Rendiconti
del
Seminario Matematico
della
Università di Padova

Edoardo Ballico

Fibrati principali su spazi complessi q-completi

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 63 (1980), p. 199-202
<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1980__63__199_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 63 (1980)

Fibrati principali su spazi complessi q-completi.

EDOARDO BALLICO (*)

SUMMARY - Let G be a Stein group with a finite number of connected components. We prove that a principal bundle with a q-complete base and G as structural group is a q-complete complex space.

Si dimostra che ogni fibrato principale la cui base è uno spazio complesso q-completo e il cui gruppo strutturale è di Stein e ha un numero finito di componenti connesse, è q-completo. Il risultato è noto per gli spazi di Stein cioè per gli spazi 0-completi [2].

Per la dimostrazione di questo teorema si usano i risultati e le tecniche di [2] e il seguente

TEOREMA 1. *Ogni fibrato vettoriale olomorfo su uno spazio complesso q-completo è uno spazio complesso q-completo.*

La dimostrazione di questo teorema data in [3] si estende con lievi cambiamenti dal caso in cui la base è non singolare, che è ivi trattato, al caso generale in cui la base è uno spazio analitico qualsiasi.

TEOREMA 2. *Sia X uno spazio analitico q-completo, G un gruppo di Stein con un numero finito di componenti connesse e P un fibrato principale di base X e gruppo strutturale G. Allora P è q-completo.*

DIM. *a*) Consideriamo dapprima il caso $G = GL(1, C) = C^*$. Sia $p: E \to X$ il fibrato olomorfo in rette associato a P. Per il teorema 1,

(*) Indirizzo dell'A.: Scuola Normale Superiore, Piazza Cavalieri 7, 56100 Pisa.

Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.S.A.G.A. del C.N.R.

E è q-completo. Inoltre P è il complementare in E della sezione nulla.

Nella dimostrazione di [3] del teorema 1 si procede in questo modo. Si prende una opportuna metrica hermitiana h su E ed una funzione non negativa u che definisca la q-completezza di X. Allora, indicata con z la coordinata locale di E lungo le fibre, $hz\bar{z} + p^*(u)$ definisce la q-completezza di E. Si consideri la funzione $hz\bar{z} - \log(hz\bar{z})$ definita su P e ivi non negativa. La sua forma di Levi è, per qualsiasi sistema di coordinate locali in E, limitata in un intorno di ogni punto di E e definisce in modo naturale una forma hermitiana continua su E. Perciò, con una semplice estensione al caso non singolare del lemma 1 di [3], troviamo una funzione differenziale su E $g \geqslant hz\bar{z} + p^*(u)$ tale che la forma di Levi della funzione non negativa b su P definita da $b\big((x, z)\big) = g - \log(hz\bar{z})$ abbia in ogni punto al massimo q autovalori negativi o nulli. Inoltre la funzione b è esaustiva e quindi P è q-completo.

b) Sia $G = SL(n, C)$. Sia P' il fibrato principale con gruppo strutturale $GL(n, C)$ ed E il fibrato vettoriale associati a P in modo naturale. Siano $g_{ij}(x) \in SL(n, C)$ le funzioni di transizione, rispetto ad opportune trivializzazioni locali, di P, P' ed E.

Consideriamo il fibrato vettoriale di rango n^2 su X

$$F = \operatorname{Hom}(X \times C^n, E) = E \otimes X \times C^n .$$

P' è l'aperto $\operatorname{Isom}(X \times C^n, E)$ di F: un punto di F appartiene a P' se è rappresentato da un isomorfismo su di un aperto di X tra il fibrato triviale $X \times C^n$ e il fibrato vettoriale E. Sia $M(n, n)$ l'insieme delle matrici quadrate di ordine n sul corpo C dei complessi.

In una trivializzazione locale, se $x \in X$ e $v \in M(n, n)$, il punto $(x, v) \in P'$ se e solo se $\det(v) \neq 0$.

In ogni trivializzazione di F sull'aperto U di X, è definito il determinante come funzione olomorfa di $U \times M(n, n)$ in C. Poichè $g_{ij}(x) \in SL(n, C)$, il determinante induce una funzione olomorfa ben definita a su F. Infatti basta provare che se $\otimes$ indica il prodotto di Kronecker tra matrici e G agisce su $M(n, n)$ tramite $g(b \otimes^t c) = gb \otimes^t c$, allora G agisce su $M(n, n)$ con il prodotto tra matrici. Per linearità basta verificarlo quando b (risp. c) ha tutte le componenti nulle eccetto quelle di posto 1 (risp. r); siano s^{kt} le componenti di indice (k, t) di una matrice c; allora gb è una matrice $n \times 1$ con $(gb)^{k1} = g^{kl}$ e $(bg \otimes^t c)^{ks} = 0$ se $s \neq r$, $= g^{kl}$ se $s = r$.

Per il teorema 1, F è uno spazio analitico q-completo. Ne segue che $P' = \{y \in F\colon a(y) \neq 0\}$ è q-completo; infatti, se f definisce la q-completezza di F, $f + 1/a\bar{a}$ definisce la q-completezza di P'. Allora P, come sottospazio analitico chiuso di P', è q-completo.

c) Sia $G = GL(n, C)$. Consideriamo il sottogruppo invariante $SL(n, C)$ di $GL(n, C)$. Allora $GL(n, C)/SL(n, C)$ è isomorfo *a* C^*. Per [1] theorem 3.4.4 pag. 44, $p\colon P \to X$ si fattorizza tramite una fibrazione principale localmente banale $P \to H$ con gruppo $SL(n, C)$ ed una fibrazione localmente banale $H \to X$ con gruppo $GL(n, C)$ e fibra C^*. Poichè $SL(n, C)$ è invariante ed agisce trivialmente su H, $H \to X$ è un fibrato principale con gruppo strutturale C^*.

Quindi H è q-completo per *a*); per *b*) anche P è q-completo.

d) Sia G un sottogruppo analitico chiuso di $GL(n, C)$; a P corrisponde un fibrato principale P' con gruppo strutturale $GL(n, C)$ di cui P è un sottospazio chiuso. Per *c*) P' è q-completo e quindi tale è anche P.

e) Nel caso generale sia G_0 la componente connessa dell'identità di G. Allora G_0 è un sottogruppo chiuso invariante di G e per ipotesi G/G_0 è un gruppo finito; poichè ogni rivestimento finito e non ramificato di uno spazio q-completo è q-completo, ci si riduce come in *c*) a dimostrare il teorema quando G è connesso.

f) Sia G un gruppo di Stein connesso. Procediamo per induzione su $\dim G$. Se $\dim G = 1$, G è abeliano ed isomorfo a C o C^* per il teorema di struttura dei gruppi connessi abeliani di Stein [2] theorem 1 e prop. 2. Poichè C è isomorfo ad un sottogruppo chiuso unipotente di $GL(2, C)$, il teorema è dimostrato per *d*) se $\dim G = 1$.

Sia ora $\dim G > 1$. Se G è semplice, allora è un sottogruppo chiuso di un gruppo lineare [2] prop. 1 e prop. 4 e quindi P è q-completo per la parte *d*). Consideriamo la seguente proposizione che, grazie al teorema 1 di [2], è la prop. 7 di [2].

PROPOSIZIONE. *Sia G un gruppo di Lie complesso, connesso e di Stein. Se G non è semplice, esiste un sottogruppo complesso chiuso, invariante e connesso A di G di dimensione positiva e tale che G/A è di Stein e A è un sottogruppo chiuso di un gruppo lineare complesso.*

Da questa proposizione si ottiene la tesi, anche se G non è semplice, usando l'ipotesi induttiva e ragionando come in *c*). Questo conclude la dimostrazione del teorema. c.v.d.

BIBLIOGRAFIA

[1] F. Hirzebruch, *Topological Methods in Algebraic Geometry*, Springer-Verlag, 1966.

[2] Y. Matsushima - A. Morimoto, *Sur certains espaces fibres holomorphes sur une varieté de Stein*, Bull. Soc. Math. France, **88** (1960), pp. 137-455.

[3] V. Villani, *Fibrati vettoriali olomorfi su una varietà complessa q-completa*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, **3** (1966), pp. 15-23.

Manoscritto pervenuto in redazione il 19 ottobre 1979.