RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

GIORGIO BUSETTO

Proprietà di immersione dei sottogruppi modulari localmente ciclici nei gruppi

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 63 (1980), p. 269-284

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1980__63__269_0>

Rend Sem. Mat. Univ. Padova, Vol. 63 (1980)

Proprietà di immersione dei sottogruppi modulari localmente ciclici nei gruppi.

Giorgio Busetto (*)

Introduzione.

Ricordiamo che un sottogruppo Q di un gruppo G si dice *modulare* in G, e si scriverà $Q \underset{d}{\leqslant} G$, se $(U \vee Q) \wedge V = U \vee (Q \wedge V)$ per ogni $U \leqslant V \leqslant G$ e $(U \vee Q) \wedge V = (U \wedge V) \vee Q$ per ogni $V \leqslant G$, $U \leqslant G$ con $Q \leqslant V$; Q si dice invece *quasinormale* in G, e si scriverà $Q \underset{q}{\leqslant} G$ se $HQ = QH$ per ogni $H \leqslant G$; è chiaro che $Q \underset{q}{\leqslant} G$ implica $Q \underset{d}{\leqslant} G$. Maier e Schmid ([6]) hanno provato che un sottogruppo quasinormale e privo di nocciolo (1) di un gruppo finito G è contenuto nell'ipercentro di G. Tale risultato è ben lontano dall'essere vero in generale nei gruppi infiniti; Gross ([4]) fornisce infatti un esempio in cui il sottogruppo quasinormale e privo di nocciolo Q non è neppure localmente risolubile. Scopo principale del presente lavoro, suddiviso in 3 paragrafi, è provare che invece, nel caso di sottogruppi quasinormali localmente ciclici, risultati di tipo Maier-Schmid continuano a valere in gruppi qualunque. Più precisamente nel primo paragrafo si prova che il teorema di Maier-Schmid continua a valere senza ipotesi sul gruppo per i sottogruppi localmente ciclici periodici; avvalendosi di ciò e di risultati di Stonehewer ([13],

(*) Indirizzo dell'A.: Dipartimento di Matematica, Libera Università degli Studi di Trento, 38050 Povo (Trento).

Lavoro eseguito nell'ambito del GNSAGA del CNR.

(1) Se $Q \leqslant G$, $Q^G = \bigvee_{g \in G} Q^g$, la chiusura normale di Q in G, $Q_G = \bigwedge_{g \in G} Q^g$, il nocciolo di Q in G.

th. E), si prova inoltre che i sottogruppi localmente ciclici periodici modulari sono iperciclicamente immersi (9) nei gruppi privi di fattori di Tarski (2) (cfr. teorema 1.11). Nel secondo paragrafo si dà anzitutto un teorema sulla struttura della chiusura normale Q^G di un sottogruppo localmente ciclico aperiodico modulare Q di un gruppo G supposto privo di fattori di Tarski nel caso che Q non sia quasinormale (cfr. teorema 2.2); inoltre si dimostra, usando i risultati ottenuti nel primo paragrafo, che il gruppo abeliano $T(Q^G)$ costituito dagli elementi periodici di Q^G, è contenuto nell'ipercentro di G se Q è quasinormale (cfr. corollario 2.9); se poi Q è soltanto modulare $T(Q^G)$ è iperciclicamente immerso in G ammesso che G sia privo di fattori di Tarski (cfr. corollario 2.13). Infine nel terzo paragrafo, come applicazione dei risultati ottenuti, si dà una caratterizzazione reticolare della classe dei gruppi iperciclici (9), classe che si sapeva già essere proiettivamente invariante ([15]); tale caratterizzazione generalizza quella data da R. Schmidt per i gruppi supersolubili finiti ([11]).

1. – Il presente paragrafo sarà dedicato allo studio delle proprietà di immersione in un gruppo G dei sottogruppi modulari localmente ciclici periodici.

All'uopo cominciamo col ricordare, per comodità del lettore, una ben nota proposizione:

1.1 Proposizione. *Sia π un insieme di numeri primi e sia Q un π-sottogruppo localmente nilpotente periodico quasinormale di G. Allora la sua chiusura normale Q^G (1) è un π-gruppo periodico localmente nilpotente.*

Dim. Q è ascendente in G ([12], th. A). La conclusione segue allora da [9], th. 2.31, vol. 1.

1.2 Lemma. *Sia Q un sottogruppo localmente ciclico di un gruppo $G = \langle Q, g_1, \ldots, g_n \rangle$, $n < \infty$. Se Q è modulare in G e G è privo di fattori di Tarski (2) se Q non è quasinormale, risulta $|Q^G:Q_G|$ (3) $\neq 0$.*

Dim. Risulta $|Q^G:Q| \neq 0$ ([13], coroll. 4.3. Si osservi che, per i sottogruppi quasinormali, la dimostrazione di tale corollario vale senza

(2) Un gruppo T si dice di Tarski se è un gruppo infinito in cui tutti i sottogruppi propri hanno ordine primo. Un gruppo G si dice privo di fattori di Tarski se non compaiono gruppi di Tarski come quozienti di sottogruppi di G.

(3) Se $H \leqslant G$ l'indice $|G:H|$ di H in G si assumerà di essere zero se $|\{gH | g \in G\}| \geqslant \aleph_0$.

l'ipotesi che G sia privo di fattori di Tarski) e quindi Q^G/Q_G è periodico di esponente finito. Pertanto il gruppo localmente ciclico Q/Q_G deve essere finito e dunque come volevasi $|Q^G:Q_G| \neq 0$.

1.3 Lemma. *Sia G un gruppo e Q un sottogruppo quasinormale ma non normale di G di ordine primo p. Allora Q^G è contenuto nel centralizzante $C_G(\langle x \in G|\ |x|$ (4) $= 0\rangle \vee O^p(G)$ (5)).*

Dim. Sia $x \in G$ con $(|x|, p) = 1$ oppure $|x| = 0$; allora x appartiene al normalizzante $N_G(Q^g)$ per ogni $g \in G$, nel primo caso perchè un sottogruppo di Sylow quasinormale di un gruppo finito è normale, nel secondo caso per [12], lemma 2.1. Poichè $Q \ntriangleleft G$, esiste dunque un p-elemento $y \in G \setminus N_G(Q)$. Ai nostri fini non sarà restrittivo supporre $G = \langle Q, y, x\rangle$. Posto $T = \langle Q, y\rangle = Q\langle y\rangle$, T è un p-gruppo e da $Q^G = Q^T$ e da [3], lemma 3.1, segue che Q^G è abeliano elementare d'ordine p^2 e $Q_1 = Q^G \wedge \langle y\rangle$ è di ordine p e si ha $y \in C_G(Q_1)$. Il numero dei sottogruppi di ordine p di Q^G è $p+1$ e il numero dei coniugati di Q in G è dato da $|T:N_T(Q)| = p$. Quindi Q_1 è l'unico sottogruppo di ordine p di Q^G normalizzato da y. I coniugati di Q sono quasinormali in G, pertanto $x \in N_G(Q^g)$ per ogni $g \in G$, e quindi $x \in N_G(Q_1)$. Si consideri yx; deve risultare $p|\ |yx| \neq 0$, in quanto $y \notin N_G(Q)$. Se $\langle z\rangle$ è il p-sottogruppo di Sylow di $\langle yx\rangle$, risulta $Q^G = Q^T = Q^{\langle Q, z\rangle}$. Come prima risulta $|Q^G \wedge \langle z\rangle| = p$ e quindi $|Q^G \wedge \langle yx\rangle| = p$. Posto $Q_2 = Q^G \wedge \langle yx\rangle$, è $yx \in C_G(Q_2)$ e così $y \in N_G(Q_2)$. Ma l'unico sottogruppo di ordine p di Q^G normalizzato da y è Q_1, per cui $Q_2 = Q_1$. Pertanto $\langle yx, y\rangle \leqslant C_G(Q_1)$ e quindi $x \in C_G(Q_1)$. Poichè x induce un automorfismo potenza su Q^G, ne segue $x \in C_G(Q^G)$.

Come conseguenza di 1.3 si ha il seguente corollario:

1.4 Corollario. *Sia G un gruppo e Q un sottogruppo quasinormale ma non normale di G di ordine primo p. Allora Q^G è contenuto nel secondo centro $Z_2(G)$ di G.*

Dim. Q^G normalizza i p-sottogruppi di G, e centralizza $O^p(G) \vee \langle x \in G|\ |x| = 0\rangle$ (1.3). Pertanto Q^G è contenuto nella norma $N(G)$ (6) di G. Ma $N(G) \leqslant Z_2(G)$ ([10]).

(4) Il periodo $|x|$ di un elemento x di un gruppo G si assumerà essere zero se $\langle x\rangle$ è ciclico infinito.

(5) $O^p(G) = \langle x \in G | p \nmid |x| \text{ e } |x| \neq 0\rangle$.

(6) $N(G) = \bigwedge_{H \leqslant G} N_G(H)$.

1.5 Osservazione. *Sia Q un sottogruppo localmente ciclico modulare in G e G sia privo di fattori di Tarski se Q non è quasinormale, e sia p un primo. Detto $d(Q)$ il massimo sottogruppo p-divisibile di Q risulta $d(Q) \trianglelefteq G$. Infatti $|Q/Q_{\langle Q,x\rangle}| < \infty$ per ogni $x \in G$ (1.2); poichè $d(Q)Q_{\langle Q,x\rangle}/Q_{\langle Q,x\rangle}$ è p-divisibile, si deve avere $d(Q) \leqslant Q_{\langle Q,x\rangle}$. Ma allora $d(Q) \leqslant \bigwedge_{x\in G} Q^x$ e quindi $d(Q) \trianglelefteq G$. In particolare, se $Q_G = \langle 1\rangle$, allora Q è privo di sottogruppi p-divisibili.*

Prima di continuare la nostra analisi diamo alcuni criteri che ci serviranno a garantire la quasinormalità di certi sottogruppi contenuti in sottogruppi quasinormali.

Un primo criterio, d'altronde probabilmente noto, è il seguente, che generalizza un risultato di Itô e Szép ([5], cor. 1).

1.6 Proposizione. *Sia Q un sottogruppo quasinormale periodico di un gruppo G e A un sottogruppo normale di Q tale che gli ordini degli elementi di A sono coprimi con gli ordini degli elementi di Q/A. Allora A è quasinormale in G.*

Dim. Sia $\pi = \{q | q$ è un primo ed esista $a \in A$ di ordine $q\}$. Sia poi $x \in G$. Se $|x| = 0$, allora $x \in N_G(Q)$ ([12], lemma 2.1) e perciò $x \in N_G(A)$, dato che A è caratteristico in Q. Possiamo quindi supporre $|x| \neq 0$, anzi $|x| = p^m$, ove p è un primo.
Distinguiamo 2 casi:

a) $p \notin \pi$. $|Q^g\langle x\rangle : Q^g|$ divide p^m per ogni $g \in G$, onde $Q/Q_{\langle Q,x\rangle}$ è un p-gruppo, per cui $A \leqslant Q_{\langle Q,x\rangle}$ e $x \in N_G(A)$.

b) $p \in \pi$. Essendo Q subnormale in $Q\langle x\rangle$ (Q è ascendente ([12], th. A) e di indice finito in $Q\langle x\rangle$), tale è A. Pertanto $A^{\langle Q,x\rangle}$ è un π-gruppo ([9], th. 2.31, vol. 1) e quindi $\langle A, x\rangle$ è un π-gruppo. Pertanto $\langle A, x\rangle \wedge Q = A \underset{q}{\leqslant} A\langle x\rangle$.

Un altro criterio è poi dato dalla seguente proposizione:

1.7 Proposizione. *Sia Q un sottogruppo quasinormale ciclico di un gruppo G. Allora ogni sottogruppo di Q è quasinormale in G.*

La proposizione 1.7, di cui non è difficile dare una dimostrazione diretta, è anche una facile conseguenza di un risultato di Nakamura ([7]), che afferma che se un sottogruppo quasinormale di un gruppo finito G è dotato di un solo sottogruppo normale massimale M, allora M è quasinormale in G, ed è anche un caso particolare del seguente interessante criterio non pubblicato, dovuto a Napolitani; l'autore ci ha gentilmente concesso di riportarlo qui con relativa dimostrazione.

1.8 PROPOSIZIONE (Napolitani). *Se H e K sono sottogruppi quasinormali di un gruppo G e se $K = H\langle x\rangle$, allora ogni sottogruppo T di G tale che $H \leqslant T \leqslant K$ è quasinormale in G.*

DIM. Si osservi innanzitutto che per ogni $n \in \mathrm{N}$ tale che n divide $|K:H|$ esiste ed è unico $H \leqslant L \leqslant K$ tale che $|K:L| = n$; sia infatti $\langle x\rangle \wedge H \leqslant \langle z\rangle \leqslant \langle x\rangle$ l'unico sottogruppo di $\langle x\rangle$ tale che $|\langle x\rangle : \langle z\rangle| = n$; posto $L = H\langle z\rangle$, si ha $|K:L| = |\langle x\rangle : \langle z\rangle| = n$; l'unicità di L discende dalla unicità di $\langle z\rangle$.

Sia ora $H \leqslant T \leqslant K$. È sufficiente provare che $ST = TS$ per ogni sottogruppo $S = \langle H, y\rangle$ di G con $|S:H| = p^n$ o 0, p un primo.

Se $S \leqslant K$, allora $S = H(S \wedge \langle x\rangle)$. Da $T = H(T \wedge \langle x\rangle)$ segue $ST = H(S \wedge \langle x\rangle)(\langle x\rangle \wedge T)H = H(T \wedge \langle x\rangle)(S \wedge \langle x\rangle)H = TS$. In particolare T è quasinormale in K, e quindi ascendente in G.

Poichè $H^S \leqslant S$ è quasinormale in G, sostituendo eventualmente ai gruppi H, T, K rispettivamente i gruppi H^S, TH^S (7), KH^S, si può supporre $H \trianglelefteq S$. Posto $J = KS$, distinguiamo due casi:

a) $|S:H| = p^n$.

Supponiamo dapprima $|K:H| \neq 0$.

Poichè $T = H(\langle x\rangle \wedge T) = \bigvee_i (\langle x_i\rangle \wedge T)H$, ove gli $\langle x_i\rangle \wedge T/\langle x\rangle \wedge H$ sono i sottogruppi di Sylow di $\langle x\rangle \wedge T/\langle x\rangle \wedge H$, è sufficiente provare che $ST = TS$ quando $|T:H| = q^m$, q primo. Poichè K/K_J è un p-gruppo, se $q \neq p$ risulta $H \leqslant T \leqslant K_J$ e allora S normalizzando H e K_J, normalizza anche T per l'osservazione iniziale, per cui $ST = TS$. Supponiamo allora $q = p$ e supponiamo anzitutto che T coincida con l'unico sottogruppo $B \geqslant H$ di K tale che $|B:H|$ è potenza di p e p non divide $|K:B|$. Allora, poichè $|J/H_J| < \infty$, per Maier-Schmid ([6]) $H/H_J \leqslant Z_\infty(J/H_J)$ per cui $T/H_J = P/H_J \times M/H_J$ ove P/H_J e M/H_J sono rispettivamente il p-sottogruppo di Sylow e il p'-sottogruppo di Hall di T/H_J e $M \underset{q}{\leqslant} J$ in virtù di 1.6 applicata a H/H_J. Inoltre $P \trianglelefteq T$ e T è subnormale in J (T è ascendente e di indice finito in J); ma P/H_J è di Sylow in

(7) $(TH^S)S = T(H^S S) = TS$.

K/H_J e pertanto $P/H_J \trianglelefteq K/H_J$; ancora dalla proposizione 1.6 segue $P \underset{q}{\leqslant} J$ e quindi $T = PM \underset{q}{\leqslant} J$.

Sia ora $T \leqslant B = H(\langle x \rangle \wedge B) \underset{q}{\leqslant} J$. Sostituendo B con K se $B \neq K$, si può supporre $|K:H|$ potenza di p, e quindi anche, passando eventualmente al quoziente modulo H_J che J sia un p-gruppo finito. Sia ora $J \geqslant R \geqslant S$ tale che $|J:R| = |J|/|ST|$. Allora $R = (KS \wedge R) = (K \wedge \wedge R)S$; essendo $[K/H]$ (8) una catena, sarà $R = (K \wedge R)S = TS$ e pertanto T è permutabile con S.

Supponiamo ora invece $|K:H| = 0$.

Sará $H \trianglelefteq J$ ([12], lemma 2.1) ed essendo K_J/H normale in J/H e ciclico, si avrá $T \wedge K_J \trianglelefteq J$; escludendo il caso banale $H = T$ si ha $|K:T \wedge K_J| \neq 0$ ed assumendo $H = T \wedge K_J$ si è così ricondotti al caso precedente in cui H ha indice finito in K.

b) $|S:H| = 0$. Se $|K:H| \neq 0$, allora $|J:K| = 0$. Pertanto $K \trianglelefteq J$ e perciò $T \trianglelefteq TS$. Se $|K:H| = 0$, allora $H \trianglelefteq J$ ([12], lemma 2.1); si ha $K \trianglelefteq J$ e quindi $T \trianglelefteq J$ se $K \wedge S = H$; se invece $K \wedge S \neq H$, allora $|J:(K \wedge S)_J| \neq 0$ e si è ricondotti al caso *a*).

Tenendo conto di 1.5, 1.6, 1.7 si perviene al seguente corollario:

1.9 Corollario. *Sia Q un sottogruppo quasinormale periodico localmente ciclico di un gruppo G. Allora ogni sottogruppo di Q è quasinormale in G.*

1.10 Lemma. *Sia Q un sottogruppo quasinormale periodico localmente ciclico di un gruppo G, $M \leqslant Q$ e $x \in Q$. Allora $\langle x \rangle^G$ ha esponente $|x|$ e pertanto QM^G/M^G è non identico se $M \neq Q$. Inoltre, se Q ha nocciolo identico in G, identico è pure il nocciolo di QM^G/M^G in G/M^G.*

Dim. Da 1.1 e 1.9 segue che Q^G risulta essere il prodotto diretto discreto delle chiusure normali dei sottogruppi di Sylow di Q. Ci si può quindi ricondurre facilmente al caso che Q sia un p-gruppo, ove p è un primo. Per la prima parte si usi poi induzione su $|x|$ e il fatto che $\langle x \rangle$ è quasinormale in G. Per la seconda parte si osservi che, per l'osservazione 1.5 Q è un p-gruppo finito e che, per induzione su $|Q|$, si conclude se il risultato è vero per $M = \Omega_1(Q) \neq Q$. In tale caso, posto $H = M^G$, risulta $H \leqslant Z_2(G)$ (1.4) quindi $M^g Z(G) \trianglelefteq G$ se $g \in G$. Da $M^g \wedge$

(8) Se $H \leqslant K$, con $[K/H]$ si denota il reticolo dei sottogruppi di K contenenti H.

$\wedge Z(G) = \langle 1 \rangle$, segue $H = M^g \times (H \wedge Z(G))$. Sia N/H il nocciolo di QH/H in G/H. Allora $N = H(Q^g \wedge N) = (H \wedge Z(G)) \times (Q^g \wedge N)$. Dato che Q è privo di nocciolo, N risulta così essere un prodotto subdiretto di p-gruppi abeliani elementari e quindi ha esponente p, perciò $N = H$.

Siamo ora in grado di provare il risultato centrale del presente paragrafo:

1.11 Teorema. *Dato un gruppo G, sia Q un sottogruppo periodico localmente ciclico privo di nocciolo e modulare in G.*

a) Se Q è quasinormale in G, allora $Q^G \leqslant Z_\omega(G)$, l'$\omega$-ipercentro di G.

b) Se G è privo di fattori di Tarski, allora Q^G è ipercliclicamente immerso [9] *in G.*

Dim. *a)* È sufficiente provare che la chiusura normale di ogni sottogruppo di Sylow di Q è contenuta nell'ω-ipercentro di G, per cui non sarà restrittivo supporre $\langle 1 \rangle \neq Q$ essere un p-gruppo e per 1.5 sarà $|Q| = p^n$. Mostriamo che $Q^G \leqslant Z_{2n}(G)$ usando induzione su n, la cosa essendo vera per $n = 1$ in virtù di 1.4. Posto $L = (\Omega_{n-1}(Q))^G$, per l'induzione $L \leqslant Z_{2(n-1)}(G)$. Da 1.10 segue che QL/L ha ordine p ed è privo di nocciolo in G/L. Da 1.4 si ricava $Q^G/L \leqslant Z_2(G/L)$, per cui $Q^G \leqslant Z_{2+2(n-1)}(G) = Z_{2n}(G)$.

b) Se $Q \underset{q}{\leqslant} G$, G ha la Schmidt-struttura [10] rispetto a Q ([13], Th. E), quindi $G = A \times B$ ove A è un prodotto diretto discreto di P-gruppi [10] non abeliani di Hall in G, $Q^G = A \times K^G$, ove $K = Q \wedge B$ è quasinormale in G. $K^G \leqslant Z_\omega(G)$ per *a)* e inoltre A è chiaramente ipercliclicamente immerso in G. Quindi tale è Q^G.

1.12 Osservazione. *Sia Q un sottogruppo di G periodico localmente ciclico quasinormale e privo di nocciolo in G, e sia Q_p il p-sottogruppo di Sylow di Q con $|Q_p| = p^{n_p}$. Se esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $n \geqslant n_p$ per ogni p, la dimostrazione di* 1.11 *a) dice anche che $Q^G \leqslant Z_{2n}(G)$, il $2n$-esimo centro di G.*

[9] Se $K \leqslant H$ sono sottogruppi normali di un gruppo G, H/K si dice ipercliclicamente immerso in G se e solo se per ogni $N \trianglelefteq G$, con $K \leqslant N < H$, H/N contiene un sottogruppo ciclico C/N non identico e normale in G/N. Un gruppo G si dice iperciclico se G è ipercliclicamente immerso in G.

[10] Per la definizione di Schmidt-struttura e di P-gruppo si rimanda a [13].

1.13 Osservazione. *In 1.2 e in 1.11 b) non si può tralasciare l'ipotesi che G sia privo di fattori di Tarski, i gruppi di Tarski fornendo dei controesempi.*

2. – Passiamo ora allo studio delle proprietà di immersione in un gruppo G dei sottogruppi modulari localmente ciclici aperiodici.

2.1 Lemma. *Sia G un gruppo e Q un sottogruppo modulare localmente ciclico aperiodico di G e si abbia $G = \langle Q, g\rangle$. Se G è privo di fattori di Tarski nel caso che Q non sia quasinormale, sono verificati i seguenti fatti:*

i) $T(Q^G)$ (11) *è un gruppo ciclico finito.*

ii) $Q^G = QT(Q^G) = Q \vee Q^g$.

iii) *Se* $|g| \neq 0$ *e* $g \in C_G(P)$ *ove* $P \leqslant Q$ *e* $|Q:P| \neq 0$ *allora* $\langle g\rangle = T(G)$.

iv) $T(Q^G) \leqslant Z_n(G)$ *per qualche* $n \in \mathbf{N}$ *se Q è quasinormale in G.*

Dim. i) è $|Q^G/Q_G| < \infty$ per 1.2. Poichè $Q_G \leqslant Z(Q^G)$, il derivato $(Q^G)'$ di Q^G è un gruppo finito ([9], Th. 4.12, vol. 1) e pertanto $T(Q^G)$ è un sottogruppo periodico di G. Da $[T(Q^G)/\langle 1\rangle] \simeq [T(Q^G)Q/Q] \simeq \leqslant [Q \vee \vee \langle g\rangle/Q] \simeq [\langle g\rangle/\langle g\rangle \wedge Q]$ segue che $T(Q^G)$ è ciclico.

ii) È $(Q^G)' \leqslant T(Q^G)$ (vedi i); pertanto $Q^G/T(Q^G)$ è un gruppo abeliano senza torsione ed è anche localmente ciclico in quanto il gruppo localmente ciclico $Q_G T(Q^G)/T(Q^G)$ vi ha indice finito. Dunque $Q^G/Q_G T(Q^G)$ è ciclico e pertanto $QT(Q^G) \trianglelefteq G$ da cui $Q^G = QT(Q^G)$. La seconda uguaglianza deriva poi facilmente dalla prima e da i).

iii) È $P \leqslant Z(G)$ e, per 1.2, $|G:P| \neq 0$. Pertanto $|G'| < \infty$ e ciò implica che $T(G)$ è un sottogruppo periodico di G e da $[T(G)/\langle 1\rangle] \simeq \simeq [QT(G)/Q] \simeq \leqslant [Q \vee \langle g\rangle/Q] \simeq [\langle g\rangle/\langle g\rangle \wedge Q] = [\langle g\rangle/\langle 1\rangle]$ segue $T(G) = = \langle g\rangle$ visto che $\langle g\rangle \leqslant T(G)$.

iv) $Q^G/Q_G \leqslant Z_n(G/Q_G)$ per qualche $n < \infty$ (1.12). Quindi $T(Q^G)\cdot \cdot Q_G/Q_G \leqslant Z_n(G/Q_G)$. Ma Q_G è aperiodico e $T(Q^G)$ periodico, perciò $T(Q^G) \leqslant \leqslant Z_n(G)$.

Il seguente teorema dà informazioni sulla chiusura normale dei sottogruppi modulari localmente ciclici aperiodici.

(11) Se G è un gruppo, con $T(G)$ si denota il sottogruppo di G generato dagli elementi di G di periodo non nullo.

2.2 Teorema. *Dato un gruppo G, sia Q un sottogruppo localmente ciclico aperiodico modulare in G e G sia privo di fattori di Tarski se Q non è quasinormale. Allora $T(Q^G)$ è un gruppo abeliano su cui Q induce automorfismi potenza, $Q^G = QT(Q^G)$ e inoltre, se Q è quasinormale in G, Q^G è un gruppo modulare* ([12]).

Dim. Sia $t \in Q^G$ con $|t| \neq 0$; allora esiste $K \leqslant G$, K finitamente generato modulo Q^g, tale che $Q^g \leqslant K$ e $t \in (Q^g)^K$. Da 1.2 segue $|(Q^g)^K/(Q^g)_K| < \infty$. Inoltre $(Q^g)_K \leqslant Z((Q^g)^K)$. Pertanto, applicando 1.2 iii) al gruppo $\langle Q^g, t\rangle$, si ha $\langle t\rangle = T(\langle Q^g, t\rangle)$ e perciò $Q^g \leqslant N_G(\langle t\rangle)$. Dunque $\langle t\rangle \trianglelefteq Q^G$. Inoltre data la modularità di Q^g in G, Q^g non può indurre l'automorfismo inversione su un sottogruppo ciclico di ordine 4 di $T(Q^G)$; ne segue che $T(Q^G)$ è abeliano. Da 2.1 ii) segue subito $Q^G = QT(Q^G)$. Se poi Q è quasinormale in G, da $T(Q^G) = \bigvee_{g,h\in G} T\big((Q^h)^{\langle Q^h, g\rangle}\big)$ e da 2.1 iv) segue che Q induce p-automorfismi potenza sui p-sottogruppi di $T(Q^G)$ per ogni primo p e quindi Q^G è un gruppo modulare ([14], th. 17, cap. 1).

2.3 Lemma. *Sia Q un sottogruppo quasinormale localmente ciclico aperiodico di un gruppo G, tale che $|Q/Q_G| = p^n$, ove p è un primo. Allora $T(Q^G)$ è un p-gruppo e* $\exp T(Q^G) = p^n$.

Dim. La prima affermazione discende da 1.1. Poichè $[Q/Q_G]$ è una catena, esiste $x \in G$ tale che $Q_G = Q \wedge Q^x$. Inoltre $T(Q^G) = \bigvee_{g,h\in G} T(Q^h \vee Q^{hg})$ ed è abeliano (2.1 ii), 2.2). Pertanto è sufficiente provare che $|T(Q \vee \vee Q^g)| = |Q/Q \wedge Q^g|$ per ogni $g \in G$. Risulta $[T(Q \vee Q^g)/\langle 1\rangle] \simeq [Q^g T(Q \vee \vee Q^g)/Q^g] = [Q \vee Q^g/Q^g] \simeq [Q/Q \wedge Q^g]$. Poichè l'ordine di un p-gruppo ciclico è individuato dal reticolo dei suoi sottogruppi, si conclude.

2.4 Lemma. *Sia Q un sottogruppo quasinormale localmente ciclico aperiodico di un gruppo G, e sia $Q \leqslant H \leqslant G$ tale che $|Q/Q_H| = p^n$. Sia $R/Q_H = \Omega_r(Q/Q_H)$, $r \leqslant n$ e sia $N \trianglelefteq G$ tale che $T(R^H) \leqslant N \leqslant T(Q^G)$ con N p-gruppo di esponente p^r. Denotati con $^-$ i quozienti modulo N, risulta* $|\bar{Q}/\bar{Q}_{\bar{H}}| = p^{n-r}$.

Dim. R è quasinormale in H (1.9), pertanto $R^H = RT(R^H)$ (2.2), e perciò $\bar{R} \trianglelefteq \bar{H}$ onde $\bar{R} \leqslant \bar{Q}_{\bar{H}}$. Poichè $\exp T(R^H) = p^r = \exp N$ e $\exp T(Q^H) = p^n$ (2.3), ne segue $\exp T(\bar{Q}^{\bar{H}}) = p^{n-r}$ e quindi ancora da 2.3 si ricava che $\bar{Q}/\bar{R}$ è privo di nocciolo in $\bar{H}/\bar{R}$ e pertanto $\bar{R} = \bar{Q}_{\bar{H}}$.

([12]) Un gruppo G si dice modulare se il reticolo $L(G)$ dei sottogruppi di G è un reticolo modulare.

Un primo risultato sull'immersione è la seguente proposizione, che fornisce una stima migliore di quella data da 1.12.

2.5 Proposizione. *Sia Q un sottogruppo quasinormale localmente ciclico aperiodico di un gruppo G tale che $|Q/Q_G| = p^n$, $n \geqslant 1$. Allora $T(Q^G) \leqslant Z_n(G)$.*

Dim. Facciamo induzione su n. Se $n = 1$ allora $Q^G/Q_G \leqslant Z_2(G/Q_G)$ (1.4). Posto allora $A/Q_G = Z(G/Q_G) \wedge Q^G/Q_G$, risulta $(Q/Q_G)(A/Q_G) \trianglelefteq G/Q_G$ e perciò $Q^G/Q_G = (Q/Q_G)(A/Q_G)$. Quindi $|Q^G : A| = p$. Poichè $Q^G = QT(Q^G)$, posto $B = Q_G T(Q^G)$, risulta $|Q^G : B| = p$. Inoltre $A \trianglelefteq G$, $B \trianglelefteq G$. Se $A \neq B$, allora $AB = Q^G$ e $|A/A \wedge B| = p = |B/A \wedge B|$. Poichè $A \wedge B \geqslant Q_G$, risulta $Q^G/A \wedge B \leqslant Z(G/A \wedge B)$, ma ciò è assurdo, essendo Q una chiusura normale. Quindi $A = B$ e $[T(Q^G), G] \leqslant Q_G \wedge T(Q^G) = \langle 1 \rangle$. Sia ora $n \geqslant 1$. Posto $L/Q_G = \Omega_1(Q/Q_G)$, L è quasinormale in G, e denotati con $^-$ i quozienti modulo $T(L^G)$, da 2.4 segue $|\bar{Q}/\bar{Q}_{\bar{G}}| = p^{n-1}$ e quindi, per induzione, $T(\bar{Q}^{\bar{G}}) \leqslant Z_{n-1}(\bar{G})$. Pertanto $[T(Q^G), \underbrace{G, G, \dots, G}_{n-1}] \leqslant T(L^G) \leqslant Z(G)$ e si conclude.

2.6 Corollario. *Sia Q un sottogruppo quasinormale localmente ciclico aperiodico di un gruppo $G = \langle Q, g_1, \dots, g_n \rangle$. Allora $T(Q^G) = \bigvee_{i=1}^{n} T(Q^{G_i})$ ove $G_i = \langle Q, g_i \rangle$ e pertanto $T(Q^G)$ ha rango al più n.*

Dim. Si può supporre $|Q/Q_G| = p^m$, ove p è un primo. Facciamo induzione su m. Supponiamo dapprima $m = 1$. Facciamo induzione su n. Se $n = 1$ allora $T(Q^G)$ è ciclico. Sia allora $n \geqslant 1$. Possiamo supporre $|Q/Q_{G_n}| = p$. Sia $R = \langle Q, g_1, \dots, g_{n-1} \rangle$. Per induzione su n si ha $T(Q^R) = \bigvee_{i=1}^{n-1} T(Q^{G_i})$. Inoltre $T(Q^R)T(Q^{G_n}) \leqslant Z(G)$ (2.5). Pertanto $QT(Q^R)T(Q^{G_n}) \trianglelefteq G$ e quindi $T(Q^G) = \bigvee_{i=1}^{n} T(Q^{G_i})$.

Sia ora $m \geqslant 1$ e sia $L/Q_G = \Omega_1(Q/Q_G)$. L è quasinormale in G. Posto $K = \langle L, g_1, \dots, g_n \rangle$, $K_i = \langle L, g_i \rangle$, $i = 1, \dots, n$, risulta $L^G = L^K$ e $L^{G_i} = L^{K_i}$. Si è provato che $T(L^G) = \bigvee_{i=1}^{n} T(L^{G_i})$. Denotati con $^-$ i quozienti modulo $T(L^G)$, risulta $|\bar{Q}/\bar{Q}_{\bar{G}}| = p^{m-1}$ (2.4). Dall'induzione $T(\bar{Q}^{\bar{G}}) = \bigvee_{i=1}^{n} T(\bar{Q}^{\bar{G}_i})$ e così $T(Q^G) = \bigvee_{i=1}^{n} T(Q^{G_i})T(L^G)$; ma $\bigvee_{i=1}^{n} T(Q^{G_i}) \geqslant \bigvee_{i=1}^{n} T(L^{G_i}) = T(L^G)$ e si conclude.

2.7 Proposizione. *Sia* $Q \leqslant G$ *un sottogruppo quasinormale localmente ciclico aperiodico, e sia* $Q \leqslant B \leqslant G$ *tale che* $Q_B \neq \langle 1 \rangle$. *Sia* p *un primo e* R/Q_B *un* p*-sottogruppo di* Q/Q_B (R/Q_B *è un* p*-gruppo finito per* 1.5) *e* $|R/Q_B| = p^n$. *Allora* $T(R^B) \leqslant Z_{2n}(G)$.

Dim. $R \underset{q}{\leqslant} B$. Da 2.6 discende che $T(R^B) = \bigvee_{b \in B} T(R^{\langle Q,b\rangle})$; è quindi sufficiente provare che $T(R^{\langle Q,b\rangle}) \leqslant Z_{2n}(G)$, $b \in B$. Poichè $|RQ_{\langle Q,b\rangle}/Q_{\langle Q,b\rangle}|$ divide $|R/Q_B|$ e risulta $T(R^{\langle Q,b\rangle}) = T((RQ_{\langle Q,b\rangle})^{\langle Q,b\rangle})$, si può supporre $B = \langle Q, g\rangle$, $g \in G$. Sia $\langle a \rangle = A = T(R^B)$; $|A| = p^n$ (2.3). Sia $H \leqslant G$ con $H \geqslant B$ e finitamente generato modulo B. Proviamo che $A \leqslant Z_{2n}(H)$ facendo induzione su n. Supponiamo dapprima $n = 1$ e sia $Q/Q_H = L/Q_H \times L_1/Q_H$, ove L/Q_H è il p-sottogruppo di Sylow di Q/Q_H. Allora $T(Q^H) = T(L^H) \times T(L_1^H)$, ove $T(L^H)$ è il p-sottogruppo di Sylow di $T(Q^H)$ (2.3). Da $R \leqslant LQ_B$, segue $A \leqslant T(L^B)$. Dato che $[L/Q_H]$ è una catena, esiste $h \in H$ tale che $Q_H = L_{\langle Q,h\rangle}$, proviamo che $[A, \langle h \rangle] \leqslant Z(H)$. Posto $M = \langle L, g, h\rangle$ essendo L quasinormale in $H \geqslant M$, $T(L^M)$ è un p-gruppo abeliano di rango al più 2 (2.3, 2.6) e $T(L^M) \geqslant T(L^B) \geqslant A$. Inoltre posto $C = T(S^M)$ ove $S/L_M = \Omega_1(L/L_M)$, si ha $|C| \leqslant p^2$ e $C \leqslant Z(H)$ (2.5). Risulta anche $A \leqslant Z_r(M)$ per qualche r (2.5). Pertanto da $[A, \langle h\rangle] \leqslant AC$, segue $[A, \langle h \rangle] \leqslant C \leqslant Z(H)$. Sia ora $x \in H$. Se $L_{\langle Q,x\rangle} = Q_H$, si è visto che $[A, \langle x\rangle] \leqslant Z(H)$. Altrimenti risulta $L_{\langle Q,xh\rangle} = Q_H$; se infatti $L_{\langle Q,xh\rangle} > Q_H$ si avrebbe $L_{\langle Q,h\rangle} \geqslant L_{\langle Q,xh,x\rangle} > Q_H$, impossibile. Da $[xh, a] = [x, a]^h[h, a]$ segue pertanto $[x, a] \in Z(H)$ e quindi $A = \langle a \rangle \leqslant Z_2(H)$, data l'arbitrarietà di x. Sia ora $n \geqslant 1$ e sia $N = (T(P^B))^H$, ove $P/Q_B = \Omega_1(R/Q_B)$. Poichè $P \geqslant Q_H$ si ha $P \underset{q}{\leqslant} H$ e, per quanto si è appena visto, si ha $N \leqslant Z_2(H)$. Denotati con $^-$ i quozienti di H modulo N, si ha $|\bar{R}/\bar{R}_{\bar{B}}| = p^{n-1}$ (2.4). Per l'induzione $T(\bar{R}^{\bar{B}}) \leqslant Z_{2(n-1)}(\bar{H})$. Ma allora $T(R^B) \leqslant Z_{2(n-1)+2}(H) = Z_{2n}(H)$. Poichè H è un qualunque sottogruppo di G contenente B e finitamente generato modulo B, si ha $T(R^B) \leqslant Z_{2n}(G)$.

2.8 Osservazione. *Sia* Q *un sottogruppo quasinormale localmente ciclico aperiodico di un gruppo* G. *Detto* T *il* p*-sottogruppo di Sylow di* $T(Q^G)$, *se* $\exp T = p^s < \infty$, *allora* $T \leqslant Z_s(G)$. *Infatti da* 2.3, 2.5 *segue che per ogni* $Q \leqslant K \leqslant G$ *tale che* $Q_K \neq \langle 1 \rangle$, *il* p*-sottogruppo di Sylow di* $T(Q^K)$ *è contenuto in* $Z_s(K)$. *Ne segue* $T \leqslant Z_s(G)$.

La proposizione 2.7 dà come corollario il seguente:

2.9 Corollario. *Sia* Q *un sottogruppo quasinormale localmente ciclico aperiodico di un gruppo* G. *Allora* $T(Q^G) \leqslant Z_\omega(G)$.

DIM. Sia x un p-elemento di $T(Q^G)$. Esiste $K \leqslant G$, $K \geqslant Q$ e finitamente generato modulo Q tale che $x \in T(R^K)$, ove R/Q_K è un p-sottogruppo di Q/Q_K Da 2.7 segue $x \in Z_{2n}(G)$ per qualche n.

2.10 OSSERVAZIONE. *In generale, se Q è un sottogruppo quasinormale localmente ciclico aperiodico di un gruppo G, non è vero che $Q^G \leqslant$ $\leqslant Z_\infty(G)$, anche se Q non è normale, come prova il seguente facile esempio.*

Sia $G = \langle c, b | \; |c| = 0, \; |b| = 2^n, \; b^{-1}cb = c^{-1}\rangle$. Posto $a = cb^2$, risulta $|a| = 0$, $\langle a \rangle$ quasinormale in G e $|\langle a \rangle / \langle a \rangle_G| = 2^{n-2}$. Infatti si verifica facilmente che $\langle a \rangle \langle c^i b^j \rangle = G$ se j è dispari, ed è abeliano se j è pari. Poichè inoltre $T(\langle a \rangle^G) = \langle b^4 \rangle$, da 2.3 segue $|\langle a \rangle / \langle a \rangle_G| =$ $= 2^{n-2}$, e $\langle a \rangle \nleqslant Z_\infty(G)$ dato che $b^{-1}ab\langle b^4 \rangle = a^{-1}\langle b^4 \rangle$.

Usando i risultati ottenuti sulle proprietà di immersione dei sottogruppi quasinormali, esaminiamo ora la situazione dei sottogruppi modulari localmente ciclici aperiodici nei gruppi privi di fattori di Tarski.

Verrà usato nel seguito il seguente ben noto risultato:

2.11 PROPOSIZIONE. *Ogni sottogruppo di un sottogruppo localmente ciclico periodico, privo di nocciolo e modulare in un gruppo G privo di fattori di Tarski, è modulare in G.*

DIM. Discende facilmente da [13], th. E e da 1.9.

2.12 PROPOSIZIONE. *Sia G un gruppo privo di fattori di Tarski e Q un sottogruppo di G localmente ciclico aperiodico modulare in G. Siano $H \geqslant Q$, $K \geqslant Q$ due sottogruppi di G tali che $Q_H \neq \langle 1 \rangle$, $Q_K \neq \langle 1 \rangle$ e siano $R/Q_H \neq \langle 1 \rangle$, $S/Q_K \neq \langle 1 \rangle$ due p-sottogruppi di Q/Q_H e Q/Q_K rispettivamente, con $|S/Q_K| = p^{n_s}$. Allora:*

i) *Se R è quasinormale in H, allora S è quasinormale in K, $T(S^K) \leqslant Z_{2n_s}(G)$ e il p-sottogruppo di Sylow A di $T(Q^G)$ è contenuto in $Z_\omega(G)$; se inoltre* $\exp A = p^m < \infty$ *risulta $A \leqslant Z_m(G)$.*

ii) *Se R non è quasinormale in H, allora S non è quasinormale in K (si osservi che R e S sono certamente modulari rispettivamente in H e K per* 2.11), *$n = 1$, $T(R^H)T(S^K)$ è un q-gruppo abeliano elementare ove q è un primo e p divide $q - 1$, e il q-sottogruppo di Sylow B di $T(Q^G)$ è un gruppo abeliano elementare su cui G induce un gruppo di ordine p di automorfismi potenza.*

DIM. Sia $M\leqslant G$, $M = H\vee K\vee W$, con $W\geqslant Q$ finitamente generato modulo Q. Poichè $Q/Q_H\wedge Q_K\wedge Q_W$ è privo di sottogruppi divisibili (1.5), tali risultano essere i gruppi localmente ciclici periodici $Q_H/Q_H\wedge Q_K\wedge Q_W$, $Q_K/Q_H\wedge Q_K\wedge Q_W$, $Q_W/Q_H\wedge Q_K\wedge Q_W$. Ne segue $M = H\vee K\vee W\leqslant N_G(Q_H\wedge Q_K\wedge Q_W)$ e così $Q_M = Q_H\wedge Q_K\wedge Q_W\neq\langle 1\rangle$. Sia L/Q_M il p-sottogruppo di Sylow di Q/Q_M; $L\underset{d}{\leqslant} M$ (2.11). Si ha $Q_H\leqslant R\leqslant LQ_H$, $Q_K\leqslant S\leqslant LQ_K$; pertanto $R = Q_H(R\wedge L)$, $S = Q_K(S\wedge L)$ ed essendo $L_M\leqslant (R\wedge L)\wedge(S\wedge L)$, si ha $R\wedge L\underset{d}{\leqslant} M$, $S\wedge L\underset{d}{\leqslant} M$ (2.11) e così $R\wedge L\underset{d}{\leqslant} H$, $S\wedge L\underset{d}{\leqslant} K$. Ne segue $T(R^H) = T((Q_H(R\wedge L))^H) = T(Q_H(R\wedge L)^H) = T(Q_H(R\wedge L)T((R\wedge L)^H)) = T((R\wedge L)^H)\leqslant T(L^M)$ (*) analogamente $T(S^K) = T((S\wedge L)^K)\leqslant T(L^M)$ (**).

i) $T(R^H)$ è un p-gruppo non identico (2.3) e pertanto, essendo $L^M = LT(L^M)$, L^M/L_M non è un P-gruppo non abeliano. Da [13], Th. E segue $L\underset{q}{\leqslant} M$ e così $L\underset{q}{\leqslant} K$. Poichè $Q_K\leqslant S\leqslant LQ_K$, si ha $S\underset{q}{\leqslant} K$ (1.9). Essendo poi $L_M\leqslant S\wedge L$, si ha anche $S\wedge L\underset{q}{\leqslant} M$ (1.9), onde $S\wedge L\underset{q}{\leqslant} K$. Da 2.3, essendo per (**) $T(S^K) = T((S\wedge L)^K)$, segue $|S\wedge L/L_K| = |S/Q_K|$; applicando 2.7 ai gruppi $L\leqslant K\leqslant M$, si conclude che $T(S^K)\leqslant Z_{2n_s}(M)$, e quindi $T(S^K)\leqslant Z_{2n_s}(G)$. Se poi $x\in A$, si possono scegliere K ed S in modo che $x\in T(S^K)$; pertanto $A\leqslant Z_\omega(G)$. Se poi $\exp A = p^m<\infty$, scelto M contenente x, 2.8 fornisce $x\in Z_m(M)$ e quindi $x\in Z_m(G)$.

ii) S non è quasinormale in K, altrimenti R lo sarebbe in H per i). Inoltre da [13], Th. E, segue che L/Q_M, e quindi anche S/Q_K hanno ordine p e L^M/L_M è un P-gruppo non abeliano. Da $L^M = LT(L^M)$ discende che $T(L^M)$, e quindi anche il suo sottogruppo $T(S^K)T(R^H)$ (*) (**), è un q-gruppo abeliano elementare ove q è un primo e $p|q-1$, su cui M induce un gruppo di ordine p di automorfismi potenza. La conclusione è ora facile tenuto conto che W è soggetto alla sola condizione di essere finitamente generato modulo Q.

La proposizione 2.12 dà come corollario il seguente:

2.13 COROLLARIO. *Sia G un gruppo privo di fattori di Tarski e Q un sottogruppo di G localmente ciclico aperiodico e modulare in G. Allora $T(Q^G)$ è iperciclicamente immerso in G.*

2.14 OSSERVAZIONE. *Si noti che, nelle ipotesi di* 2.13, *anche se per ogni $K\leqslant G$ tale che $Q_K\neq\langle 1\rangle$ il p-sottogruppo di Sylow S/Q_K di Q/Q_K è quasinormale in K/Q_K, non è vero in generale che Q possieda sottogruppi* *non identici quasinormali in* G, *nè che* S^G *sia un gruppo modulare, pur essendo certamente* $S \underset{d}{\leqslant} G$ (*usando infatti* 2.11 *si può verificare facilmente che* $S \underset{d}{\leqslant} M \leqslant G$ *per ogni* $M \geqslant K$ *e finitamente generato modulo* K, *e ciò è sufficiente affinchè* S *sia modulare in* G ([8], *prop.* 1.3)). *Una prova di questi fatti è fornita dal seguente*:

ESEMPIO. Sia $\pi_1 = (p_i)_{i \in \mathrm{N}}$ una successione di numeri primi in ordine strettamente crescente tale che per ogni $n \in \mathrm{N}$ esiste un primo q_n che non appartiene a $\{p_1, \dots, p_n\}$ e che divide $p_n - 1$; sia poi $\pi_2 = (q_n)_{n \in \mathrm{N}}$ e sia p un primo con $p \notin \pi_1 \cup \pi_2$. È facile scegliere le successioni di π_1 e π_2 e il primo p soddisfacenti tali condizioni usando il teorema di Dirichlet ([2], cap. 7, Appendix 3, Th. 2). Per ogni $n \in \mathrm{N}$ sia A_n un p_n-gruppo abeliano elementare non identico, ove p_n è un elemento della successione π_1; siano poi B un p-gruppo abeliano di esponente infinito e $H = \left(\bigoplus_{n \in \mathrm{N}} A_n\right) \oplus B$. Si definisca $\sigma \in Aut(H)$ nel seguente modo: $\sigma(b) = b^{1+p^2}$, $\sigma(a_n) = a_n^t$ ove $t \not\equiv 1 \bmod (p_n)$ e $t^{q_n} \equiv 1 \bmod (p_n)$ per ogni $b \in B$, $a_n \in A_n$, p_n e q_n elementi rispettivamente delle successioni π_1 e π_2, $n \in \mathrm{N}$. Sia $\langle \sigma \rangle = Q$ e $G = HQ$ il prodotto semidiretto naturale.

Sono verificati i seguenti fatti:

i) *G è metabeliano e perciò è privo di fattori di Tarski, Q è ciclico infinito e modulare in G. Pertanto G soddisfa alle ipotesi di* 2.2 *e* 2.12.

ii) *Per ogni sottogruppo finitamente generato K di G contenente Q, detto S/Q_K il p-sottogruppo di Sylow di Q/Q_K, risulta $S \underset{q}{\leqslant} K$. Inoltre, per ogni $n \in \mathrm{N}$ si può scegliere K in modo che $|S/Q_K| \geqslant p^n$.*

iii) *Nessun sottogruppo non identico Q_1 di Q è tale che $(Q_1)^G$ è un gruppo modulare e perciò, per* 2.2, *Q_1 non è quasinormale in G.*

DIM. i) L'unica cosa da verificare è la modularità di Q in G. Da [8], prop. 1.3 segue che è sufficiente verificare la modularità di Q in ogni sottogruppo finitamente generato K di G che lo contiene. In tale caso si verifica facilmente che K/Q_K è un prodotto diretto di un numero finito di P-gruppi finiti di Hall in K/Q_K e di un p-gruppo finito modulare di Hall in K/Q_K, e pertanto K/Q_K è un gruppo modulare, onde essendo $Q \geqslant Q_K$, si ha $Q \underset{d}{\leqslant} K$.

ii) Discende subito dalla struttura di K/Q_K, vista in i) e dalla definizione di σ.

iii) Sia q_j un elemento della successione π_2 che non divide $|Q:Q_1|$. Allora $Q_1^q \geqslant Q_1 A_j$ e Q_1 induce su A_j un automorfismo potenza di ordine $q_j \neq p_j$: Ma allora $Q_1 A_j$ non è un gruppo modulare ([14], th. 17, cap. 1).

3. – Come applicazione dei risultati fin qui ottenuti, si perviene a una caratterizzazione reticolare, e quindi proiettivamente invariante, della classe dei gruppi iperciclici.

Ricordiamo la seguente definizione ([1]):

3.1 Definizione. *Un gruppo G è un $\mathfrak{F}$-gruppo se e solo se ogni intervallo $[H/K]$ di G di lunghezza* (13) *2 con K modulare in H, è un reticolo finito.*

3.2 Teorema. *Un gruppo G è iperciclico se e solo se $G \in \mathfrak{F}$ e G possiede una catena ascendente di sottogruppi $\{M_\alpha\}_{\alpha \leqslant \gamma}$ ove γ è un ordinale, $M_\gamma = G$, $M_0 = \langle 1 \rangle$, M_α è modulare in G, $M_\alpha = \bigvee_{\beta < \alpha} M_\beta$ se α è ordinale limite e $[M_{\alpha+1}/M_\alpha]$ è un reticolo distributivo a condizione massimale.*

Dim. Sia G iperciclico. Allora ogni $H \leqslant G$ possiede una $\mathfrak{X}$ (14)-serie normale ascendente che soddisfa le ipotesi richieste. Pertanto (15) $G \in \mathfrak{X}^s$ (16), in particolare $G \in \mathfrak{F}$, in accordo con [1], osservazione 1. Viceversa, osservato che G è privo di fattori di Tarski, ([1], osservazione 1) sia $N \underset{\neq}{\lhd} G$ e sia $\delta = \min\{\alpha \leqslant \gamma | M_\alpha \nleqslant N\}$. Allora δ è un ordinale non limite e quindi $M_\delta N/N$ è un gruppo ciclico non identico. Se $M_\delta N/N$ ha nocciolo non identico M/N in G/N, allora M/N è ciclico e normale in G/N. Altrimenti si applichi 1.11 *b*) nel caso che $M_\delta N/N$ sia ciclico finito e 2.13 nel caso che $M_\delta N/N$ sia ciclico infinito.

(13) Un reticolo L si dice di lunghezza n se e solo se $n = \max\{|c| - 1\}$, ove c varia nell'insieme delle catene di L.

(14) Un gruppo G appartiene alla classe $\mathfrak{X}$ se e solo se i sottogruppi massimali e modulari di G hanno indice finito in G.

(15) Ogni gruppo H dotato di un $\mathfrak{X}$-serie normale ascendente è un $\mathfrak{X}$-gruppo. Per provarlo si usi induzione transfinita e si tenga conto che $\mathfrak{X} = L(\mathfrak{X})$ ([13], introduction), ove $L(\mathfrak{X})$ è la classe dei gruppi che sono localmente $\mathfrak{X}$-gruppi.

(16) $\mathfrak{X}^s$ è la massima sottoclasse di $\mathfrak{X}$ chiusa rispetto ai sottogruppi.

BIBLIOGRAFIA

[1] G. BUSETTO, *Una caratterizzazione reticolare dei gruppi iperabeliani*, Atti Acc. Naz. dei Lincei, in fase di stampa.

[2] L. J. GOLDSTEIN, *Abstract Algebra, a first course*, Prentice Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey.

[3] F. GROSS, *p-subgroups of core-free quasinormal subgroups* 1, Rocky Mountain J. Math., **1** (1971), pp. 541-550.

[4] F. GROSS, *Infinite permutable subgroups*, preprint.

[5] N. ITÔ - J. SZÈP, *Über die Quasinormalteiler von endlichen Gruppen*, Acta Sci. Math. (Szeged), **23** (1962), pp. 168-170.

[6] R. MAIER - P. SCHMID, *The embedding of quasinormal subgroups in finite groups*, Math. Z., **131** (1973), pp. 269-272.

[7] K. NAKAMURA, *Charakteristische Untergruppen von Quasinormalteilern*, Archiv der Mathematik, **32** (1979), pp. 513-515.

[8] E. PREVIATO, *Gruppi in cui la relazione di Dedekind è transitiva*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **54** (1975), pp. 215-229.

[9] D. J. S. ROBINSON, *Finitness conditions and generalized soluble groups*, Erg. der Mathematik, Band 62, Springer-Verlag, Berlin.

[10] E. SCHENKMAN, *On the norm of a group*, Illinois J. Math., **4** (1960), pp. 150-152.

[11] R. SCHMIDT, *Eine verbandstheoretische Characterisierung der auflösbaren und der überauflösbaren endlichen Gruppen*, Archiv der Mathematik, **19** (1968), pp. 449-452.

[12] S. E. STONEHEWER, *Permutable subgroups of infinite groups*, Math. Z., **125** (1972), pp. 1-16.

[13] S. E. STONEHEWER, *Modular subgroup structure in infinite groups*, Proc. London Math. Soc. (3), **32** (1976), pp. 63-100.

[14] M. SUZUKI, *Structure of a group and the structure of its lattice of subgroups*, Erg. der Mathematik, Heft 10, Springer-Verlag, Berlin.

[15] G. ZACHER, *La classe dei gruppi iperciclici è proiettivamente invariante*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **59** (1978), 263-268.

Manoscritto pervenuto in redazione il 4 giugno 1979 ed in forma revisionata il 22 maggio 1980.