RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

RAFFAELE BALLI

Sul comportamento asintotico della soluzione di un problema di radiazione

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 63 (1980), p. 69-82

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1980__63__69_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 63 (1980)

Sul comportamento asintotico della soluzione di un problema di radiazione.

RAFFAELE BALLI (*)

SUMMARY - We study the asymptotic representation of the solution for a radiation problem connected with the scattering n-bodies problem.

1. Si considera il problema

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\Delta\varphi + k^2\varphi = f(x)\\
&\frac{\partial\varphi(x)}{\partial|x|} - ik\varphi(x) = O(|x|^{-n/2-1/2}) \qquad |x| \to +\infty\\
&\varphi(x) = O(|x|^{-n/2+1/2}) \qquad |x| \to +\infty
\end{aligned}
\right.
\tag{1.1}
$$

in cui Δ è l'operatore di Laplace in R^n ($n \geqslant 3$), k una costante reale positiva, $f(x)$ una assegnata funzione di R^n con le seguenti proprietà: $f(x) \in L^{n-1}(R^n)$, $f(x) = O(|x|^{-n-2})$ per $|x| \to +\infty$, $|f(x)| \leqslant \Phi(|x|)$ con $\Phi(|x|) \in L^1$.

Sotto queste ipotesi si determina la soluzione $\varphi(x)$ nello spazio $W^{2,n-1}(R^n)$ per $n \geqslant 4$ (nel caso $n = 3$ $\varphi(x) \in W^{2,2}_{\text{loc}}(R^n)$), detta soluzione, come è noto, è unica [1].

A problemi del tipo (1.1) ci si riconduce, tra l'altro, in Meccanica quantistica nello studio dello scattering da potenziale (locale e non locale) nel caso degli m-corpi, qualora si enunci detto problema nella sua forma integrale [2], [3], [4], [5].

(*) Indirizzo dell'A.: Dipartimento di Matematica, Università di Perugia, 06100 Perugia.

Utilizzando la formula di Green è agevole ricavare la soluzione formale del problema (1.1)

$$\varphi(x) = S\int \frac{H^1_{n/2-1}(k|x-y|)}{|x-y|^{n/2-1}} f(y)\,dy \tag{1.2}$$

in cui $S = -i2^{-(n/2+1)}k^{n/2-1}\pi^{1-n/2}$, $H^1_\nu(z)$ è la funzione di Hankel e l'integrale è esteso ad R^n.

Si prova che la (1.2) è soluzione effettiva del problema e si assegna per questa e per la sua derivata radiale il comportamento asintotico troncato al primo termine. Si determina infine per la $\varphi(x)$ e per la sua derivata radiale lo sviluppo asintotico completo sotto opportune ipotesi su $f(x)$.

2. Al fine di dimostrare che $\varphi(x)$ definita da (1.2) è l'effettiva soluzione del problema (1.1) conviene utilizzare la seguente decomposizione della $\varphi(x)$ stessa:

$$\varphi(x) = s[\mu u(x) + v(x)] \tag{2.1}$$

con

$$u(x) = \int \frac{f(y)}{|x-y|^{n-2}}\,dy\,, \qquad v(x) = \int \left[\frac{H^1_{n/2-1}(k|x-y|)}{|x-y|^{n/2-1}} - \frac{\mu}{|x-y|^{n-2}}\right] f(y)\,dy\,,$$

$$\mu = -i\pi^{-1}(2/k)^{n/2-1}\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right),$$

e stabilire separatamente alcune proprietà di $u(x)$ e $v(x)$.

Lemma 1. Se $f(x) \in L^1 \cap L^{n-1}$, $u(x)$ verifica le seguenti proprietà:

i) $$\left(\int\limits_{|x|<r} |u(x)|^{n-1} dx\right)^{1/(n-1)} \leqslant$$
$$\leqslant B^{(n^2-3n+4)/n(n-1)} \left(\frac{r^n}{n}\right)^{2/n(n-1)} \frac{n}{2}\left(\frac{1}{n-2}\right)^{(n-2)/n} \|f\|^{(n-2)/n}_{L^{n-1}} \|f\|^{2/n}_{L^1}$$

in cui si è indicata con B l'area della sfera unitaria in R^n.

ii) $u(x) \in W^{2,n-1}_{\text{loc}}(R^n)$.

iii) $$\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j} = -\frac{B}{n}\delta^i_j(n-2)f(x) - \int f(y)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\left(\frac{1}{|x-y|^{n-2}}\right)dy$$

quasi ovunque in R^n; l'integrale a secondo membro è il valore principale secondo Calderon-Zygmund [6] dell'integrale singolare di convoluzione

$$f * \left(\frac{\partial^2}{\partial x_i\, \partial x_j}\right) \cdot |x-y|^{2-n},$$

cioè il limite in media di ordine $n-1$ per $\lambda \to 0$ di

$$\int\limits_{|x-y|>\lambda} f(y) \frac{\partial^2}{\partial x_i\, \partial x_j} \frac{1}{|x-y|^{n-2}}\, dy .$$

iv) $\Delta u(x) = -B(n-2) f(x)$.

Dim. Operando in analogia a [4] si ha:

$$|u(x)| = \left| \int\limits_{|x-y|<\lambda} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-2}}\, dy + \int\limits_{|x-y|>\lambda} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-2}}\, dy \right| \leqslant$$

$$\leqslant |(N_{n-2,\lambda} * f)(x)| + \frac{1}{\lambda^{n-2}} \|f\|_{L^1}$$

con

$$N_{n-2,\lambda}(x) = |x|^{2-n} \quad \text{se } |x| \leqslant \lambda, \qquad N_{n-2,\lambda}(x) = 0 \quad \text{se } |x| > \lambda .$$

Tenendo conto della diseguaglianza di Young [7] sulla convoluzione

$$\|N_{n-2,\lambda} * f\|_{L^{n-1}} \leqslant \|N_{n-2,\lambda}\|_{L^1} \|f\|_{L^{n-1}} = B \frac{\lambda^2}{2} \|f\|_{L^{n-1}}$$

si ha:

$$\left(\int\limits_{|x|<r} |u(x)|^{n-1}\, dx \right)^{1/(n-1)} \leqslant B \frac{\lambda^2}{2} \|f\|_{L^{n-1}} + \frac{1}{\lambda^{n-2}} \left(\frac{Br^n}{n}\right)^{1/(n-1)} \|f\|_{L^1}$$

da cui segue la proprietà i) minimizzando in λ.

Sia $\{f_n\} \in C_0^\infty(R^n)$ una successione tale che

$$\|f-f_n\|_{L^1} \to 0, \qquad \|f-f_n\|_{L^{n-1}} \to 0 \qquad n \to +\infty$$

si definisce la successione degli $u_n \in C^\infty(R^n)$

$$u_n(x) = \int \frac{f_n(y)}{|x-y|^{n-2}} dy = \int \frac{1}{|y|^{n-2}} f_n(x-y)\, dy$$

da cui

$$\frac{\partial u_n(x)}{\partial x_i} = \int \frac{1}{|y|^{n-2}} \frac{\partial f_n(x-y)}{\partial x_i} dy = \int \frac{1}{|x-y|^{n-2}} \frac{\partial f_n(y)}{\partial y_i} dy$$

mentre con opportune integrazioni per parti si ha:

$$\frac{\partial^2 u_n(x)}{\partial x_i \partial x_j} = \int \frac{\partial f_n(y)}{\partial y_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{|x-y|^{n-2}} dy = \lim_{\lambda \to 0} \int_{|x-y|>\lambda} \frac{\partial f_n(y)}{\partial y_i} \cdot$$

$$\cdot \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{|x-y|^{n-2}} dy = -\delta^i_j B \frac{n-2}{n} f_n(x) + \int f_n(y) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \frac{1}{|x-y|^{n-2}} dy$$

Dalla diseguaglianza i) si riconosce che $u(x)$ è il limite locale in media di ordine $n-1$ della successione $\{u_n\} \subset C^\infty(R^n)$. Posto inoltre:

$$u_{ij}(x) = -\delta^i_j \frac{n-2}{n} Bf(x) + \int f(y) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \frac{1}{|x-y|^{n-2}} dy$$

dalla diseguaglianza di Calderon-Zygmund

$$\|u_{ij}\|_{L^{n-1}} < C_{n-1} \|f\|_{L^{n-1}}$$

si ha:

$$\left\| \frac{\partial^2 u_n}{\partial x_i \partial x_j} - u_{ij} \right\|_{L^{n-1}} \leqslant C_{n-1} \|f - f_n\|_{L^{n-1}} \qquad n \to \infty$$

e quindi $\{\partial^2 u_n/(\partial x_i \partial x_j\}$ converge in media di ordine $n-1$ a $u_{ij}(x) \in L^{n-1}(R^n)$. Si conclude che $u(x) \in W^{2,n-1}_{\text{loc}}$ e $u_{ij}(x) = \partial^2 u(x)/(\partial x_i \partial x_j)$; da ciò seguono le proprietà ii), iii), iv).

LEMMA 2. Se $f(x) \in L^1 \cap L^{n-1}$, $v(x)$ ha le seguenti proprietà:

i) $v(x), \dfrac{\partial v(x)}{\partial x_i}, \dfrac{\partial^2 v(x)}{\partial x_j \partial x_j}$ sono limitate;

ii) $v(x) \in C^2(R^n)$

iii) $\Delta v(x) = -\dfrac{k^2}{S} \varphi(x)$.

Se $n \geqslant 4$ è possibile, utilizzando ben note decomposizioni di $H^1_\nu(z)$ scrivere $v(x)$ nella seguente forma:

$$v(x) = \int f(y) \frac{N(r)}{r^{n-4}} dy \qquad\qquad r = |x-y|$$

con $N(r) = P(r) + r^{n-4}L(r) + r^{n-4}W(r)\lg(-ik(r/2))$, dove $P(r)$ è un polinomio in r di ordine $\leqslant n-5$ e quindi nullo per $n=4$, $L(r)$ è una funzione regolare e limitata, $W(r)$ è una funzione regolare e limitata se n è pari ed è identicamente nulla se n è dispari.

DIM.

$$(2.2) \qquad |v(x)| \leqslant \int |f(y)| \frac{|N(r)|}{r^{n-4}} dy \leqslant M_1 \int\limits_{|r|\leqslant 1} \frac{|f(y)|}{r^{n-4}} dy + M_2 \|f\|_{L^1} \leqslant$$

$$\leqslant M_1 \left(B \frac{n-2}{3n-4}\right)^{(n-2)/(n-1)} \|f\|_{L^{n-1}} + M_2 \|f\|_{L^1}$$

$$M_1 = \max_{r\leqslant 1} |N(r)| \qquad M_2 = \max_{r\geqslant 1} \frac{|N(r)|}{r^{n-4}}.$$

Posto

$$v_i(x) = \int f(y) \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{N(r)}{r^{n-4}}\right) \frac{\partial r}{\partial x_i} dy$$

e

$$v_{ij}(x) = \int f(y) \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(\frac{N(r)}{r^{n-4}}\right) \frac{\partial r}{\partial x_i}\frac{\partial r}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{N(r)}{r^{n-4}}\right) \frac{\partial^2 r}{\partial x_i \partial x_j}\right] dy$$

si riconosce che $v_i(x)$ e $v_{ij}(x)$ sono limitate.

Tenendo conto delle formule di derivazione di $r^{1-n/2}H^1_{n/2-1}(kr)$ si ha:

$$\frac{\partial}{\partial r}\frac{N(r)}{r^{n-4}} = \frac{\overline{P}(r) + r^{n-3}\overline{L}(r) + r^{n-3}\overline{W}(r)\lg(-ik(r/2))}{r^{n-3}} = \frac{\overline{N}(r)}{r^{n-3}}$$

in cui $\overline{P}(r)$ è un polinomio in r di ordine $\leqslant n-4$, $\overline{L}(r)$ e $\overline{W}(r)$ sono funzioni dello stesso tipo di $L(r)$ e $W(r)$.

Ne segue, essendo $|\partial r/\partial x_i| < 1$ ed operando in analogia a sopra

$$(2.3) \quad |v_i(x)| \leqslant \int |f(y)| \frac{|\overline{N}(r)|}{r^{n-3}} dy \leqslant M_3 \left(B \frac{n-2}{2n-3}\right)^{(n-2)/(n-1)} \|f\|_{L^{n-1}} + M_4 \|f\|_{L^1}$$

$$M_3 = \max_{r\leqslant 1} |\overline{N}(r)|, \qquad M_4 = \max_{r\geqslant 1} \frac{|\overline{N}(r)|}{r^{n-3}}$$

Per quanto riguarda $v_{ij}(x)$ si introduca in analogia $\overline{\overline{N}}(r)$; essendo $|\partial^2 r/(\partial x_i \partial x_j)| < 2/r$ si ha:

$$(2.4) \qquad |v_{ij}(x)| \leqslant \int |f(y)| \frac{|\overline{\overline{N}}(r)|}{r^{n-2}} dy + 2\int |f(y)| \frac{|\overline{N}(r)|}{r^{n-2}} dy \leqslant$$

$$\leqslant (M_5 + 2M_3) B^{(n-2)/(n-1)} \|f\|_{L^{n-1}} + (M_6 + 2M_7)\|f\|_{L^1}$$

$$M_5 = \max_{r \leqslant 1} |\overline{\overline{N}}r)| , \qquad M_6 = \max_{r \geqslant 1} \frac{|\overline{\overline{N}}(r)|}{r^{n-2}} , \qquad M_7 = \max_{r \geqslant 1} \frac{|\overline{N}(r)|}{r^{n-2}} .$$

Introdotta una successione $\{f_n\} \subset C_0^\infty(R^n)$ tale che

$$\|f - f_n\|_{L^{n-1}} \to 0 \qquad \|f - f_n\|_{L^1} \to 0 \qquad n \to +\infty$$

si definiscono le funzioni $v_n \in C^\infty(R^n)$:

$$v_n(x) = \int f_n(y) \frac{N(|x-y|)}{|x-y|^{n-4}} dy = \int f_n(x-y) \frac{N(|y|)}{|y|^{n-4}} dy ;$$

da queste per derivazione si ha:

$$\frac{\partial v_n(x)}{\partial x_i} = \int f_n(y) \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{N(|x-y|)}{|x-y|^{n-4}} dy$$

$$\frac{\partial^2 v_n(x)}{\partial x_i \partial x_j} = \int f_n(y) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \frac{N(|x-y|)}{|x-y|^{n-4}} dy .$$

Dalle (2.2), (2.3), (2.4) si ottiene che $\{v_n(x)\}$, $\{\partial v_n(x)/\partial x_i\}$, $\{\partial^2 v_n(x)/\partial x_i \partial x_j\}$ sono successioni di funzioni continue uniformemente convergenti a $v(x)$, $v_i(x)$, $v_{ij}(x)$ rispettivamente. Si conclude così che $v(x) \in C^2(R^n)$ e che $v_i = \partial v/\partial x_i$, $v_{ij} = \partial^2 v/(\partial x_i \partial x_j)$ e quindi restano dimostrate le proprietà i) ed ii). La proprietà iii) si deduce dalla

$$\Delta v(x) = \int f(y) \Delta \left[\frac{H^1_{n/2-1}(kr)}{r^{n/2-1}} - \frac{\mu}{r^{n-2}} \right] dy$$

tenuto conto che

$$\Delta \left[\frac{H^1_{n/2-1}(kr)}{r^{n/2-1}} - \frac{\mu}{r^{n-2}} \right] = -k^2 \frac{H^1_{n/2-1}(kr)}{r^{n/2-1}} .$$

Nel caso $n = 3$ è $N(r) = \exp[ikr] - 1$ e le proprietà si dimostrano in maniera analoga [4].

Dai Lemmi 1 e 2 e dalla (2.1) segue:

TEOREMA 1. Se $f(x) \in L^1 \cap L^{n-1}$ la $\varphi(x)$ definita dalla (1.2) verifica l'equazione $\Delta\varphi + k^2\varphi = f(x)$ ed appartiene a $W^{2,n-1}_{\text{loc}}(R^n)$.

3. TEOREMA 2. Se $f(x) \in L^{n-1}(R^n)$, $f(x) = o(|x|^{-n/2-2M+1}\exp[-k|x|/2])$ lo sviluppo asintotico della (1.2) troncato all'ordine M è dato da:

$$\varphi(x) = \bar{S}|x|^{-n/2+1/2}\exp[ik|x|]\sum_{h=0}^{M-1}(-2ik|x|)^{-h}\frac{(-1)^{h+1}}{h!}\cdot \tag{3.1}$$

$$\cdot\sum_{j=0}^{h}\frac{(-1)^{j+1}}{2^{2(h-j)}}\{h, h-j\}\int|y|^{-(n/2-1)}f(y)\nabla_0^j(\exp[-ik|y|\cos\theta]|y|^{n/2-1})\,dy + \\ + O(|x|^{-n/2-M+1/2})$$

dove

$$\bar{S} = S\left(\frac{\pi k}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}\exp\left[-i\frac{\pi}{2}\left(\frac{n}{2}-1\right)-i\frac{\pi}{4}\right], \qquad \cos\theta = (x, y)/|x||y|,$$

$$\{h, h-j\} = \sum_{\substack{a_1, a_2, \ldots, a_{h-j}=1 \\ a_1<a_2<\ldots<a_{h-j}}}(2a_1-1)^2(2a_2-1)^2\ldots(2a_{h-j}-1)^2$$

$$\{h, 0\} = \{0, 0\} = 1,$$

∇_0^j è la potenza j-esima dell'operatore di Bessel di ordine 0

$$\nabla_0 = |y|^2\frac{d^2}{d|y|^2} + |y|\frac{d}{d|y|} + k^2|y|^2.$$

DIM. Tenendo conto del teorema di addizione per le funzioni cilindriche [8]:

$$w^{-\nu}H^1_\nu(kw) = 2^\nu k^{-\nu}\Gamma(\nu)(r\varrho)^{-\nu}\sum_{m=0}^{\infty}(\nu+m)C^\nu_m(\cos\theta)J_{\nu+m}(k\varrho)H^1_{\nu+m}(kr)$$

con

$$w = (\varrho^2 + r^2 - 2r\varrho\cos\theta)^{\frac{1}{2}} \qquad 0 < \varrho < r$$

e del comportamento asintotico di $H^1_\nu(z)$ [9]:

$$H^1_\nu(z) = \left(\frac{\pi z}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}\exp\left[i\left(z-\frac{\pi}{2}\nu-\frac{\pi}{4}\right)\right]\left[\sum_{m=0}^{M-1}(\nu, m)(-2iz)^{-m} + R_{\nu,M}(z)\right]$$

e delle diseguaglianze:

$$|R_{n/2-1+m,M}(k|y|)| \leqslant \frac{1}{M!}(2k)^{-M}\left|\frac{3}{2}-\frac{n}{2}-m\right|_M\left(\frac{n}{2}-\frac{1}{2}+m\right)_M|y|^{-M};$$

$$|C_m^{n/2-1}(\cos\theta)| \leqslant \binom{m+n-3}{m};\ |J_{n/2-1+m}(k|x|)| \leqslant \left(\frac{k|x|}{2}\right)^{n/2-1+m} \Big/ \Gamma\left(\frac{n}{2}+m\right),$$

indicato con $\varphi_M(x)$ la somma dei primi M termini di (3.1) si ha:

$$\begin{aligned}
|\varphi(x)-\varphi_M(x)| &= \left|S 2^{n/2-1}k^{-(n/2-1)}\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)|x|^{-(n/2-1)}\sum_{m=0}^{\infty}\left(k\pi\frac{|x|}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\right.\\
&\quad\cdot\exp\left[i\left[k|x|-\frac{\pi}{2}\left(\frac{n}{2}-1+m\right)-\frac{\pi}{4}\right]\right]R_{n/2-1+m,M}\cdot\left(\frac{n}{2}-1+m\right)\cdot\\
&\quad\cdot\int f(y)|y|^{-(n/2-1)}C_m^{n/2-1}(\cos\theta)\ J_{n/2-1+m}(k|y|)\,dy \leqslant\\
&\leqslant\frac{|S 2^{n/2-1}k^{-(n/2-1)}\Gamma(n/2-1)|}{|x|^{n/2-\frac{1}{2}}}\left(\frac{\pi k}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{n}{2}-1+m\right)\cdot\\
&\quad\cdot|R_{n/2-1+m,M}|\int|f(y)||y|^{-(n/2-1)}|C_m^{n/2-1}(\cos\theta)||J_{n/2-1+m}(k|y|)|\,dy \leqslant\\
&\leqslant\frac{|S\Gamma(n/2-1)|}{|x||^{n/2-\frac{1}{2}+M}}\left(\frac{\pi k}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}\frac{(2k)^{-M}}{M!}\sum_{m=0}^{\infty}\cdot\\
&\quad\cdot\left(\frac{n}{2}-1+m\right)\left|\frac{3}{2}-\frac{n}{2}-m\right|_M\frac{(n/2-\frac{1}{2}+m)_M}{\Gamma(n/2+m)}\cdot\\
&\qquad\cdot\binom{m+n-3}{m}\int|f(y)|\left(\frac{k|y|}{2}\right)^m dy\,.
\end{aligned}$$

Essendo

$$\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{n}{2}-1+m\right)\left|\frac{3}{2}-\frac{n}{2}-m\right|_M\left(\frac{n}{2}-\frac{1}{2}+m\right)_M\binom{m+n-3}{m}\cdot$$
$$\cdot\left[\Gamma\left(\frac{n}{2}+m\right)\right]^{-1}\left(\frac{k|y|}{2}\right)^m=$$

$$=\begin{cases}
\left(\frac{n}{2}-\frac{3}{2}\right)_M\left(\frac{n}{2}-\frac{1}{2}\right)_M\left[\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)\right]^{-1}\cdot\\
\quad\cdot{}_3F_3\left(\frac{n}{2}-\frac{3}{2}+M,\frac{n}{2}-\frac{1}{2}+M,n-2;\frac{n}{2}-1,\frac{n}{2}-\frac{3}{2},\frac{n}{2}-\frac{1}{2};\frac{k|y|}{2}\right)\cdot & \text{se } n>3\\
\frac{k|y|}{2}\Gamma(M+1)\left[\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\right]^{-1}(2)_M\,{}_2F_2\left(M+1,M+2;2,\frac{3}{2};\frac{k|y|}{2}\right)\cdot & \text{se } n=3
\end{cases}$$

il teorema risulta provato stante l'andamento della funzione ipergeometrica generalizzata ${}_pF_p(z)$ [10].

TEOREMA 3. Se $f(x) \in L^{n-1}(R^n)$ $f(x) = o\big(|x|^{-(n/2)-2M} \exp[-k|x|/2]\big)$ lo sviluppo asintotico della derivata radiale di (1.2) troncato all'ordine M è dato da:

$$
(3.2) \qquad \frac{\partial\varphi(x)}{\partial|x|} = ik\bar{S}|x|^{-n/2+1/2} \exp[ik|x|] \int f(y) \exp[-ik|y|\cos\theta]\, dy +
$$

$$
- ik\bar{S}|x|^{-n/2+1/2} \exp[ik|x|] \sum_{h=0}^{M-1} (-2ik|x|)^{-(h+1)} \frac{(-1)^{h+1}}{(h+1)!} \cdot
$$

$$
\cdot \Bigg\{ \sum_{j=0}^{h} \frac{(-1)^{\lambda+1}}{2^{2(h-j)}} \int |y|^{-n/2} f(y) \nabla_0^j (\exp[-ik|y|\cos\theta]|y|^{n/2}) \cdot
$$

$$
\cdot \left[\frac{\{h+1, h+1-j\}}{2^2} + (h+1)\{h, h-j\}|y|\cos\theta \right] dy +
$$

$$
+ (-1)^h \int |y|^{-n/2} f(y) \nabla_0^{h+1} (\exp[-ik|y|\cos\theta]|y|^{n/2})\, dy \Bigg\} + O(|x|^{-n/2+\frac{1}{2}-M}) .
$$

DIM. Tenuto conto che

$$
\frac{\partial\varphi(x)}{\partial|x|} = -kS|x| \int \frac{H^1_{n/2}(k|x-y|)}{|x-y|^{n/2}} f(y)\, dy + kS \int \frac{H^1_{n/2}(k|x-y|)}{|x-y|^{n/2}} \cdot
$$

$$
\cdot |y| \cos\theta f(y)\, dy
$$

la dimostrazione discende con calcoli elementari dal comportamento asintotico di:

$$
\psi(x) = S \int \frac{H^1_{n/2}(k|x-y|)}{|x-y|^{n/2}} f(y)\, dy = -i\bar{S}|x|^{-n/2-1/2} \exp[ik|x|] \cdot
$$

$$
\cdot \sum_{h=0}^{M-1} (-2ik|x|)^{-h} \frac{(-1)^{h+1}}{h!} \sum_{j=0}^{h} \frac{(-1)^{j+1}}{2^{2(h-j)}} \{h, h-j\} \int |y|^{-n/2} f(y) \cdot
$$

$$
\cdot \nabla_0^j (\exp[-ik|y|\cos\theta]|y|^{n/2})\, dy + O(|x|^{-n/2-\frac{1}{2}-M})
$$

che si riconosce valido operando come al teorema 2.

OSSERVAZIONE I. Tenuto conto del comportamento delle ${}_pF_p(z)$ sull'asse reale, la (3.1) e la (3.2) rappresentano lo sviluppo asintotico di $\varphi(x)$ e di $\partial\varphi(x)/\partial|x|$ se $f(x) \in C_0^\infty(R^n)$

OSSERVAZIONE II. Se $f(x) \in L^{n-1}(R^n)$ e $f(x) = O(\exp[-k|x|])$ la (3.1) e la (3.2) forniscono lo sviluppo asintotico di $\varphi(x)$ e di $\partial\varphi(x)/\partial(x)$.

4. TEOREMA 4. Se posto

$$\Phi(r) = \sup\{|f(y)|: |y| = r\}$$

è

$$\int_{R^n} |x|^\alpha \Phi(|x|)\,dx < +\infty \qquad \alpha = 0, 1, 2$$

si ha

$$\text{(4.1)} \qquad \text{i) } \varphi(x) = \bar{S}\frac{\exp[ik|x|]}{|x|^{n/2-1/2}}\int f(y)\exp[-ik|y|\cos\theta]dy + O(|x|^{-n/2-1/2})$$

$$\text{(4.2)} \qquad \text{ii) } \frac{\partial\varphi(x)}{\partial|x|} = ik\bar{S}\frac{\exp[ik|x|]}{|x|^{n/2-1/2}}\int f(y)\exp[-ik|y|\cos\theta]dy + O(|x|^{-n/2-1/2})\,.$$

È utile premettere alla dimostrazione di questo teorema il seguente lemma:

LEMMA 3. Se $\Phi(|x|)$, di cui al teorema 4, è sommabile in R^n

$$\int\frac{f(y)}{|x-y|^\lambda}dy = O(|x|^{-\lambda})\,; \qquad 1 \leqslant \lambda \leqslant \max_{n\geqslant 4}\left\{n-2, \frac{n}{2}+\frac{1}{2}\right\}; \qquad |x| \to +\infty$$

Se $1 \leqslant \lambda \leqslant n-2$, premesso che

$$(|y|^2 - 2|x||y|\cos\theta + |x|^2)^{-\lambda/2} = \begin{cases} |y|^{-\lambda}\sum_{m=0}^{\infty} C_m^{\lambda/2}(\cos\theta)(|x|/|y|)^m & |x| < |y| \\ |x|^{-\lambda}\sum_{m=0}^{\infty} C_m^{\lambda/2}(\cos\theta)(|y|/|x|)^m & |x| > |y|\,, \end{cases}$$

con opportuna scelta di coordinate si ha:

$$\int\frac{f(y)}{|x-y|^\lambda}dy \leqslant \int\frac{\Phi(|y|)}{|x-y|^\lambda}dy =$$

$$= C\int_0^\infty \Phi(|y|)|y|^{n-1}d|y|\int_0^\pi \frac{\sin^{n-2}\theta}{(|y|^2-2|x||y|\cos\theta+|x|^2)^{\lambda/2}}d\theta \leqslant$$

$$\leqslant C\int_0^\infty \Phi(|y|)|y|^{n-1}d|y|\int_0^\pi \frac{\sin^\lambda\theta}{(|y|^2-2|x||y|\cos\theta+|x|^2)^{\lambda/2}}d\theta =$$

$$= C\left\{ \int_0^\pi \int_0^{|x|} \Phi(|y|)|y|^{n-1}|x|^{-\lambda} \sum_{m=0}^{\infty} C_m^{\lambda/2}(\cos\theta)(|y|/|x|)^m \sin^\lambda\theta \, d\theta \, d|y| + \right.$$

$$\left. + \int_0^\pi \int_{|x|}^{+\infty} \Phi(|y|)|y|^{n-1-\lambda} \sum_{m=0}^{\infty} C_m^{\lambda/2}(\cos\theta)(|x|/|y|)^m \sin^\lambda\theta \, d\theta \, d|y| \right\}$$

avendo indicato con

$$C = 2\pi \int_0^\pi .. \int_0^\pi \sin^{n-3}\varphi_1 \dots \sin\varphi_{n-3} d\varphi_1 \dots d\varphi_{n-3} .$$

È agevole verificare che la serie $\sum_{m=0}^{\infty} C_m^{\lambda/2}(\cos\theta) z^m$ converge uniformemente in θ se $|z| < 1$ essendo maggiorata dalla serie convergente $\sum_{m=0}^{\infty} \binom{m+h-1}{m} |z|^m$; ne segue:

$$\int_0^\pi \sum_{m=0}^{\infty} C_m^{\lambda/2}(\cos\theta)|z|^m \sin^\lambda\theta \, d\theta = \sum_{m=0}^{\infty} |z|^m \int_\pi^0 C_m^{\lambda/2}(\cos\theta) \sin^{\lambda-1}\theta \, d\cos\theta .$$

Tenuto conto della relazione di ortogonalità per i polinomi di Gegenbauer [8] è:

$$\int_\pi^0 C_m^{\lambda/2}(\cos\theta) \sin^{\lambda-1}\theta \, d\cos\theta = \int_{-1}^1 C_m^{\lambda/2}(x)\, C_0^{\lambda/2}(x)(1-x^2)^{\lambda/2-1/2} dx =$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{se } m \neq 0 \\ \pi 2^{2-\lambda}\Gamma(\lambda)\lambda^{-1}[\Gamma(\lambda/2)]^{-2} & \text{se } m = 0 \end{cases}$$

e quindi

$$\int_0^\pi \sum_{m=0}^{\infty} C_m^{\lambda/2}(\cos\theta)|z|^m \sin^\lambda\theta \, d\theta = \pi 2^{2-\lambda}\Gamma(\lambda)\lambda^{-1}[\Gamma(\lambda/2)]^{-2} \qquad \text{se } |z| < 1 .$$

È dunque, posto $\bar{C} = C\pi 2^{2-\lambda}\Gamma(\lambda)\lambda^{-1}[\Gamma(\lambda/2)]^{-2}$

$$\int \frac{|f(y)|}{|x-y|^\lambda} dy \leqslant \bar{C}\left\{ |x|^{-\lambda} \int_0^{|x|} \Phi(|y|)|y|^{n-1} d|y| + \int_{|x|}^{+\infty} \Phi(|y|)|y|^{n-1-\lambda} d|y| \right\} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\bar{C}}{B} |x|^{-\lambda} \|\Phi\|_{L_1}$$

onde l'asserto.

Se $n = 4$, $1 \leqslant \lambda \leqslant n/2 + 1/2$, premesso che [8]:

$$\int_0^\pi \frac{\sin^2\theta}{(1-2|z|\cos\theta + |z|^2)^{\lambda/2}}\,d\theta =$$

$$= \pi\left\{{}_2F_1\left(\frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2}; 1; |z|^2\right) - z^2\frac{\Gamma(2+\lambda/2)}{2\Gamma(\lambda/2)}\,{}_2F_1\left(\frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2}+2, 3, |z|^2\right)\right\} = \psi(z)$$

se $|z| \leqslant 1$

si ha

$$\int \frac{f(y)}{|x-y|^\lambda}\,dy \leqslant \int \frac{\Phi(|y|)}{|x-y|^\lambda}\,dy = C\int_0^\infty \Phi(|y|)|y|^3\,d|y|\,\cdot$$

$$\cdot\int_0^\pi \frac{\sin^2\theta}{(|y|^2 - 2|x||y|\cos\theta + |x|^2)^{\lambda/2}}\,d\theta \leqslant \frac{1}{|x|^\lambda}\int_0^{|x|} \Phi(|y|)|y|^3\psi\left(\frac{|y|}{|x|}\right)d|y| +$$

$$+ \frac{1}{|x|^\lambda}\int_{|x|}^{+\infty} \Phi(|y|)|y|^3\psi\left(\frac{|x|}{|y|}\right)d|y| \leqslant M|x|^{-\lambda}\|\Phi\|_{L_1}, \qquad M = \max_{z\in[0,1]}\psi(z),$$

onde l'asserto.

Dim. Teorema 4. Nel caso $n = 3$ si procede in analogia a [4]. Sia $n \geqslant 4$:

La proprietà i) discende da

$$(4.3) \qquad \left|\varphi(x) - \bar{S}\frac{\exp[ik|x|]}{|x|^{n/2-1/2}}\int f(y)\exp[-ik|y|\cos\theta]\,dy\right| =$$

$$= \left| S\left(\frac{2}{k\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\int \frac{f(y)}{|x-y|^{n/2-1/2}}\cdot\exp i\left[k|x-y| - \frac{\pi}{2}\left(\frac{n}{2}-1\right) - \frac{\pi}{4}\right]\cdot\right.$$

$$\left.\cdot(1 + R_{n/2-1,1}(k|x-y|))\,dy - \bar{S}\frac{\exp[ik|x|]}{|x|^{n/2-1/2}}\int f(y)\exp[-ik|y|\cos\theta]\,dy\right| \leqslant$$

$$\leqslant |\bar{S}|\int |f(y)|\left|\frac{\exp[ik(|x-y| - |x| + |y|\cos\theta)]}{|x-y|^{n/2-1/2}} - \frac{1}{|x|^{n/2-1/2}}\right|dy +$$

$$+ |\bar{S}|\int \frac{|f(y)|A}{|x-y|^{n/2+1/2}}\,dy$$

essendo $|R_{n/2-1,1}(k|x-y|)| < A/|x-y|$. Con passaggi elementari si ottiene:

$$\frac{1}{|x|^{n/2-1/2}|x-y|^{n/2-1/2}}\Big|\exp\left[ik(|x-y|-|x|+|y|\cos\theta)\right]|x|^{n/2-1/2}-$$
$$-|x-y|^{n/2-1/2}\Big|\leqslant\frac{(n/2+7/2)|y|+2k|y|^2}{|x||x-y|^{n/2-1/2}}+\left(\frac{n}{2}-\frac{1}{2}\right)\frac{|y|}{|x|^{n/2-1/2}|x-y|}\,.$$

Il secondo membro della (4.3) è quindi maggiorato da:

$$\frac{|\bar{S}|}{|x|}\int\frac{|f(y)|}{|x-y|^{n/2-1/2}}\left[\left(\frac{n}{2}+\frac{7}{2}\right)|y|+2k|y|^2\right]dy+|\bar{S}|\frac{(n/2-\frac{1}{2})}{|x|^{n/2-1/2}}\int\frac{|f(y)||y|}{|x-y|}\,dy+$$
$$+|\bar{S}|A\int\frac{|f(y)|}{|x-y|^{n/2+1/2}}\,dy=O(|x|^{-n/2-1/2})\qquad\text{per il lemma 3}\,.$$

Per quanto riguarda la proprietà ii) si ha, sempre utilizzando il lemma 3:

$$\Big|\frac{\partial\varphi}{\partial|x|}-ik\bar{S}|x|^{-n/2+1/2}\exp\left[ik|x|\right]\int[f(y)\exp\left[-ik|y|\cos\theta\right]dy\Big|\leqslant\Big|-$$
$$-kS|x|\int\frac{H^1_{n/2}(k|x-y|)}{|x-y|^{n/2}}f(y)\,dy+kS\int\frac{H^1_{n/2}(k|x-y|)}{|x-y|^{n/2}}|y|f(y)\cos\theta\,dy+$$
$$+k\bar{S}|x|^{-n/2+1/2}\exp\left[ik|x|\right]\int f(y)\exp\left[-ik|y|\cos\theta\right]dy\Big|\leqslant$$
$$\leqslant k|\bar{S}||x|\int|f(y)|\left|\frac{\exp\left[ik|x-y|\right]}{|x-y|^{n/2+1/2}}-\frac{\exp\left[ik(|x|-|y|\cos\theta)\right]}{|x|^{n/2+1/2}}\right|dy+$$
$$+\tilde{A}\int\frac{|f(y)|}{|x-y|^{n/2+1/2}}\,dy=O(|x|^{-n/2-1/2})\,.$$

5. È agevole verificare che nelle ipotesi in cui sono validi gli sviluppi asintotici di $\varphi(x)$ e di $\partial\varphi(x)/\partial|x|$ si ha:

$$\varphi(x)=O(|x|^{-n/2+1/2}),\qquad\frac{\partial\varphi(x)}{\partial|x|}-ik\varphi(x)=O(|x|^{-n/2-1/2})\qquad|x|\to+\infty\,.$$

Sotto dette ipotesi dunque il problema (1.1) ha come unica soluzione (1.2) e detta soluzione appartiene a $W^{2,n-1}(R^n)$ $(W^{2,2}_{\mathrm{loc}}(R^n)$ se $n=3)$.

Se $f(x)$ soddisfa le ipotesi del teorema 2 il suo andamento asintotico troncato all'M-esimo termine è dato dalla (3.1).

Se $f(x)$ soddisfa le ipotesi del teorema 4 il suo andamento asintotico, troncato al primo termine, è dato dalla (4.1).

BIBLIOGRAFIA

[1] R. Courant - D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics*, Interscience (1962).
[2] P. M. Morse - H. Feshbach, *Methods of Theoretical Physics*, McGraw-Hill (1953).
[3] A. Messiah, *Quantum Mechanics*, North Holland (1962).
[4] M. Bertero - G. Talenti - G. A. Viano, *Eigenfunctions expansions associated with Schrödinger two-particle operators*, Nuovo Cimento, **62**, *A*, n. 1 (1969).
[5] B. Lippman - J. Schwinger, *Variational principles for scattering processes - I*, Phys. Rev., **79** (1950).
[6] N. Dunford - J. T. Schwartz, *Linear Operators*, vol. II, Interscience (1964).
[7] R. A. Adams, *Sobolev Spaces*, Academic Press (1965).
[8] W. Magnus - F. Oberhettinger - R. Soni, *Formulas and Theorems for the Special Functions of Mathematical Physics*, Springer-Verlag (1966).
[9] G. N. Watson, *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, Cambridge University Press (1958).
[10] E. M. Wright, *The Asymptotic Expansion of the Generalized Hypergeometric Function*, Proc. Lond. Math. Soc., Serie II, **46** (1940).

Manoscritto pervenuto in redazione il 14 luglio 1979.