-Hill (1954).

[5] Y. L. Luke, *Algorithms for the Computation of Mathematical Functions*, Academic Press (1977).

[6] A. Erdelyi - W. Magnus - F. Oberhettinger - F. G. Tricomi, *Higher Transcendental Functions*, Vol. II, MacGraw-Hill (1953).

[7] F. Oberhettinger, *Tables of Bessel Transforms*, Springer-Verlag (1972).

[8] E. Gubler, *Ueber ein discontinuirliches Integral*, Math. Ann., **48** (1897), pp. 37-48.


Manoscritto pervenuto in redazione il 2 giugno 1980.