RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

ANTONIO C. GRIOLI

Sul moto di un giroscopio in un campo gravitazionale centrale

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 63 (1980), p. 41-49
<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1980__63__41_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 63 (1970)

Sul moto di un giroscopio in un campo gravitazionale centrale

ANTONIO C. GRIOLI (*)

Considero il moto attorno al baricentro di un giroscopio C soggetto ad attrazione newtoniana emanante da un centro fisso, nell'ipotesi che il baricentro si muova con legge nota su una traiettoria piana.

Ponendosi nello schema e nell'ordine di approssimazione abituale in meccanica celeste [I], ne deriva un problema che presenta notevoli difficoltà analitiche. Tuttavia vale la pena di osservare che nel caso di una forte velocità angolare iniziale attorno ad un asse quasi parallelo all'asse giroscopico, è possibile applicare il principio dell'effetto giroscopico nella forma precisata da Stoppelli [II].

Così facendo la determinazione del moto di C si riporta all'integrazione di un sistema di due equazioni differenziali in forma normale, ciascuna del primo ordine, che, almeno in certe ipotesi (soddisfatte ad esempio se il moto del baricentro è circolare uniforme e sono verificate certe ipotesi sul valore iniziale della velocità angolare), si riporta alle quadrature.

1. – Il baricentro G di un giroscopio C descriva una curva piana γ con legge nota. Supposto che su C agisca una forza gravitazionale dovuta ad una massa m posta in un punto fisso O del piano di γ, se $\bar{r}(t) = \overline{OG}(t)$ è sufficientemente grande rispetto alle dimensioni di C, è lecito (vedi [I] (20,9)), trascurando infinitesimi del quart'ordine rispetto a $r^{-1}(t)$, assumere come espressione del momento delle forze

(*) Indirizzo dell'A: Seminario Matematico, Università di Padova.
Lavoro eseguito nell'ambito dei gruppi di ricerca matematica del C.N.R.

gravitazionali rispetto al polo G la:

$$\overline{M}_G = \frac{3mh}{r^3}\, \overline{u} \wedge \sigma \overline{u} \tag{1}$$

essendo h la costante di Gauss, $\overline{u}$ il versore di $\overline{OG}$ e σ la matrice d'inerzia di C.

Considero una terna fissa con origine in O e versori $\overline{c}_1, \overline{c}_2, \overline{c}_3$, con $\overline{c}_1$ e $\overline{c}_2$ nel piano di γ, e una terna solidale a C, con origine in G e assi di versori $\overline{j}_1, \overline{j}_2, \overline{j}_3$, centrali d'inerzia.

Detto $\alpha = \alpha(t)$ l'angolo che $\overline{OG}$ forma con $\overline{c}_1$, si ha:

$$\overline{u} = \cos\alpha \overline{c}_1 + \sin\alpha \overline{c}_2 \,. \tag{2}$$

Indicati con A_1, A_2, A_3 i momenti centrali d'inerzia di C e tenuto conto della sua struttura giroscopica ($A_1 = A_2$), da (1) segue:

$$\overline{M}_G = \frac{3mh}{r^3}(A_3 - A_1)(u_2 \overline{j}_1 - u_1 \overline{j}_2) u_3 = \frac{2mh}{r^3} u_3 (A_3 - A_1) \overline{u} \wedge \overline{j}_3 \,. \tag{3}$$

Da (3) si ricava:

$$\overline{M}_G \times \overline{j}_3 = 0 \,. \tag{4}$$

La (4) mostra la ortogonalità di $\overline{M}_G$ all'asse giroscopico $\overline{j}_3$.

2. – Richiamo l'enunciato del principio dell'effetto giroscopico nella forma stabilita da Stoppelli per un solido asimmetrico:

Sia C un solido asimmetrico con un punto fisso Ω e $\overline{j}_1, \overline{j}_2, \overline{j}_3$ una terna principale d'inerzia di origine Ω. Supposto che il momento delle forze agenti $\overline{M}_\Omega$ sia ortogonale a $\overline{j}_3$ (di momento d'inerzia diverso da quello medio) e che inizialmente la velocità angolare sia molto grande e quasi parallela a $\overline{j}_3 (\sqrt{p_1(0)^2 + p_2(0)^2} \ll |p_3(0)|)$, durante il moto le componenti p_1 e p_2 della velocità angolare possono dedursi dalla:

$$\begin{aligned} A_3 p_3(0) \frac{d\overline{j}_3}{dt} &= \overline{M}_\Omega + \frac{A_2 - A_1}{A_3 - A_2 - A_1}(M_1 \overline{j}_1 - M_2 \overline{j}_2) + \\ &+ A_3 \left[\left(p_3(0) p_1(0) + \frac{a - A_2/A_1}{ab - 1} \frac{M_2(0)}{A_2} \right) \sqrt{\frac{b}{a}} \cdot \sin\left(\sqrt{ab}\, p_3(0) t\right) + \right. \\ &+ \left. \left(p_3(0) p_2(0) - \frac{b - (A_1/A_2)}{ab - 1} \frac{M_1(0)}{A_1} \right) \cos\left(\sqrt{ab}\, p_3(0)\, t\right) \right] \overline{j}_1 - \\ &- A_3 \left[\left(p_3(0) p_1(0) + \frac{a - A_2/A_1}{ab - 1} \frac{M_2(0)}{A_2} \right) \cos\left(\sqrt{ab}\, p_3(0) t\right) - \right. \\ &- \left. \left(p_3(0) p_2(0) - \frac{b - A_1/A_2}{ab - 1} \frac{M_1(0)}{A_1} \right) \sqrt{\frac{a}{b}} \sin\left(\sqrt{ab}\, p_3(0) t\right) \right] \overline{j}_2 \end{aligned} \tag{5}$$

con:

$$a = \frac{A_3 - A_2}{A_1} \; b = \frac{A_3 - A_1}{A_2} \qquad M_1 = \bar{M}_\Omega \times \bar{j}_1 \quad M_2 = \bar{M}_\Omega \times \bar{j}_2$$

a meno di termini infinitesimi di ordine superiore a $p_3(O)^{-1}$.

Anche i valori degli angoli di Eulero che si ottengono facendo uso della (5) differiscono da quelli esatti per termini infinitesimi dello stesso ordine.

Da (5) si vede che se il corpo C è un giroscopio, con asse giroscopico coincidente con $\bar{j}_3$, stante tutte le altre ipotesi, i valori approssimati di p_1, p_2 e degli angoli di Eulero possono ricavarsi dalla:

$$(6) \qquad A_3 p_3(0) \frac{d\bar{j}_3}{dt} = \bar{M}_\Omega + \left[- l_2 \sin\left(\frac{A_3 - A_1}{A_1} p_3(0) t\right) + \right. \\ \left. + l_1 \cos\left(\frac{A_3 - A_1}{A_1} p_3(0) t\right)\right] \bar{j}_1 + \left[l_2 \cos\left(\frac{A_3 - A_1}{A_1} p_3(0) t\right) + \right. \\ \left. + l_1 \sin\left(\frac{A_3 - A_1}{A_1} p_3(0) t\right)\right] \bar{j}_2$$

con:

$$l_1 = A_3 p_3(0) p_2(0) - M_1(0)$$
$$l_2 = - A_3 p_3(0) p_1(0) - M_2(0)$$

3. – Mi propongo di studiare il moto di C attorno al suo baricentro, cioè rispetto ad un riferimento con origine in G ed assi costantemente paralleli agli assi fissi $\bar{c}_1, \bar{c}_2, \bar{c}_3$.

Poichè le forze di Coriolis e il momento rispetto a G delle forze di trascinamento sono entrambi nulli, il momento risultate delle forze agenti su C è dato, nell'ordine di approssimazione già considerato dalla (3).

Supporrò che inizialmente la velocità angolare sia molto grande e quasi parallela a $\bar{j}_3$; allora, stante (4), posso applicare allo studio del moto di C il principio dell'effetto giroscopico di Stoppelli e sostituire alle prime due equazioni di Eulero, in base a (6), la:

$$(7) \qquad A_3 p_3(0) \frac{d\bar{j}_3}{dt} = \bar{M}_G + \left[- l_2 \sin\left(\frac{A_3 - A_1}{A_1} p_3(0) t\right) + \right. \\ \left. + l_1 \cos\left(\frac{A_3 - A_1}{A_1} p_3(0) t\right)\right] \bar{j}_1 + \left[l_2 \cos\left(\frac{A_3 - A_1}{A_1} p_3(0) t\right) + \right. \\ \left. + l_1 \sin\left(\frac{A_3 - A_1}{A_1} p_3(0) t\right)\right] \bar{j}_2$$

con l_1 e l_2 dati, tenuto conto di (3), da:

$$
(8) \qquad
\begin{aligned}
l_1 &= A_3 p_3(0) p_2(0) - \frac{3mh}{r(0)^3}(A_3 - A_1) u_2(0) u_3(0) \\
l_2 &= -A_3 p_3(0) p_1(0) + \frac{3mh}{r(0)^3}(A_3 - A_1) u_1(0) u_3(0)
\end{aligned}
$$

Scritta la (7) nella forma equivalente:

$$
(9) \qquad \left[A_3 p_3(0)\bar{\omega} - \frac{3mh}{r^3}(A_3 - A_1) u_3 \bar{u} + \bar{l}\sin\left(\frac{A_3 - A_1}{A_1}\, p_3(0)\, t\right)\right] \wedge \bar{j}_3 = \\
= \bar{l}\cos\left(\frac{A_3 - A_1}{A_1} p_3(0)\, t\right)
$$

ove si è indicato con $\bar{l}$ il vettore di componenti l_1, l_2 e O, da (9) si ottengono le:

$$
(10) \qquad
\begin{aligned}
p_1 &= \frac{\dfrac{3mh}{r^3}(A_3 - A_1) u_3 u_1 - l_1 \sin\left(\dfrac{A_3 - A_1}{A_1} p_3(0)\, t\right) - l_2 \cos\left(\dfrac{A_3 - A_1}{A_1} p_3(0) t\right)}{A_3 p_3(0)} \\
p_2 &= \frac{\dfrac{3mh}{r^3}(A_3 - A_1) u_3 u_2 - l_2 \sin\left(\dfrac{A_3 - A_1}{A_1} p_3(0)\, t\right) + l_1 \cos\left(\dfrac{A_3 - A_1}{A_1} p_3(0) t\right)}{A_3 p_3(0)}
\end{aligned}
$$

Inoltre dalla terza equazione di Eulero segue:

$$
(11) \qquad p_3 = p_3(0)\,.
$$

La (2), tenuto conto delle note relazioni che legano i versori degli assi fissi a quelli solidali, porge:

$$
(12) \qquad
\begin{aligned}
u_1 &= \cos\varphi\cos\beta - \sin\varphi\cos\theta\sin\beta \\
u_2 &= -\sin\varphi\cos\beta - \cos\varphi\cos\theta\sin\beta \\
u_3 &= \sin\theta\sin\beta
\end{aligned}
$$

dove θ, φ e ψ sono gli angoli di Eulero e si è posto:

$$\psi - \alpha = \beta \,. \tag{13}$$

Da (10), (11) e (12), facendo uso delle note espressioni delle componenti della velocità angolare in funzione degli angoli di Eulero, si ottengono le:

$$(14)_1 \qquad \dot\theta = \frac{a}{p_3(0)} \sin\theta \sin\beta \cos\beta - \frac{l_1}{A_3 p_3(0)} \sin\left(b p_3(0) t + \varphi\right) - \\ - \frac{l_2}{A_3 p_3(0)} \cos\left(b p_3(0) t + \varphi\right)$$

$$(14)_2 \qquad \dot\varphi = -\frac{a}{p_3(0)} \cos\theta \sin^2\beta + \frac{l_1}{A_3 p_3(0) \sin\theta} \cos\left(b p_3(0) t + \varphi\right) - \\ - \frac{l_2}{A_3 p_3(0) \sin\theta} \sin\left(b p_3(0) t + \varphi\right)$$

$$(14)_3 \qquad \dot\beta = -\frac{a}{p_3(0)} \cos\theta \sin^2\beta + \frac{l_1}{A_3 p_3(0) \sin\theta} \cos\left(b p_3(0) t + \varphi\right) - \\ - \frac{l_2}{A_3 p_3(0) \sin\theta} \sin\left(b p_3(0) t + \varphi\right) - \dot\alpha$$

$$(14)_4 \qquad \dot\varphi = p_3(0) + \frac{a}{p_3(0)} \cos^2\theta \sin^2\beta - \frac{l_1 \cos\theta}{A_3 p_3(0) \sin\theta} \cos\left(b p_3(0) t + \varphi\right) + \\ + \frac{l_2 \cos\theta}{A_3 p_3(0) \sin\theta} \sin\left(b p_3(0) t + \varphi\right)$$

ove si è posto:

$$a = \frac{3mh}{A_3 r^3}\,, \quad b = \frac{A_3 - A_1}{A_1}\,. \tag{15}$$

Da (14) segue, a meno di termini infinitesimi di ordine superiore a $p_3(0)^{-1}$:

$$\varphi = \varphi(0) + p_3(0) t \,. \tag{16}$$

Tenuto conto di (16) si vede che il problema di determinare il moto di C attorno al suo baricentro si riduce all'integrazione del sistema delle due equazioni differenziali, ciascuna del primo ordine in forma normale, $(14)_1$ e $(14)_3$.

4. – Suppongo che, oltre ad essere verificate le ipotesi di cui al N. 3, risulti inizialmente:

$$\left[A_3 p_3 \bar{\omega} - \frac{3mh}{r^3}(A_3 - A_1) u_3 \bar{u}\right] \wedge \bar{j}_3 = 0 \qquad (\text{per } t = 0)\,. \tag{17}$$

Allora si annullano le due costanti l_1 e l_2 e le (14) divengono:

$$\dot{\theta} = \frac{a}{p_3(0)} \sin\theta \sin\beta \cos\beta \tag{18$_1$}$$

$$\dot{\psi} = -\frac{a}{p_3(0)} \cos\theta \sin^2\beta \tag{18$_2$}$$

$$\dot{\beta} = -\frac{a}{p_3(0)} \cos\theta \sin^2\beta - \dot{\alpha} \tag{18$_3$}$$

$$\dot{\varphi} = p_3(0) + \frac{a}{p_3(0)} \cos^2\theta \sin^2\beta \tag{18$_4$}$$

Da $(18)_1$ e $(18)_3$ segue:

$$\frac{d}{dt}(\sin\theta \sin\beta) + \dot{\alpha} \sin\theta \cos\beta = 0\,. \tag{19}$$

Particolare interesse presentano i due seguenti casi.

I) È $\dot{\alpha} = 0$, cioè G o sta fermo o si muove su una retta fissa passante per 0, che potremo sempre assumere come asse $\bar{c}_1$, così che risulti $\alpha = 0$.

In tal caso da (19) segue:

$$\sin\theta \sin\beta = \text{cost.} = \varrho\,. \tag{20}$$

La (20), tenuto conto di $(12)_3$, ci dice che il moto è di precessione, con asse di figura coincidente con l'asse giroscopico e asse di precessione parallelo a $\overline{OG}$.

Da (18), (20) segue:

$$\dot{\theta} = \pm \frac{a}{p_3(0)} \varrho \sqrt{1 - \frac{\varrho^2}{\sin^2\theta}} \tag{21}$$

da cui si ricava:

$$\int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\sin\theta}{\sqrt{\sin^2\theta - \varrho^2}}\, d\theta = \pm \frac{\varrho}{p_3(0)} f(t) \tag{22}$$

con:

$$f(t) = \int_0^t a\, dt\,. \tag{23}$$

L'integrale al primo membro di (22) si calcola facilmente e si ottiene:

$$\cos\theta = \sqrt{1-\varrho^2}\cos\left[\arccos\left(\frac{\cos\theta_0}{\sqrt{1-\varrho^2}}\right) \pm \frac{\varrho}{p_3(0)} f(t)\right]. \tag{24}$$

Da (20) segue poi:

$$\sin\beta = \frac{\varrho}{\sin\theta} \tag{25}$$

Le (24), (25), assieme alla (13) e alla (16), danno il moto di C attorno al baricentro con l'ordine di approssimazione di cui si è già detto.

In base alle (18) si riconosce che il modulo della velocità angolare è espresso da:

$$\omega^2 = \frac{a^2}{p_3(0)^2}\sin^2\theta\sin^2\beta(1-\sin^2\theta\sin^2\beta) + p_3(0)^2 \tag{26}$$

La (26), tenuto conto di (20), diviene:

$$\omega^2 = \frac{a^2}{p_3(0)^2}\varrho^2(1-\varrho^2) + p_3(0)^2 = \text{cost.} \tag{27}$$

Si deduce che la precessione è regolare allora e soltanto allora che sia $a = \text{cost.}$, cioè che G sia in quiete. In tal caso, poichè $\overline{M}_G$ non dipende esplicitamente dal tempo, le (18) determinano gli aspetti geometrici del moto a meno di infinitesimi dell'ordine di $p_3(0)^{-2}$ (1).

II) È:

$$\dot{\alpha} r^3 = \text{cost.} \neq 0\,. \tag{28}$$

(1) Vedi [II], 6.

Tale caso si presenta ad esempio se il moto di G è circolare uniforme. Moltiplicando allora ambo i membri di (19) per $\sin\theta \sin\beta$, tenuto conto di $(18)_1$ e (28), si ottiene:

$$\frac{(\sin\theta \sin\beta)^2}{p_3(0)} - \lambda \cos\theta = \text{cost.} = c \tag{29}$$

con c costante, ove si è posto:

$$\frac{2\dot{\alpha} p_3(0)}{a} = \lambda \,. \tag{30}$$

Da (29) si ricava:

$$\sin\beta = \pm \sqrt{\frac{(c + h\cos\theta) p_3(0)}{\sin\theta}} \tag{31}$$

che posta in $(18)_1$ porge:

$$\dot{\theta} = \pm \frac{a}{p_3(0)} \sqrt{(c + h\cos\theta)\left(\frac{1}{p_3(0)} - \frac{c + h\cos\theta}{\sin^2\theta}\right)} \,. \tag{32}$$

La (32) si integra per quadrature ellittiche.

Conclusione. Da quanto detto si deduce che nel caso di una forte velocità angolare iniziale quasi parallela all'asse giroscopico, a meno di infinitesimi di ordine superiore a $p_3(0)^{-1}$, la determinazione del moto di C si riporta all'integrazione del sistema $(14)_1$ e $(14)_3$.

Questo si riporta alle quadrature ogni qualvolta sia $\dot{\alpha} r^3 =$ cost., almeno sotto la condizione (17), la quale implica l'appartenenza della velocità angolare iniziale al piano di $\overline{OG}$ e dell'asse giroscopico, se essi non sono paralleli.

Vale altresì la pena di osservare che, anche se tale condizione non è verificata, l'aspetto puramente geometrico del moto, cioè la successione delle posizioni del giroscopio, è ancora determinato dalle (18) a meno di infinitesimi di ordine superiore a $p_3(0)^{-1}$. Ciò perchè è lecito ai fini della determinazione dei soli aspetti geometrici del moto e nell'ordine di approssimazione considerato, porre comunque uguale a zero l_1 ed l_2 nella (7) [2].

Sussistono pertanto considerazioni analoghe a quelle svolte nei casi I) e II).

(2) Vedi [II], 5.

BIBLIOGRAFIA

[I] E. LEIMANIS, *The general problem of the motion of coupled rigid bodies about a fixed point,* Springer Verlag, Berlin.

[II] F. STOPPELLI, *Sul principio dell'effetto giroscopico,* Giornale di Matematiche del Battaglini, Vol. LXXX (1950), p. 51.

Manoscritto pervenuto in redazione il 9 luglio 1979.