Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova

Ada Bottaro Aruffo

Un teorema di esistenza e di unicità per un'equazione differenziale non lineare

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 63 (1980), p. 1-25

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1980__63__1_0>

Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, Vol. 63 (1980)

Un teorema di esistenza e di unicità per un'equazione differenziale non lineare.

Ada Bottaro Aruffo (*)

Introduzione.

Siano V spazio di Banach riflessivo, H spazio di Hilbert, V' duale di V e

$$V \subset H \subset V'$$

con immersioni continue.

Siano

$$1 < p < +\infty, \qquad 1/p + 1/p' = 1,$$

$$g \in L^{p'}([S, T]; V')[L^{p'}([S, T]; H)], \qquad x_S \in H$$

e sia

$$W^p(S, T) = \{x \in L^p([S, T]; V) \colon x' \in L^{p'}([S, T]; V')\} .$$

Viene provato un teorema di esistenza e unicità in $W^p(S, T)$ per l'equazione

$$x'(t) + (A(t))(x(t)) = g(t) \qquad \text{per q.o. } t \in [S, T]$$

(*) Indirizzo dell'A: Istituto Matematico dell'Università, Via Alberti, Genova.

Lavoro eseguito nell'ambito del Laboratorio per la Matematica Applicata del C.N.R. presso l'Università di Genova.

con il dato iniziale

$$x(S) = x_S ,$$

ove $A(t)\colon V \to V'$ $(t \in [S, T])$ sono per q.o. $t \in [S, T]$ operatori limitati, emicontinui, monotoni e coercivi, con A fortemente misurabile.

Nel § 0 vi sono le notazioni e i preliminari.

Nel § 1 viene dimostrato il teorema di esistenza e unicità (teorema del n. 1.8). Questo teorema estende analoghi teoremi di Barbu-Precupanu ([1], Cap. 1, Teorema 4.5) e Lions ([7], Cap. 2, Teorema 1.2 bis) e viene dimostrato con una prova del tipo di Galerkin. Tale teorema fornisce in ipotesi più deboli anche un teorema di esistenza e di unicità locale della soluzione.

Desidero ringraziare il Prof. J. P. Cecconi, con il quale ho discusso i risultati del presente lavoro.

0. – Notazioni e preliminari.

Per le notazioni e per le definizioni di monotonia e di emicontinuità rimandiamo a [2]. Inoltre:

0.0. Se $A \subset \mathbf{R}$, indichiamo con χ_A la funzione

$$\chi_A : t \in \mathbf{R} \mapsto \begin{cases} 1 & \text{se } t \in A \\ 0 & \text{se } t \notin A \end{cases} .$$

0.1 Teorema. Siano X, Y spazi di Banach su $\mathbf{R}$, Y' duale continuo di Y, $[S, T] \subset \mathbf{R}$. Per ogni $t \in [S, T]$ sia dato $C(t)\colon X \to Y$ e supponiamo che esista $E_C \in \mathfrak{L}([S, T])$, $|E_C| = 0$ tale che:

a) per ogni $x \in X$ l'applicazione

$$t \in [S, T] \mapsto \big(C(t)\big)(x) \in Y$$

sia misurabile;

b) $C(t)$ sia continuo da X con la topologia indotta dalla norma a Y con la topologia $\sigma(Y, Y')$ per ogni $t \in [S, T] \setminus E_C$.

Allora, per ogni x: $[S\ T] \to X$ misurabile, l'applicazione

$$t \in [S, T] \mapsto \big(C(t)\big)\big(x(t)\big) \in Y$$

è misurabile.

DIMOSTRAZIONE. Sia x: $[S, T] \to X$ misurabile. Allora esiste una successione $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ di funzioni misurabili a valori numerabili $\Big($e cioè esistono $\alpha_n^k \in X$, $E_n^k \in \mathcal{L}\big([S, T]\big)$, $n, k \in \mathbf{N}$, $E_n^k \cap E_n^h = \emptyset$ se $k \neq h$, $\bigcup\limits_{k\in\mathbf{N}} E_n^k = [S, T]$ per ogni $n \in \mathbf{N}$ tali che $x_n(t) = \sum\limits_{k\in\mathbf{N}} \alpha_n^k \chi_{E_n^k}(t)$ per ogni $t \in [S, T]\Big)$ ed esiste $N \in \mathcal{L}\big([S, T]\big)$, $|N| = 0$ tale che

$$x_n(t) \to x(t) \qquad \text{se } t \in [S, T]\setminus N\,. \tag{0.1.1}$$

D'altra parte, per l'ipotesi a), risulta che per ogni n, $k \in \mathbf{N}$

$$t \in [S, T] \mapsto \big(C(t)\big)\big(\alpha_n^k \chi_{E_n^k}(t)\big) \in Y$$

è misurabile e quindi per ogni n, $M \in \mathbf{N}$, tenendo conto del fatto che $E_n^k \cap E_n^h = \emptyset$ se $k \neq h$, si ha che

$$t \in [S, T] \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} \big(C(t)\big)\big(\alpha_n^k \chi_{E_n^k}(t)\big) = \big(C(t)\big)\Big(\sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_n^k \chi_{E_n^k}(t)\Big) = \big(C(t)\big)\big(x_n(t)\big) \in Y$$

è misurabile.

Ora, dalla (0.1.1) e dalla b), segue che per ogni $t \in [S, T]\setminus(E_C \cup N)$:

$$\lim_{n\to+\infty} \big(C(t)\big)\big(x_n(t)\big) = \big(C(t)\big)\big(x(t)\big) \qquad \text{in } \sigma(Y, Y')$$

e quindi per [6] $\big($teorema 3.5.4 (4)$\big)$ l'applicazione

$$t \in [S, T] \mapsto \big(C(t)\big)\big(x(t)\big) \in Y$$

è misurabile, da cui la tesi.

0.2. TEOREMA. Siano

$$C, D \in [0, +\infty[\,, \qquad r \in]0, 1[\, \cup\,]1, +\infty[\,, \qquad [S, T] \subset \mathbf{R}$$

tali che se $r > 1$ sia:

$$(T - S)\big(C^{r-1} D(r-1)\big) < 1 . \tag{0.2.1}$$

Sia $m\colon [S, T] \to [0, +\infty[$ continua e tale che

$$m(t) \leqslant C + D\int_S^t [m(\tau)]^r \, d\tau \qquad \text{per ogni } t \in [S, T] . \tag{0.2.2}$$

Allora

se $r > 1$: $m(t) \leqslant C[1 - C^{r-1} D(r-1)(T-S)]^{-1/(r-1)}$ per ogni $t \in [S, T]$

se $r < 1$: $m(t) \leqslant [C^{1-r} + D(1-r)(T-S)]^{1/(1-r)}$ per ogni $t \in [S, T]$.

Dimostrazione. Se $D = 0$ la tesi è ovvia. Supponiamo allora $D > 0$. Sia $\varepsilon_0 \in \mathbf{R}_+$ tale che

$$(T - S)\big((C + \varepsilon_0)^{r-1} D(r-1)\big) < 1 \tag{0.2.3}$$

(che è ovvio per ogni $\varepsilon_0 \in \mathbf{R}_+$ se $r < 1$ ed è lecito per la (0.2.1) se $r > 1$). Sia $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0]$ e sia $z\colon [S, T] \to [0, +\infty[$ tale che

$$z(t) = \int_S^t [m(\tau)]^r \, d\tau \qquad \text{per ogni } t \in [S, T] .$$

Allora

$$z'(t) = [m(t)]^r \qquad \text{per ogni } t \in [S, T] .$$

Dalla (0.2.2) segue che

$$[m(t)]^r \Big/ \Big[C + \varepsilon + D\int_S^t [m(\tau)]^r \, d\tau\Big]^r \leqslant 1 \qquad \text{per ogni } t \in [S, T]$$

e quindi:

$$z'(\tau)/(C + \varepsilon + Dz(\tau))^r \leqslant 1 \qquad \text{per ogni } \tau \in [S, T] ,$$

per cui, integrando su $[S, t]$ con $t \in [S, T]$, risulta:

$$\int_{z(S)}^{z(t)} [1/(C + \varepsilon + D\tau)^r]\, d\tau \leqslant t - S$$

e, poichè $z(S) = 0$, si ha:

$$[(C + \varepsilon + Dz(t))^{1-r}/(D(1-r))] - [(C + \varepsilon)^{1-r}/(D(1-r))] \leqslant t - S\,,$$

da cui:

$$(C + \varepsilon + Dz(t))^{1-r}/(1-r) \leqslant D\{t - S + [(C + \varepsilon)^{1-r}/(D(1-r))]\}$$

e perciò:

$$-(C + \varepsilon + Dz(t))^{1-r} \leqslant$$
$$\leqslant D(r-1)\{t - S + [(C + \varepsilon)^{1-r}/(D(1-r))]\} \quad \text{se } r > 1$$

$$(C + \varepsilon + Dz(t))^{1-r} \leqslant$$
$$\leqslant D(1-r)\{t - S + [(C + \varepsilon)^{1-r}/(D(1-r))]\} \quad \text{se } r < 1\,.$$

Infine:

$$C + \varepsilon + Dz(t) \leqslant \{D(r-1)\{[(C + \varepsilon)^{1-r}/(D(r-1))] - (t - S)\}\}^{1/(1-r)}\,,$$

che è lecito per la (0.2.3) e poichè $\varepsilon \in \,]0, \varepsilon_0]$.

Dunque per l'arbitrarietà di $\varepsilon \in \,]0, \varepsilon_0]$, per definizione di z e per l'ipotesi risulta:

$$m(t) \leqslant C[1 - C^{r-1} D(r-1)(t - S)]^{-1/(r-1)} \leqslant$$
$$\leqslant C[1 - C^{r-1} D(r-1)(T - S)]^{-1/(r-1)} \quad \text{se } r > 1$$

$$m(t) \leqslant [C^{1-r} + D(1-r)(t - S)]^{1/(1-r)} \leqslant$$
$$\leqslant [C^{1-r} + D(1-r)(T - S)]^{1/(1-r)} \quad \text{se } r < 1$$

per ogni $t \in [S, T]$.

0.3. Osservazione. Notiamo che, nelle notazioni del n. 0.2, se $r > 1$ e se non vale la (0.2.1) e cioè se vale

$$(0.3.1) \qquad (T - S)C^{r-1}D(r-1) \geqslant 1$$

allora esistono per ogni $n \in \mathbf{Z}_+$ delle funzioni $m_n\colon [S, T] \to [0, +\infty[$ di classe $C^1([S, T])$ tali che

$$(0.3.2) \qquad m_n(t) \leqslant C + D\int_S^t [m_n(\tau)]^r\, d\tau$$

$$\text{per ogni } t \in [S, T], \text{ per ogni } n \in \mathbf{Z}_+$$

e

$$(0.3.3) \qquad \sup\{m_n(t)\colon t \in [S, T], n \in \mathbf{Z}_+\} = +\infty\,.$$

Basta infatti considerare per ogni $n \in \mathbf{Z}_+$:

$$m_n(t) = \begin{cases} [1/(D(r-1)(T-t))]^{1/(r-1)} & \text{se } t \in [S, T-(1/n)] \\ [n/(D(r-1))]^{1/(r-1)} + (t - T + (1/n))(1/D)^{1/(r-1)}(n/(r-1))^{r/(r-1)} & \\ \hfill \text{se } t \in\,]T-(1/n), T] \end{cases}$$

(la definizione ha senso poichè $D > 0$ per la (0.3.1)).

Allora la verifica della (0.3.2) si ottiene tenendo conto che

$$m_n(T-(1/n)) \leqslant m_n(t) \qquad \text{per ogni } t \in\,]T-(1/n), T]$$

e la verifica della (0.3.3) segue dal fatto che

$$\sup\{m_n(t)\colon t \in [S, T], n \in \mathbf{Z}_+\} \geqslant m_n(T-(1/n)) \qquad \text{per ogni } n \in \mathbf{Z}_+\,.$$

1. – Teorema di esistenza e unicità per un'equazione differenziale.

1.0. Siano V spazio di Banach riflessivo su $\mathbf{R}$, H spazio di Hilbert su $\mathbf{R}$, V' duale continuo di V e identifichiamo H con il suo duale. Esista $i\colon V \hookrightarrow H$ immersione continua e a rango denso e quindi $i'\colon H \hookrightarrow V'$ immersione continua (cfr. [2], n. 1.2).

1.1. Definizione. Siano V, V' come nel n. 1.0. Siano $1 < p < < +\infty$, $p' = p/(p-1)$, $[S, T] \subset \mathbf{R}$. Poniamo

$$W^p(S, T) = \{x \in L^p([S, T]; V) : x' \in L^{p'}([S, T]; V')\},$$

ove x' denota la derivata di x nel senso delle distribuzioni $\mathcal{D}'(]S, T[; V)$ (cfr. [2], Definizione del n. 1.3, Osservazione del n. 1.4, Definizione del n. 1.5). Per le proprietà di $W^p(S, T)$ rimandiamo a [2].

1.2. Ipotesi. Siano V, H, V' come nel n. 1.0, p, p', $[S, T]$ come nella definizione del n. 1.1. Per ogni $t \in [S, T]$ sia dato $A(t): V \to V'$ e supponiamo che esista $E_A \in \mathcal{L}([S, T])$, $|E_A| = 0$ tale che la famiglia $\{A(t): t \in [S, T]\}$ verifichi le seguenti condizioni:

a) per ogni $v \in V$ l'applicazione

$$t \in [S, T] \mapsto (A(t))(v) \in V'$$

sia misurabile;

b) esistano $\lambda_0 \in L^{p'}([S, T])$, $\lambda_1 \in \mathbf{R}$ tali che

$$\|(A(t))(v)\|_{V'} \leqslant \lambda_0(t) + \lambda_1 \|v\|_V^{p-1} \qquad \text{per ogni } (t, v) \in ([S, T] \setminus E_A) \times V;$$

c) $A(t)$ sia emicontinuo da V in V' per ogni $t \in [S, T] \setminus E_A$;

d) $A(t)$ sia monotono da V in V' per ogni $t \in [S, T] \setminus E_A$;

e) esistano $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, $\omega \in \mathbf{R}_+$, $s \in \mathbf{R}_+$ tali che per ogni $(t, v) \in \in ([S, T] \setminus E_A) \times V$ si abbia

$$\langle (A(t))(v), v \rangle_{V' \times V} + \alpha \|v\|_H^s + \beta \geqslant \omega \|v\|_V^p .$$

1.3. Osservazione. Nelle ipotesi *a*), *b*), *c*) e *d*) del n. 1.2, se $x \in L^p([S, T]; V)$ e se $\tilde{A}(x): [S, T] \to V'$,

$$(\tilde{A}(x))(t) = (A(t))(x(t)) \qquad \text{per ogni } t \in [S, T],$$

allora $\tilde{A}(x) \in L^{p'}([S, T]; V')$.

Dimostrazione. Sia $x \in L^p([S, T]; V)$. Allora $\tilde{A}(x)$ è misurabile per il teorema del n. 0.1, tenendo conto del fatto che V è riflessivo e che

$A(t)$ è continuo da V con la topologia indotta dalla norma a V' con la topologia $\sigma(V', V)$ per ogni $t \in [S, T] \setminus E_A$ (cfr. [7], Cap. 2, § 2, Nota (¹) alla definizione 2.1 e proposizione 2.5). Inoltre, per la b), usando la diseguaglianza di Minkowski si ha:

$$\|\tilde{A}(x)\|_{L^{p'}([S,T];V')} \leqslant \left(\int_S^T |\lambda_0(t) + \lambda_1 \|x(t)\|_V^{p-1}|^{p'} dt\right)^{1/p'} \leqslant \left(\int_S^T |\lambda_0(t)|^{p'} dt\right)^{1/p'} +$$

$$+ \left(\int_S^T (|\lambda_1| \|x(t)\|_V^{p-1})^{p'} dt\right)^{1/p'} \leqslant \|\lambda_0\|_{L^{p'}([S,T])} + |\lambda_1| \|x\|^{p-1}_{L^p([S,T];V)}.$$

Dunque $\tilde{A}(x) \in L^{p'}([S, T]; V')$.

1.4. Definizione. Nelle ipotesi a), b), c) e d) del n. 1.2 e tenendo conto dell'osservazione del n. 1.3, si può definire un'applicazione:

$$\tilde{A}: L^p([S, T]; V) \to L^{p'}([S, T]; V')$$

ove per ogni $x \in L^p([S, T]; V)$: $(\tilde{A}(x))(t) = (A(t))(x(t))$ per ogni $t \in [S, T]$.

1.5. Osservazione. Nelle ipotesi a), b), c) e d) del n. 1.2, l'applicazione $\tilde{A}$ definita nel n. 1.4 verifica le seguenti condizioni:

a) esiste $M_A \in \mathbf{R}_+$ tale che si abbia per ogni $x \in L^p([S, T]; V)$:

$$\|\tilde{A}(x)\|_{L^{p'}([S,T];V')} \leqslant M_A(1 + \|x\|^{p-1}_{L^p([S,T];V)});$$

b) $\tilde{A}$ è emicontinua da $L^p([S, T]; V)$ a $L^{p'}([S, T]; V')$;

c) $\tilde{A}$ è monotona da $L^p([S, T]; V)$ a $L^{p'}([S, T]; V')$.

Dimostrazione. a) Dall'osservazione del n. 1.3 segue che se $x \in L^p([S, T]; V)$:

$$\|\tilde{A}(x)\|_{L^{p'}([S,T];V')} \leqslant \|\lambda_0\|_{L^{p'}([S,T])} + |\lambda_1| \|x\|^{p-1}_{L^p([S,T];V)}$$

e quindi basta scegliere

$$M_A = (\|\lambda_0\|_{L^{p'}([S,T])}) \vee |\lambda_1| .$$

b) Siano $x, y, z \in L^p([S, T]; V)$ e sia $(l_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tale che $l_n \in \mathbf{R}$ per ogni $n \in \mathbf{N}$ e $\lim_{n\to+\infty} l_n = 0$. Allora per ogni $t \in [S, T]\setminus E_A$ dalla *c*) delle ipotesi del n. 1.2 segue che:

$$\langle (A(t))(x(t) + l_n y(t)), z(t)\rangle_{V'\times V} \to \langle (A(t))(x(t)), z(t)\rangle_{V'\times V} \tag{1.5.1}$$

e, poichè $l_n \to 0$, esiste $M_1 \in \mathbf{R}_+$ tale che $|l_n| \leqslant M_1$ per ogni $n \in \mathbf{N}$ e quindi dalla *b*) delle ipotesi del n. 1.2 segue che:

$$\begin{aligned}|\langle (A(t))(x(t) + l_n y(t)), z(t)\rangle_{V'\times V}| &\leqslant \|(A(t))(x(t) + l_n y(t))\|_{V'} \|z(t)\|_V \leqslant \\ &\leqslant |\lambda_0(t)|\,\|z(t)\|_V + |\lambda_1|\,\|x(t) + l_n y(t)\|_V^{p-1} \|z(t)\|_V \leqslant \\ &\leqslant |\lambda_0(t)|\,\|z(t)\|_V + |\lambda_1|(\|x(t)\|_V + M_1\|y(t)\|_V)^{p-1}\|z(t)\|_V\end{aligned}$$

e, d'altra parte, risulta che

$$\Big(t \in [S, T] \mapsto |\lambda_0(t)|\lambda_0(t)|\,\|z(t)\|_V\|z(t)\|_V + \\ + |\lambda_1|(\|x(t)\|_V + M_1\|y(t)\|_V)^{p-1}\|z(t)\|_V \in \mathbf{R}\Big) \in L^1([S, T])$$

e quindi per la (1.5.1) e per il teorema di convergenza dominata di Lebesgue si ha:

$$\int_S^T |\langle (A(t))(x(t) + l_n y(t)), z(t)\rangle_{V'\times V} - \langle (A(t))(x(t)), z(t)\rangle_{V'\times V}|\,dt \to 0$$

per cui

$$\lim_{n\to+\infty} \langle \tilde{A}(x + l_n y), z\rangle_{L^{p'}([S,T];V')\times L^p([S,T];V)} = \langle \tilde{A}(x), z\rangle_{L^{p'}([S,T];V')\times L^p([S,T];V)}\,.$$

c) Ovvio per la *d*) delle ipotesi del n. 1.2.

1.6. Osservazione. Valgano le ipotesi del n. 1.2.

Sia $g \in L^{p'}([S, T]; V')$ e sia $x \in W^p(S, T)$ tale che per q.o. $t \in]S, T[$ si abbia:

$$\langle x'(t), x(t)\rangle_{V'\times V} + \langle (A(t))(x(t)), x(t)\rangle_{V'\times V} = \langle g(t), x(t)\rangle_{V'\times V}\,.$$

Poniamo inoltre:

$$a_1 = 2(\alpha\vee 0)(T-S); \quad a_2 = 2(\beta\vee 0)(T-S); \quad a_3 = (2^{p'}/p')(p\omega)^{-1/(p-1)};$$
$$c_1(g) = (2^{2p-1}/\omega)\big(\|\lambda_0\|_{L^{p'}([S,T])} + \|g\|_{L^{p'}([S,T];V')}\big)^p;$$
$$c_2(g) = a_3\|g\|^{p'}_{L^{p'}([S,T];V')};$$
$$d_1(x(S),g) = 2^{p-1}\|x(S)\|^{2p}_H + c_1(g)\big(\|x(S)\|^2_H + c_2(g) + a_2\big);$$

inoltre:

se $s<2p$:

$$b_1 = 2^{s/(2p(2p-s))}[2^{p-1} + (2^{3p-2}/\omega)\big(\|\lambda_0\|^p_{L^{p'}([S,T])} + (1/p)\big)]^{1/(2p)};$$
$$b_2 = 2^{s/(2p(2p-s))}\big[(2^{3p-2}/\omega)\big(\|\lambda_0\|^p_{L^{p'}([S,T])}a_3 + (1/p') + a_3 + a_2\big)\big]^{1/(2p)};$$
$$b_3 = \Big[2^{s/(2p)}a_1(2^{3p-2}/\omega)\big(1-(s/(2p))\big)\Big]^{1/(2p-s)};$$
$$b_4 = 2^{s/(2p(2p-s))}\cdot$$
$$\cdot\big\{(2^{3p-2}/\omega)\big[\|\lambda_0\|^p_{L^{p'}([S,T])}(1+a_3+a_2) + (1/p') + a_3 + a_2\big]\big\}^{1/(2p)};$$
$$b_5 = b_3\big(\|\lambda_0\|^p_{L^{p'}([S,T])} + 1\big)^{1/(2p-s)};$$

se $s>2p$ definiamo

$$k\colon (x,y)\in[0,+\infty[\times[0,+\infty[\mapsto (T-S)\Big\{\{2^{p-1}x^{2p} + (2^{2p-1}/\omega)\cdot$$
$$\cdot\big(\|\lambda_0\|_{L^{p'}([S,T])}+y\big)^p[x^2 + (2^{p'}/p')(p\omega)^{-1/(p-1)}y^{p'} + 2(\beta\vee 0)(T-S)]\}^{(s/(2p))-1}\cdot$$
$$\cdot 2(\alpha\vee 0)(2^{2p-1}/\omega)\big(\|\lambda_0\|_{L^{p'}([S,T])}+y\big)^p\big((s/(2p))-1\big)\Big\}\in[0,+\infty[$$

e poniamo $d_2(x(S),g) = 1 - k\big(\|x(S)\|_H, \|g\|_{L^{p'}([S,T];V')}\big)$;

se $\tilde{A}(0)$, $g\in L^{p'}([S,T];H)$:

$$d_3(x(S),g) = \Big[2^{((2\vee p)/2)-1}\|x(S)\|^{2\vee p}_H +$$
$$+ \big(2^{(2(p\vee p'))-(2\vee p')}/(p'\vee 2)\big)\big(\|\tilde{A}(0)\|_{L^{p'}([S,T];H)} +$$
$$+ \|g\|_{L^{p'}([S,T];H)}\big)^{p\vee p'} + (T-S)\left(0\vee\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right)\right)\Big]^{1/(2\vee p)};$$
$$d_4(x(S),g) = d_3(x(S),g)\exp\left(\frac{T-S}{2(2\vee p)}\right).$$

Allora:

a) se $s < 2p$ si ha:

$$\|x\|_{C([S,T];H)} \leqslant b_1 \|x(S)\|_H + (b_2 + b_3) \|g\|_{L^{p'}([S,T];V')}^{(p'/2)\vee(p/(2p-s))} + b_4 + b_5 \tag{1.6.1}$$

$$\begin{aligned}\|x\|_{L^p([S,T];V)} \leqslant (1/\omega)^{1/p}\{&[1 + a_1 b_1^s]^{1/p}\big(1 + \|x(S)\|_H^{(s\vee 2)/p}\big) + \\ &+ \{a_3 + a_1[b_2^s + b_3^s]\}^{1/p}\big(1 + \|g\|_{L^{p'}([S,T];V')}^{(1/(p-1))\vee(s/(2(p-1)))\vee(s/(2p-s))}\big) + \\ &+ \{a_1[b_4^s + b_5^s] + a_2\}^{1/p}\};\end{aligned} \tag{1.6.2}$$

b) se $s = 2p$ si ha:

$$\begin{aligned}\|x\|_{C([S,T];H)} \leqslant \{&2^{(p-1)/(2p)}\|x(S)\|_H + \big(c_1(g)\big)^{1/(2p)}[\|x(S)\|_H^{1/p} + \\ &+ \big(c_2(g)\big)^{1/(2p)} + a_2^{1/(2p)}]\}\big(\exp\big(a_1 c_1(g)\big)\big)^{1/(2p)}\end{aligned} \tag{1.6.3}$$

$$\begin{aligned}&\|x\|_{L^p([S,T];V)} \leqslant \\ &\leqslant (1/\omega)^{1/p}\{\|x(S)\|_H^2 + c_2(g) + a_1 d_1\big(x(S), g\big)\exp\big(a_1 c_1(g)\big) + a_2\}^{1/p};\end{aligned} \tag{1.6.4}$$

c) se $s > 2p$ e se risulta:

$$k\big(\|x(S)\|_H, \|g\|_{L^{p'}([S,T];V')}\big) < 1 \tag{1.6.5}$$

si ha:

$$\|x\|_{C([S,T];H)} \leqslant \big(d_1\big(x(S), g\big)\big)^{1/(2p)}\big(d_2\big(x(S), g\big)\big)^{-1/(s-2p)} \tag{1.6.6}$$

$$\begin{aligned}\|x\|_{L^p([S,T];V)} \leqslant (1/\omega)^{1/p}\{&\|x(S)\|_H^2 + c_2(g) + \\ &+ a_1\big(d_1\big(x(S), g\big)\big)^{s/(2p)}\big(d_2\big(x(S), g\big)\big)^{-s/(s-2p)} + a_2\}^{1/p};\end{aligned} \tag{1.6.7}$$

d) se si suppone che $\tilde{A}(0) \in L^{p'}([S,T];H)$ e se $g \in L^{p'}([S,T];H)$ si ha:

$$\|x\|_{C([S,T];H)} \leqslant d_4\big(x(S), g\big) \tag{1.6.8}$$

$$\begin{aligned}&\|x\|_{L^p([S,T];V)} \leqslant \\ &\leqslant (1/\omega)^{1/p}\{\|x(S)\|_H^2 + c_2(g) + a_1\big(d_4\big(x(S), g\big)\big)^s + a_2\}^{1/p}.\end{aligned} \tag{1.6.9}$$

DIMOSTRAZIONE. Dalla $e)$ delle ipotesi del n. 1.2 si ha per ogni $\tau\in[S,T]\setminus E_A$:

$$\langle (A(\tau))(x(\tau)), x(\tau)\rangle_{V'\times V} + \alpha\|x(\tau)\|_H^s + \beta \geqslant \omega\|x(\tau)\|_V^p$$

e quindi, se $t\in[S,T]$, integrando su $[S,t]$ e tenendo conto dell'ipotesi si ha:

$$\int_S^t \langle x'(\tau), x(\tau)\rangle_{V'\times V}\,d\tau + \omega\int_S^t \|x(\tau)\|_V^p\,d\tau \leqslant \int_S^t \langle g(\tau), x(\tau)\rangle_{V'\times V}\,d\tau + \\ + \alpha\int_S^t \|x(\tau)\|_H^s\,d\tau + \beta(t-S)$$

e quindi per [2] (Teorema del n. 1.11):

$$\|x(t)\|_H^2 + 2\omega\int_S^t \|x(\tau)\|_V^p\,d\tau \leqslant \|x(S)\|_H^2 + \\ + \big(2(p\omega)^{-1/p}\|g\|_{L^{p'}([S,T];V')}\big)\big((p\omega)^{1/p}\|x\|_{L^p([S,t];V)}\big) + 2\alpha\int_S^t \|x(\tau)\|_H^s\,d\tau + \\ + 2\beta(t-S) \leqslant \|x(S)\|_H^2 + (2^{p'}/p')(p\omega)^{-1/(p-1)}\|g\|_{L^{p'}([S,T];V')}^{p'} + \\ + (p\omega/p)\|x\|_{L^p([S,t];V)}^p + 2\alpha\int_S^t \|x(\tau)\|_H^s\,d\tau + 2\beta(t-S)\,,$$

ove si è usata una conseguenza della diseguaglianza di Jensen per la quale se $a, b\in[0,+\infty[$ e $r\in]1,+\infty[$, $r'=r/(r-1)$, allora $ab\leqslant$ $\leqslant a^r/r + b^{r'}/r'$, da cui:

$$\|x(t)\|_H^2 + \omega\int_S^t \|x(\tau)\|_V^p\,d\tau \leqslant \|x(S)\|_H^2 + \\ + (2^{p'}/p')(p\omega)^{-1/(p-1)}\|g\|_{L^{p'}([S,T];V')}^{p'} + 2\alpha\int_S^t \|x(\tau)\|_H^s\,d\tau + 2\beta(t-S)\,. \tag{1.6.10}$$

D'altra parte per la monotonia di $A(t)$, $t\in[S,T]\setminus E_A$, che segue dalla *d*) delle ipotesi del n. 1.2, risulta che per ogni $\tau \in [S, T] \setminus E_A$:

$$\langle (\tilde{A}(x))(\tau) - (\tilde{A}(0))(\tau), x(\tau) - 0 \rangle_{V' \times V} \geqslant 0 ,$$

da cui:

$$\langle (\tilde{A}(x))(\tau), x(\tau) \rangle_{V' \times V} \geqslant \langle (\tilde{A}(0))(\tau), x(\tau) \rangle_{V' \times V}$$

e quindi, se $t \in [S, T]$, integrando su $[S, t]$ e tenendo conto dell'ipotesi si ha:

$$\int_S^t \langle x'(\tau), x(\tau) \rangle_{V' \times V} d\tau + \tag{1.6.11}$$
$$+ \int_S^t \langle (\tilde{A}(0))(\tau), x(\tau) \rangle_{V' \times V} d\tau \leqslant \int_S^t \langle g(\tau), x(\tau) \rangle_{V' \times V} d\tau$$

per cui applicando la diseguaguaglianza di Hölder si ottiene:

$$\tfrac{1}{2} \|x(t)\|_H^2 \leqslant \tfrac{1}{2} \|x(S)\|_H^2 + \left(\|\tilde{A}(0)\|_{L^{p'}([S,T]; V')} + \|g\|_{L^{p'}([S,T]; V')} \right) \|x\|_{L^p([S,t]; V)}$$

e pertanto, tenendo conto della *b*) delle ipotesi del n. 1.2, si ha per ogni $t \in [S, T]$:

$$\|x(t)\|_H^2 \leqslant \|x(S)\|_H^2 + 2\left(\|\lambda_0\|_{L^{p'}([S,T])} + \|g\|_{L^{p'}([S,T]; V')} \right) \|x\|_{L^p([S,t]; V)}$$

ed elevando entrambi i membri alla p:

$$\|x(t)\|_H^{2p} \leqslant 2^{p-1} \|x(S)\|_H^{2p} + 2^{2p-1} \left(\|\lambda_0\|_{L^{p'}([S,T])} + \|g\|_{L^{p'}([S,T]; V')} \right)^p \int_S^t \|x(\tau)\|_V^p d\tau$$

e quindi, sfruttando la (1.6.10), si ottiene per ogni $t \in [S, T]$:

$$\|x(t)\|_H^{2p} \leqslant 2^{p-1} \|x(S)\|_H^{2p} + c_1(g) [\|x(S)\|_H^2 + c_2(g) + \tag{1.6.12}$$
$$+ 2\alpha \int_S^t \|x(\tau)\|_H^s d\tau + 2\beta(t - S)] .$$

a) Ora, se $s < 2p$, applicando il teorema del n. 0.2 alla funzione:

$$t \in [S, T] \mapsto \|x(t)\|_H^{2p} \in \mathbf{R}\,,$$

con $r = s/(2p)$, si ottiene per ogni $t \in [S, T]$:

$$\begin{aligned}
\|x(t)\|_H^{2p} \leqslant & \Big\{\big[2^{p-1}\|x(S)\|_H^{2p} + c_1(g)\big(\|x(S)\|_H^2 + c_2(g) + a_2\big)^{1-(s/(2p))} + \\
& + a_1 c_1(g)\big(1 - (s/(2p))\big)\Big\}^{2p/(2p-s)} \leqslant 2^{s/(2p-s)}\big[2^{p-1}\|x(S)\|_H^{2p} + \\
& + (2^{3p-2}/\omega)\|\lambda_0\|_{L^{p'}([S,T])}^p\big(\|x(S)\|_H^2 + \\
& + c_2(g) + a_2\big) + \big(2^{3p-2}/(\omega p')\big)\|g\|_{L^{p'}([S,T];\,V')}^{pp'} + \big(2^{3p-2}/(\omega p)\big)\|x(S)\|_H^{2p} + \\
& + (2^{3p-2}/\omega)\, a_3 \|g\|_{L^{p'}([S,T];\,V')}^{p+p'} + a_2(2^{3p-2}/\omega)\|g\|_{L^{p'}([S,T];\,V')}^p\big] + \\
& \qquad + 2^{s/(2p-s)}\Big[a_1 c_1(g)\big(1 - (s/(2p))\big)\Big]^{2p/(2p-s)}\,,
\end{aligned}$$

ove si è applicata la conseguenza della diseguaglianza di Jensen già citata al prodotto

$$\|g\|_{L^{p'}([S,T];\,V')}^p \|x(S)\|_H^2\,.$$

Si ottiene quindi la (1.6.1), se si tiene conto che se $a \in [0, +\infty[$, $r, u \in [0, +\infty[$, $r \leqslant u$ risulta $a^r \leqslant a^u + 1$ e che, visto che $1/p + 1/p' = 1$, risulta $pp' = p + p'$.

Quindi per la (1.6.10) con $t = T$, dopo aver elevato alla $s/(2p)$ primo e ultimo membro dell'ultima diseguaglianza, si ottiene:

$$\begin{aligned}
\omega\int_S^T \|x(t)\|_V^p\,dt \leqslant & \|x(S)\|_H^2 + c_2(g) + \\
& + a_1\{b_1^s\|x(S)\|_H^s + [b_2^s + b_3^s]\|g\|_{L^{p'}([S,T];\,V')}^{(p's/2)\vee(ps/(2p-s))} + b_4^s + b_5^s\} + 2\beta(T - S)\,,
\end{aligned}$$

da cui segue la (1.6.2).

b) Se invece $s = 2p$ dalla (1.6.12), applicando la diseguaglianza di Gronwall (cfr. [4], Appendice, Lemma A4) alla funzione

$$t \in [S, T] \mapsto \|x(t)\|_H^{2p} \in \mathbf{R}\,,$$

si ottiene per ogni $t \in [S, T]$:

$$\|x(t)\|_H^{2p} \leqslant d_1\big(x(S), g\big) \exp\big(a_1 c_1(g)\big)$$

da cui segue la (1.6.3) e, tenendo conto della (1.6.10) per $t = T$, si ha la (1.6.4).

c) Se ora $s > 2p$ e se vale la (1.6.5), applicando il teorema del n. 0.2 alla funzione:

$$t \in [S, T] \mapsto \|x(t)\|_H^{2p} \in \mathbf{R}$$

con $r = s/(2p)$, dalla (1.6.12) segue che per ogni $t \in [S, T]$:

$$\|x(t)\|_H^{2p} \leqslant d_1\big(x(S), g\big) \cdot \\ \cdot \Big\{1 - \big(d_1(x(S), g)\big)^{s/(2p)-1} a_1 c_1(g)\big((s/(2p)) - 1\big)\Big\}^{-1/((s/(2p))-1)},$$

da cui segue la (1.6.6) e, per la (1.6.10) con $t = T$, si ha la (1.6.7).

d) Se $\tilde{A}(0) \in L^{p'}([S, T]; H)$ e se $g \in L^{p'}([S, T]; H)$, dalla (1.6.11) si ottiene per ogni $t \in [S, T]$:

$$\|x(t)\|_H^2 \leqslant \|x(S)\|_H^2 + 2\big(\|\tilde{A}(0)\|_{L^{p'}([S,T];H)} + \|g\|_{L^{p'}([S,T];H)}\big)\|x\|_{L^p([S,t];H)}$$

per cui, elevando entrambi i membri alla $(2 \vee p)/2$ e tenendo conto che $(1/p)\big((2 \vee p)/2\big) = (1/p) \vee (1/2)$, si ha:

$$\|x(t)\|_H^{2\vee p} \leqslant 2^{((2\vee p)/2)-1}\|x(S)\|_H^{2\vee p} + 2^{(2\vee p)-1}\|\tilde{A}(0)\|_{L^{p'}([S,T];H)} + \\ + \|g\|_{L^{p'}([S,T];H)}\big)^{(2\vee p)/2}\Big(\int_S^t \|x(\tau)\|_H^p \, d\tau\Big)^{(1/p)\vee(1/2)} \leqslant 2^{((2\vee p)/2)-1}\|x(S)\|_H^{2\vee p} + \\ + \big(2^{((2\vee p)-1)(2\vee p')}/(p' \vee 2)\big)\big(\|\tilde{A}(0)\|_{L^{p'}([S,T];H)} + \|g\|_{L^{p'}([S,T];H)}\big)^{(2\vee p)(2\vee p')/2} + \\ + \big(1/(p \wedge 2)\big)\int_S^t \|x(\tau)\|_H^p \, d\tau,$$

ove si è applicata la conseguenza della diseguaglianza di Jensen già citata con esponenti $2 \vee p'$ e $2 \wedge p$. Dunque per ogni $t \in [S, T]$ si ha:

$$\|x(t)\|_H^{2\vee p} \leqslant \big(d_3(x(S), g)\big)^{2\vee p} + (1/2)\int_S^t \|x(\tau)\|_H^{p\vee 2}\, d\tau$$

e, applicando la diseguaglianza di Gronwall (cfr. [4], Appendice, Lemma A4) alla funzione:

$$t \in [S, T] \mapsto \|x(t)\|_H^{2\vee p} \in \mathbf{R}\,,$$

si ottiene per ogni $t \in [S, T]$:

$$\|x(t)\|_H^{2\vee p} \leqslant \big(d_4(x(S), g)\big)^{2\vee p}\,,$$

da cui segue la (1.6.8) e, per la (1.6.10) con $t = T$, si ha la (1.6.9).

Diamo ora un enunciato in una forma più generale di quella che sarebbe necessaria per l'uso che ne faremo nel presente lavoro, ma che ci sarà utile nelle prove di un prossimo lavoro ([3]).

1.7. Osservazione. Valgano le ipotesi *a*), *b*), *c*), *d*) del n. 1.2. Sia $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ successione generalizzata, $x_\alpha \in W^p(S, T)$ per ogni $\alpha \in I$, siano $x \in W^p(S, T)$, $\chi \in L^{p'}([S, T]; V')$ e supponiamo che:

(1.7.1) $$\lim_{\alpha\in I} x_\alpha = x \text{ in } \sigma\big(L^p([S, T]; V), L^{p'}([S, T]; V')\big)$$

(1.7.2) $$\lim_{\alpha\in I} \|x_\alpha(S) - x(S)\|_H = 0$$

(1.7.3) $$\lim_{\alpha\in I} x_\alpha(T) = x(T) \quad \text{in } \sigma(H, H)$$

(1.7.4) $$\lim_{\alpha\in I} \tilde{A}(x_\alpha) = \chi \quad \text{in } \sigma\big(L^{p'}([S, T]; V'), L^p([S, T]; V)\big)$$

(1.7.5) $$\lim_{\alpha\in I} \langle x'_\alpha + \tilde{A}(x_\alpha), x_\alpha\rangle_{L^{p'}([S,T];V')\times L^p([S,T];V)} = \\ = \langle x' + \chi, x\rangle_{L^{p'}([S,T];V')\times L^p([S,T];V)}\,.$$

Allora $\tilde{A}(x) = \chi$.

Dimostrazione. Sia $\alpha \in I$. Dalla monotonia di $\tilde{A}$ (cfr. *c*) dell'osservazione del n. 1.5) segue che per ogni $\xi \in L^p([S, T]; V)$

(1.7.6) $$X_\alpha = \int_S^T \langle(\tilde{A}(x_\alpha))(t) - (\tilde{A}(\xi))(t), x_\alpha(t) - \xi(t)\rangle_{V'\times V}\, dt \geqslant 0$$

e inoltre, per [2] (Teorema del n. 1.11), risulta:

$$\int_S^T \langle (\tilde{A}(x_\alpha))(t), x_\alpha(t)\rangle_{V'\times V}\, dt = \int_S^T \langle (x'_\alpha + \tilde{A}(x_\alpha))(t), x_\alpha(t)\rangle_{V'\times V}\, dt + \\ - \tfrac{1}{2}\, \|x_\alpha(T)\|_H^2 + \tfrac{1}{2}\, \|x_\alpha(S)\|_H^2$$

e quindi

$$X_\alpha = \int_S^T \langle (x'_\alpha + \tilde{A}(x_\alpha))(t), x_\alpha(t)\rangle_{V'\times V}\, dt - \tfrac{1}{2}\, \|x_\alpha(T)\|_H^2 + \tfrac{1}{2}\, \|x_\alpha(S)\|_H^2 + \\ - \int_S^T \langle (\tilde{A}(x_\alpha))(t), \xi(t)\rangle_{V'\times V}\, dt - \int_S^T \langle (\tilde{A}(\xi))(t), x_\alpha(t) - \xi(t)\rangle_{V'\times V}\, dt\,.$$

Dalla (1.7.3), per la semicontinuità inferiore di $\|\ \|_H$ nella topologia $\sigma(H, H)$, segue che

$$\liminf_{\alpha\in I} \|x_\alpha(T)\|_H^2 \geqslant \|x(T)\|_H^2;$$

pertanto, tenendo conto delle (1.7.5), (1.7.2), (1.7.4), (1.7.1), si ha:

$$\text{(1.7.7)}\qquad \limsup_{\alpha\in I} X_\alpha \leqslant \int_S^T \langle (x' + \chi)(t), x(t)\rangle_{V'\times V}\, dt - \tfrac{1}{2}\, \|x(T)\|_H^2 + \\ + \tfrac{1}{2}\, \|x(S)\|_H^2 - \int_S^T \langle \chi(t), \xi(t)\rangle_{V'\times V}\, dt - \int_S^T \langle (\tilde{A}(\xi))(t), x(t) - \xi(t)\rangle_{V'\times V}\, dt$$

e quindi, per [2] (Teorema del n. 1.11), per la (1.7.6) e la (1.7.7), risulta:

$$\text{(1.7.8)}\qquad 0 \leqslant \limsup_{\alpha\in I} X_\alpha \leqslant \int_S^T \langle \chi(t) - (\tilde{A}(\xi))(t), x(t) - \xi(t)\rangle_{V'\times V}\, dt \\ \text{per ogni } \xi \in L^p([S, T];\ V)\,.$$

Sia ora $\xi = x - \lambda\eta$, $\lambda \in \mathbf{R}_+$, $\eta \in L^p([S, T];\ V)$. Allora dalla (1.7.8) segue che:

$$\lambda\int_S^T \langle \chi(t) - (\tilde{A}(x-\lambda\eta))(t), \eta(t)\rangle_{V'\times V}\, dt \geqslant 0 ,$$

da cui

$$\int_S^T \langle \chi(t) - (\tilde{A}(x-\lambda\eta))(t), \eta(t)\rangle_{V'\times V}\, dt \geqslant 0 \qquad \text{per ogni } \eta \in L^p([S,T];V)$$

e, per la emicontinuità di $\tilde{A}$ (cfr. *b*) dell'osservazione del n. 1.5), facendo tendere λ a 0, si ottiene:

$$\int_S^T \langle \chi(t) - (\tilde{A}(x))(t), \eta(t)\rangle_{V'\times V}\, dt \geqslant 0 \qquad \text{per ogni } \eta \in L^p([S,T];V)$$

e quindi $\chi = \tilde{A}(x)$.

1.8. Teorema. Valgano le ipotesi del n. 1.2.

Siano $g \in L^{p'}([S,T];V')$ e $x_S \in H$. Supponiamo che valga almeno una delle seguenti condizioni:

a) sia $s \leqslant 2p$;

b) sia $s > 2p$ e sia $k(\|x_S\|_H, \|g\|_{L^{p'}([S,T];V')}) < 1$ (ove k è come nell'osservazione del n. 1.6);

c) sia $g \in L^{p'}([S,T];H)$ e sia $\tilde{A}(0) \in L^{p'}([S,T];H)$.

Allora esiste unico $x \in W^p(S,T)$ tale che

$$x' + \tilde{A}(x) = g$$

$$x(S) = x_S .$$

Dimostrazione. Consideriamo l'insieme $\mathcal{V}$ dei sottospazi Z di dimensione finita di V e ordiniamoli parzialmente per inclusione: se $Z_1, Z_2 \in \mathcal{V}$ scriviamo che

$$Z_1 \geqslant Z_2 \qquad \text{se } Z_1 \supset Z_2 .$$

In tal modo $\mathfrak{V}$, con l'ordinamento $\geqslant$, risulta un insieme diretto. Se $Z \in \mathfrak{V}$ sia $\{z_j^{(Z)}: j = 1, \ldots, n_Z\}$ una base algebrica di Z ($n_Z = \dim Z$) ed è lecito supporre che $\{i(z_j^{(Z)}): j = 1, \ldots, n_Z\}$ sia sistema O.N. in H, poichè è una parte libera e si può eventualmente ortonormalizzare con il procedimento di Hilbert Schmidt ed è tutto lecito poichè i è un'immersione.

Allora, se $h \in i(Z)$, si ha:

$$h = \sum_{j=1}^{n_Z} a_j\, i(z_j^{(Z)})$$

con $a_j \in \mathbf{R}$ per ogni $j \in \{1, \ldots, n_Z\}$ e, visto che $\{i(z_j^{(Z)}): j = 1, \ldots, n_Z\}$ è sistema O.N. in H, risulta:

$$a_j = \langle h, i(z_j^{(Z)})\rangle_{H\times H} \qquad \text{per ogni } j \in \{1, \ldots, n_Z\}\,.$$

Poichè $i(V)$ è denso in H, esistono dei punti $x_n \in V$ ($n \in \mathbf{N}$) tali che

$$\|i(x_n) - x_S\|_H \to 0\ .$$

Per ogni $Z \in \mathfrak{V}$ definiamo ora

$$y_Z = \begin{cases} x_{h_Z} & \text{ove } h_Z = \sup\{h \in \{1, \ldots, n_Z\}: x_h \in Z\} \text{ se esiste } h \in \{1, \ldots, n_Z\} \\ & \text{tale che } x_h \in Z \\ 0 & \text{se } x_h \notin Z \text{ per alcun } h \in \{1, \ldots, n_Z\}. \end{cases}$$

Allora

$$\lim_{Z \in \mathfrak{V}} \|i(y_Z) - x_S\|_H = 0\ . \tag{1.8.1}$$

Infatti, poichè $\|i(x_n) - x_S\|_H \to 0$, sappiamo che per ogni $\varepsilon \in \mathbf{R}_+$ esiste $n_\varepsilon \in \mathbf{N}$ tale che se $n > n_\varepsilon$ allora $\|i(x_n) - x_S\|_H < \varepsilon$. Allora, se $Z_\varepsilon \in \mathfrak{V}$ è tale che $\dim Z_\varepsilon = n_\varepsilon + 1$ e $x_{n_\varepsilon+1} \in Z_\varepsilon$, risulta che:

se $Z \geqslant Z_\varepsilon$, allora $y_Z = x_{h_Z}$ e $h_Z \geqslant n_\varepsilon + 1$ per definizione di h_Z, poichè $x_{n_\varepsilon+1} \in Z_\varepsilon \subset Z$ e poichè $\dim Z_\varepsilon = n_\varepsilon + 1 \leqslant \dim Z$, per cui

$$\|i(y_Z) - x_S\|_H < \varepsilon\ .$$

D'altra parte $i(Z)$ è isomorfo isometricamente ad $\mathbf{R}^{n_Z}$ per ogni $Z \in \mathfrak{V}$.

Inoltre per ogni $Z \in \mathcal{V}$ la funzione f_Z: $[S, T] \times \mathbf{R}^{n_Z} \to \mathbf{R}^{n_Z}$, la cui componente j-esima $(f_Z)_j$ verifica:

$$(f_Z)_j(t, x) = \begin{cases} -\left\langle (A(t))\left(\sum_{k=1}^{n_Z} x_k z_k^{(Z)}\right), z_j^{(Z)} \right\rangle_{V' \times V} + \langle g(t), z_j^{(Z)} \rangle_{V' \times V} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{se } t \in [S, T] \setminus E'_A \\ 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{se } t \in E'_A \end{cases}$$

(ove $E'_A = E_A \cup \{t \in [S, T]: \lambda_0(t) = +\infty\}$, per cui $|E'_A| = 0$) per ogni $x \in \mathbf{R}^{n_Z}$, $x = (x_1, \dots, x_{n_Z})$, $j = 1, \dots, n_Z$, è integranda di Carathéodory, poichè, per la b), la c), la d) delle ipotesi del n. 1.2, $A(t)$ è continuo da V con la topologia indotta dalla norma a V' con la topologia $\sigma(V', V)$ per ogni $t \in [S, T] \setminus E'_A$ (cfr. [7], Cap. 2, § 2, Nota (1) alla definizione 2.1 e proposizione 2.5) e per la a) delle ipotesi del n. 1.2. Quindi per il teorema di Carathéodory (cfr. [5], Cap. 1, § 5, dimostrazione del teorema 5.1) per ogni $Z \in \mathcal{V}$ esistono $t_Z \in]S, T[$ e $w_Z \in AC([S, t_Z]; \mathbf{R}^{n_Z})$ tali che

$$\begin{cases} (w_Z)'_j(t) + \left\langle (A(t))\left(\sum_{k=1}^{n_Z} (w_Z)_k(t) z_k^{(Z)}\right), z_j^{(Z)} \right\rangle_{V' \times V} = \langle g(t), z_j^{(Z)} \rangle_{V' \times V} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{per q.o. } t \in]S, t_Z[, \text{ per ogni } j \in \{1, \dots, n_Z\} \\ w_Z(S) = \left(\langle i(y_Z), i(z_j^{(Z)}) \rangle_{H \times H}: j = 1, \dots, n_Z\right) \end{cases}$$

(ove $(w_Z)_j$ indica la componente j-esima di w_Z e $(w_Z)'_j = [(w_Z)_j]'$, $j = 1, \dots, n_Z$). Se ora $x_Z(t) = \sum_{j=1}^{n_Z} (w_Z)_j(t) z_j^{(Z)} \in Z$ per ogni $t \in [S, t_Z]$, risulta $x_Z \in AC([S, t_Z]; Z)$ e

$$\begin{aligned} \langle (i' \circ i)(x'_Z(t)), z_j^{(Z)} \rangle_{V' \times V} &= \left\langle (i' \circ i)\left(\sum_{k=1}^{n_Z} (w_Z)'_k(t) z_k^{(Z)}\right), z_j^{(Z)} \right\rangle_{V' \times V} = \\ &= \sum_{k=1}^{n_Z} \langle (i' \circ i)(z_k^{(Z)}), z_j^{(Z)} \rangle_{V' \times V} (w_Z)'_k(t) = (w_Z)'_j(t) = \\ &= -\left\langle (A(t))\left(\sum_{k=1}^{n_Z} (w_Z)_k(t) z_k^{(Z)}\right), z_j^{(Z)} \right\rangle_{V' \times V} + \\ &+ \langle g(t), z_j^{(Z)} \rangle_{V' \times V} = -\langle (A(t))(x_Z(t)), z_j^{(Z)} \rangle_{V' \times V} + \langle g(t), z_j^{(Z)} \rangle_{V' \times V} \end{aligned}$$

per q.o. $t \in]S, t_Z[$ e

$$x_Z(S) = \sum_{j=1}^{n_Z} (w_Z)_j(S) z_j^{(Z)} = \sum_{j=1}^{n_Z} \langle i(y_Z), i(z_j^{(Z)}) \rangle_{H \times H} z_j^{(Z)} = y_Z ,$$

per cui x_Z verifica il seguente sistema e la seguente condizione iniziale:

$$(1.8.2)\quad \begin{cases} \langle (i' \circ i)(x'_Z(t)), z_j^{(Z)} \rangle_{V' \times V} + \langle (A(t))(x_Z(t)), z_j^{(Z)} \rangle_{V' \times V} = \\ = \langle g(t), z_j^{(Z)} \rangle_{V' \times V} \qquad \text{per q.o. } t \in]S, t_Z[, \text{ per ogni } j \in \{1, \ldots, n_Z\} \\ x_Z(S) = y_Z . \end{cases}$$

Dunque $x_Z \in W^p(S, t_Z)$, poichè dal fatto che $x_Z \in AC([S, t_Z]; Z)$ segue che $x_Z \in L^p([S, t_Z]; V)$ e inoltre dal sistema (1.8.2) e dal fatto che

$$x'_Z(t) = \sum_{j=1}^{n_Z} \langle (i' \circ i)(x'_Z(t)), z_j^{(Z)} \rangle_{V' \times V} z_j^{(Z)} \qquad \text{per q.o. } t \in]S, t_Z[$$

segue che $x'_Z \in L^{p'}([S, t_Z]; V)$.

Inoltre, poichè $x_Z(t) \in Z$ per ogni $t \in [S, t_Z]$ e $x'_Z(t) \in Z$ per q.o. $t \in]S, t_Z[$ si ha per ogni $t \in [S, t_Z]$:

$$x_Z(t) = \sum_{j=1}^{n_Z} \langle x_Z(t), (i' \circ i)(z_j^{(Z)}) \rangle_{V \times V'} z_j^{(Z)}$$

e per q.o. $t \in]S, t_Z[$:

$$x'_Z(t) = \sum_{j=1}^{n_Z} \langle x'_Z(t), (i' \circ i)(z_j^{(Z)}) \rangle_{V \times V'} z_j^{(Z)} .$$

Allora, moltiplicando la j-esima equazione del sistema (1.8.2) per $\langle (i' \circ i)(z_j^{(Z)}), x_Z(t) \rangle_{V' \times V}$ e sommando su j ($j = 1, \ldots, n_Z$), si ottiene per q.o. $t \in]S, t_Z[$:

$$\Big\langle (i' \circ i)(x'_Z(t)), \sum_{j=1}^{n_Z} \langle (i' \circ i)(z_j^{(Z)}), x_Z(t) \rangle_{V' \times V} z_j^{(Z)} \Big\rangle_{V' \times V} +$$
$$+ \Big\langle (\tilde{A}(x_Z))(t), \sum_{j=1}^{n_Z} \langle (i' \circ i)(z_j^{(Z)}), x_Z(t) \rangle_{V' \times V} z_j^{(Z)} \Big\rangle_{V' \times V} =$$
$$= \Big\langle g(t), \sum_{j=1}^{n_Z} \langle (i' \circ i)(z_j^{(Z)}), x_Z(t) \rangle_{V' \times V} z_j^{(Z)} \Big\rangle_{V' \times V} ,$$

per cui per q.o. $t \in]S, t_Z[$:

$$(1.8.3)\quad \langle (i' \circ i)(x'_Z(t)), x_Z(t) \rangle_{V' \times V} + \langle (\tilde{A}(x_Z))(t), x_Z(t) \rangle_{V' \times V} = \\ = \langle g(t), x_Z(t) \rangle_{V' \times V} .$$

Sia ora $Z_0 = \{0\}$ se vale almeno una tra le due condizioni a) e c) e altrimenti siano $Z_0 \in \mathcal{V}$ e $k_0 < 1$ tali che per ogni $Z \geqslant Z_0$ si abbia:

$$k\big(\|i(y_Z)\|_H, \|g\|_{L^{p'}([S,T];V')}\big) \leqslant k_0 \tag{1.8.4}$$

ove k è come nell'osservazione del n. 1.6 (ciò è possibile per la (1.8.1) e poichè in questo secondo caso vale la b)). Quindi per la (1.8.1), per la (1.8.4), poichè $x_Z(S) = y_Z$ per ogni $Z \in \mathcal{V}$ e per l'osservazione del n. 1.6 si ha che esistono $Z_1 \in \mathcal{V}$, $Z_1 \geqslant Z_0$ e $K_0 \in \mathbb{R}_+$, K_0 dipendente solo da $k_0, p, s, \omega, \|\lambda_0\|_{L^{p'}([S,T])}, \alpha, \beta, S, T, \|x_S\|_H, \|g\|_{L^{p'}([S,T];V')}$ (e anche da $\|g\|_{L^{p'}([S,T];H)}, \|\tilde{A}(0)\|_{L^{p'}([S,T];H)}$ se vale la c)) tali che se $Z \geqslant Z_1$ risulti:

$$\|x_Z\|_{L^p([S,t_Z];V)} \leqslant K_0 \tag{1.8.5}$$

$$\|x_Z\|_{\mathcal{C}([S,t_Z];H)} \leqslant K_0\,. \tag{1.8.6}$$

Poichè vale la (1.8.6), x_Z è soluzione del sistema (1.8.2) su tutto $]S, T[$ $(Z \geqslant Z_1)$ (cfr. [5], Cap. 1, § 5, dimostrazione del teorema 5.2). Dalle (1.8.5) e (1.8.6) segue che:

$(x_Z)_{Z \geqslant Z_1}$ è un limitato di $L^p([S, T]; V)$, $(x_Z(T))_{Z \geqslant Z_1}$ è in un limitato di H e, per la a) dell'osservazione del n. 1.5, $(\tilde{A}(x_Z))_{Z \geqslant Z_1}$ è in un limitato di $L^{p'}([S, T]; V')$. Quindi per il teorema di Alaoglu esiste $(x_{\beta(k)})_{k \in K}$ successione generalizzata estratta da $(x_Z)_{Z \geqslant Z_1}$ (ove cioè K è un insieme diretto e $\beta\colon K \to \{Z \in \mathcal{V}\colon Z \geqslant Z_1\}$ è crescente e tale che per ogni $Z \in \mathcal{V}$, $Z \geqslant Z_1$ esista $k \in K$ per cui $\beta(k) \geqslant Z$) ed esistono $x \in L^p([S, T]; V)$, $x_T \in H$, $\chi \in L^{p'}([S, T]; V')$ tali che:

$$\lim_{k \in K} x_{\beta(k)} = x \quad \text{in } \sigma\big(L^p([S, T]; V), L^{p'}([S, T]; V')\big) \tag{1.8.7}$$

$$\lim_{k \in K} x_{\beta(k)}(T) = x_T \quad \text{in } \sigma(H, H) \tag{1.8.8}$$

$$\lim_{k \in K} \tilde{A}(x_{\beta(k)}) = \chi \quad \text{in } \sigma\big(L^{p'}([S, T]; V'), L^p([S, T]; V)\big)\,. \tag{1.8.9}$$

Se X è uno spazio di Banach su $\mathbb{R}$ e $w\colon [S, T] \to X$, denotiamo ora con $\hat{w}\colon \mathbb{R} \to X$ l'applicazione così definita

$$\hat{w}(t) = \begin{cases} w(t) & \text{se } t \in [S, T] \\ 0 & \text{se } t \in \mathbb{R} \setminus [S, T]\,. \end{cases}$$

Allora dal sistema (1.8.2) si ricava che per ogni $k \in K$ e $j \in \{1, \dots, n_{\beta(k)}\}$:

$$(1.8.10) \qquad \langle (i' \circ i)(\widehat{x_{\beta(k)}})', z_j^{(\beta(k))} \rangle_{\mathfrak{D}'(\mathbf{R}; V') \times V} + \langle \widehat{\tilde{A}(x_{\beta(k)})}, z_j^{(\beta(k))} \rangle_{\mathfrak{D}'(\mathbf{R}; V') \times V} =$$
$$= \langle \hat{g}, z_j^{(\beta(k))} \rangle_{\mathfrak{D}'(\mathbf{R}; V') \times V} + \langle (i' \circ i)(y_{\beta(k)}), z_j^{(\beta(k))} \rangle_{V' \times V} \delta_S +$$
$$- \langle (i' \circ i)(x_{\beta(k)}(T)), z_j^{(\beta(k))} \rangle_{V' \times V} \delta_T \quad \text{in } \mathfrak{D}'(\mathbf{R}),$$

ove $(\widehat{x_{\beta(k)}})'$ denota la derivata di $\widehat{x_{\beta(k)}}$ nel senso delle distribuzioni $\mathfrak{D}'(\mathbf{R}; \beta(k))$, δ_S e δ_T le misure di Dirac di supporto rispettivamente $\{S\}$ e $\{T\}$, per ogni $y \in X$ e per ogni $\tau \in \mathfrak{D}'(\mathbf{R}; X')$ (ove X è uno spazio di Banach riflessivo su $\mathbf{R}$, X' il suo duale) $\langle \tau, y \rangle_{\mathfrak{D}'(\mathbf{R}; X') \times X}$ denota l'elemento di $\mathfrak{D}'(\mathbf{R})$ tale che per ogni $\varphi \in \mathfrak{D}(\mathbf{R})$ si abbia:

$$\langle \langle \tau, y \rangle_{\mathfrak{D}'(\mathbf{R}; X') \times X}, \varphi \rangle_{\mathfrak{D}'(\mathbf{R}) \times \mathfrak{D}(\mathbf{R})} = \langle \langle \tau, \varphi \rangle_{\mathfrak{D}'(\mathbf{R}; X') \times \mathfrak{D}(\mathbf{R})}, y \rangle_{X' \times X}$$

e, se $\tau \in \mathfrak{D}'(\mathbf{R}; V)$, $(i' \circ i)\tau$ denota l'elemento di $\mathfrak{D}'(\mathbf{R}; V')$ tale che per ogni $\varphi \in \mathfrak{D}(\mathbf{R})$ si abbia:

$$\langle (i' \circ i)\tau, \varphi \rangle_{\mathfrak{D}'(\mathbf{R}; V') \times \mathfrak{D}(\mathbf{R})} = (i' \circ i)(\langle \tau, \varphi \rangle_{\mathfrak{D}'(\mathbf{R}; V) \times \mathfrak{D}(\mathbf{R})}) .$$

Dalla (1.8.10) segue allora che per ogni $k \in K$ e per ogni $v \in \beta(k)$:

$$(1.8.11) \qquad \langle (i' \circ i)(\widehat{x_{\beta(k)}})', v \rangle_{\mathfrak{D}'(\mathbf{R}; V') \times V} + \langle \widehat{\tilde{A}(x_{\beta(k)})}, v \rangle_{\mathfrak{D}'(\mathbf{R}; V') \times V} =$$
$$= \langle \hat{g}, v \rangle_{\mathfrak{D}'(\mathbf{R}; V') \times V} + \langle (i' \circ i)(y_{\beta(k)}), v \rangle_{V' \times V} \delta_S +$$
$$- \langle (i' \circ i)(x_{\beta(k)}(T)), v \rangle_{V' \times V} \delta_T \quad \text{in } \mathfrak{D}'(\mathbf{R}) .$$

Dunque per la (1.8.7) e poichè la derivata è continua nelle distribuzioni si ha per ogni $v \in V$:

$$(1.8.12) \qquad \lim_{k \in K} \langle (i' \circ i)(\widehat{x_{\beta(k)}})', v \rangle_{\mathfrak{D}'(\mathbf{R}; V') \times V} = \langle (i' \circ i)(\hat{x})', v \rangle_{\mathfrak{D}'(\mathbf{R}; V') \times V} \quad \text{in } \mathfrak{D}'(\mathbf{R}) .$$

D'altra parte per ogni $v \in V$ esiste $Z_v \in \mathfrak{V}$ tale che $v \in Z_v$ e quindi, per definizione di β, esiste $k_v \in K$ tale che $\beta(k_v) \geqslant Z_v$ e quindi, se $k \geqslant k_v$, risulta $\beta(k) \geqslant \beta(k_v) \geqslant Z_v$ e quindi $v \in \beta(k)$ per ogni $k \in K$, $k \geqslant k_v$. Per cui, passando al $\lim\limits_{\substack{k \in K \\ k \geqslant k_v}}$ in $\mathfrak{D}'(\mathbf{R})$ nella (1.8.11) tenendo conto delle (1.8.1), (1.8.8), (1.8.9), (1.8.12), si ottiene:

$$\langle (i' \circ i)(\hat{x})', v\rangle_{\mathfrak{D}'(\mathbf{R};\,V')\times V} + \langle \hat{\chi}, v\rangle_{\mathfrak{D}'(\mathbf{R};\,V')\times V} = \langle \hat{g}, v\rangle_{\mathfrak{D}'(\mathbf{R};\,V')\times V} + \\ + \langle i'(x_S), v\rangle_{V'\times V}\,\delta_S - \langle i'(x_T), v\rangle_{V'\times V}\,\delta_T\,,$$

per cui si ricava:

$$(\hat{x})' + \hat{\chi} = \hat{g} + x_S\,\delta_S - x_T\,\delta_T \quad \text{in } \mathfrak{D}'(\mathbf{R};\,V) \tag{1.8.13}$$

e, restringendo a $]S, T[$, si ha:

$$x' + \chi = g \quad \text{in } \mathfrak{D}'(]S, T[;\, V)\,,$$

da cui segue che $x' \in L^{p'}([S, T];\, V')$ e perciò $x \in W^p(S, T)$ e

$$(\hat{x})' + \hat{\chi} = \hat{g} + x(S)\,\delta_S - x(T)\,\delta_T \quad \text{in } \mathfrak{D}'(\mathbf{R};\,V)$$

e quindi, confrontando l'ultima relazione ottenuta con la (1.8.13), si conclude che:

$$x(S) = x_S \quad \text{e} \quad x(T) = x_T\,.$$

Per quanto riguarda la prova dell'esistenza si conclude, tenendo conto che vale la (1.8.3) e che quindi dall'osservazione del n. 1.7 segue che

$$\tilde{A}(x) = \chi\,.$$

Per quanto riguarda la prova dell'unicità, se x_1 e x_2 sono due soluzioni e se $y = x_1 - x_2$, risulta:

$$y'(t) + \big(\tilde{A}(x_1)\big)(t) - \big(\tilde{A}(x_2)\big)(t) = 0 \quad \text{per q.o. } t \in \,]S, T[$$
$$y(S) = 0\,,$$

da cui

$$\langle y'(t), y(t)\rangle_{V'\times V} + \langle \big(\tilde{A}(x_1)\big)(t) - \big(\tilde{A}(x_2)\big)(t), x_1(t) - x_2(t)\rangle_{V'\times V} = 0$$

per q.o. $t \in \,]S, T[$ e, per la *d*) delle ipotesi del n. 1.2:

$$\langle y'(t), y(t)\rangle_{V'\times V} \leqslant 0 \quad \text{per q.o. } t \in \,]S, T[$$

e quindi per [2] (Teorema del n. 1.11):

$$\tfrac{1}{2}\big(\tau\in[S,T]\mapsto\|y(\tau)\|_H^2\in\mathbf{R}\big)'(t)=\langle y'(t),y(t)\rangle_{V'\times V}\leqslant 0$$

per q.o. $t\in\,]S,T[$, che implica:

$$\|y(t)\|_H\leqslant\|y(S)\|_H=0\qquad\text{per ogni } t\in[S,T]\,,$$

per cui

$$y=0\,.$$

1.9. Osservazione. Si noti che, se non è verificata la condizione a) delle ipotesi del teorema del n. 1.8, allora la condizione b) delle stesse ipotesi, fissati che siano $g\in L^{p'}([S,T];\,V')$ e $x_S\in H$, è sempre verificata pur di cercare la soluzione su un intervallo $[S,t]$ sufficientemente piccolo. Pertanto il teorema del n. 1.8 fornisce un teorema di esistenza e unicità locale della soluzione del problema di Cauchy

$$x'+\tilde{A}(x)=g$$

$$x(S)=x_S$$

qualunque sia $s\in\mathbf{R}_+$.

BIBLIOGRAFIA

[1] V. Barbu - Th. Precupanu, *Convexity and Optimization in Banach Spaces*, Editura Academiei Sijthoff and Noordhoff, Bucareşti, România (1978).

[2] A. Bottaro Aruffo, *Teoremi di esistenza del minimo per problemi di Bolza e di Lagrange in spazi di Banach*, in corso di pubblicazione su Annali di Matematica Pura e Applicata.

[3] A. Bottaro Aruffo, *Teoremi di esistenza del minimo per problemi di Bolza con stato a valori in spazi di Banach*, in corso di pubblicazione su Annali di Matematica Pura e Applicata.

[4] W. H. Fleming - R. W. Rishel, *Deterministic and Stochastic Optimal Control*, Springer, New York (1975).

[5] J. K. Hale, *Ordinary Differential Equations*, Wiley Interscience (1969).

[6] E. Hille - R. S. Phillips, *Functional Analysis and Semi-Groups*, American Mathematical Society, Colloquium publications, Vol. XXXI (1957).

[7] J. L. Lions, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Dunod, Gauthier-Villars (1969).

Manoscritto pervenuto in redazione il 6 luglio 1979.