RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

FRANCO PARODI

Alcune proprietà della categoria delle T-algebre

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 62 (1980), p. 75-94

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1980__62__75_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 62 (1980)

Alcune proprietà della categoria delle T-algebre.

FRANCO PARODI (*)

Introduzione.

Abbiamo introdotto in un precedente lavoro [1] la nozione di T-algebra su un $\mathfrak{T}$-anello T, struttura algebrica che assiomatizza il calcolo formale dei dispositivi [2].

Ci proponiamo nel presente lavoro di studiare alcune proprietà della categoria delle T-algebre ottenendo per questa via proprietà della categoria degli universi di dispositivi che abbiamo mostrato in [1] essere equivalente alla categoria delle T-algebre ridotte sul $\mathfrak{T}$-anello dei trasduttori elementari che diremo talora per brevità algebre di dispositivi.

Costruiamo la somma diretta di T-algebre che corrisponde nel caso di due algebre di dispositivi all'idea intuitiva della più semplice algebra in cui ci sono reti miste di dispositivi dell'una e dell'altra algebra.

Realizziamo infine la T-algebra libera generata da un insieme graduato che fornisce nel caso di algebre di dispositivi una precisazione del concetto di rete formale formata con certi simboli indeterminati.

In questo lavoro si fa costante riferimento per quanto concerne nomenclatura e notazioni al lavoro dello stesso autore: *Categoria delle T-algebre e categoria degli universi di dispositivi* [1]; rinviamo a tale lavoro per le definizioni delle nozioni di $\mathfrak{T}$-anello e di T-algebra sul $\mathfrak{T}$-anello T nonchè per il modello euristico fornito dalle reti di dispositivi.

(*) Indirizzo dell'A.: Istituto di Matematica dell'Università - Via L. B. Alberti 4 - 16132 Genova.

Lavoro eseguito nell'ambito dei gruppi di ricerca matematica del C.N.R.

1. La categoria delle T-algebre.

1.1. *Oggetto iniziale e finale, sotto oggetti e quozienti.*

Sia T un $\mathfrak{C}$-anello assegnato.

T-algebre e morfismi costituiscono una categoria, se T è permutativo le T-algebre permutative sono una sottocategoria della categoria delle T-algebre e a loro volta le T-algebre ridotte sono una sottocategoria della categoria delle T-algebre permutative.

La T-algebra « nulla » $0 = \{O^n\}_{n\in N}$ dove O^n è insieme puntiforme per ogni $n \in N$ è ovviamente oggetto finale della categoria.

La T-algebra $\{T_0^n\}_{n\in N}$ è l'oggetto iniziale della categoria.

Un morfismo di T-algebre $\Phi: H \to K$ si dirà iniettivo se è Φ^n: $H^n \to K^n$ iniettivo per ogni $n \in \mathrm{N}$.

È ovvio che i morfismi iniettivi sono « monic » nella categoria.

Un morfismo di T-algebre $\Phi: H \to K$ sarà detto suriettivo se è $\Phi^n: H^n \to K^n$ suriettivo per ogni $n \in \mathrm{N}$.

È ovvio che i morfismi suriettivi sono « epic » nella categoria.

Isomorfismi nella categoria sono tutti e soli i morfismi iniettivi e suriettivi.

Ogni morfismo di T-algebre $\Phi: H \to K$ ha fattorizzazione $\Phi = ME$ con E morfismo suriettivo ed M morfismo iniettivo; la fattorizzazione è unica a meno di isomorfismi.

La fattorizzazione si ottiene fattorizzando per ogni $n \in \mathrm{N}$ $\Phi: H^n \to K^n$ in modo canonico $H^n \to \Phi^n(H^n) \to K^n$, $(\Phi^n(H^n))_{n\in N}$ è ovviamente una T-algebra che diremo Imagine di H mediante Φ e indicheremo con la notazione $\Phi(H)$.

Sia H una T-algebra.

Una sotto-T-algebra di H è una T-algebra $K = (K^n)_{n\in N}$ tale che per ogni $n \in \mathrm{N}$ $K^n \subset H^n$ e inoltre tale inclusione è un morfismo di T-algebre.

L'insieme delle sotto-T-algebre di H è parzialmente ordinato dalla relazione di inclusione « $\subset$ »: se K, K' sono sotto-T-algebre di H, $K \subset K'$ se K è sotto-T-algebra di K'; è reticolo completo: se $\{K_i\}_{i\in I}$

è una famiglia di sotto-T-algebre di H, intersezione di tale famiglia è $\bigcap_{i\in I} K_i = \left(\bigcap_{i\in I} K_i^n\right)_{n\in\mathrm{N}}$, l'unione sarà invece $\bigcup_{i\in I} K_i$ l'intersezione della famiglia di tutte le sotto-T-algebre di H che includono ogni K_i.

La sotto-T-algebra di H generata da un insieme A di suoi elementi è l'intersezione di tutte le sotto-T-algebre di H di cui sono elementi gli elementi di A.

Se per ogni $n \in \mathrm{N}$ è data in H^n una relazione R^n, diciamo $R = (R^n)_{n\in\mathrm{N}}$ una relazione in H; useremo la notazione $h\, R\, k$ per indicare che $h, k \in H^n$ per un certo $n \in \mathrm{N}$ e $h\, R^n\, k$.

Diciamo una relazione R in H relazione di congruenza se:

i) R^n è relazione di equivalenza in K^n per ogni $n \in \mathrm{N}$,

ii) R è compatibile con il prodotto: se $h\, R^n\, k$ e $\varphi \in T_n^m$ allora $h\, R^m\, \varphi k$,

iii) R è compatibile con la somma: se $a\, R^n\, b$ e $c\, R^m\, d$ allora $(a + c)\, R^{n+m} (b + d)$.

Indicheremo con H/R la T-algebra che si ottiene quozientando H^n modulo R^n per ogni $n \in \mathrm{N}$, e la diremo la T-algebra quoziente di H modulo la relazione di congruenza R.

L'insieme delle relazioni di congruenza in H è parzialmente ordinato dalla relazione di finezza « $<$ »: se R ed S sono relazioni di congruenza in H, $R < S$ se $h\, R\, k$ implica $h\, S\, k$; è un reticolo completo: se $\{R_i\}_{i\in I}$ è una famiglia di relazioni di congruenza in H, intersezione di tale famiglia è $\bigcap_{i\in I} R_i = \left(\bigcap_{i\in I} R_i^n\right)_{n\in\mathrm{N}}$, così pure l'unione è $\bigcup_{i\in I} R_i = \left(\bigcup_{i\in I} R_i^n\right)_{n\in\mathrm{N}}$.

La relazione di congruenza in H generata da una relazione A in H è l'intersezione della famiglia di tutte le relazioni di congruenza meno fini di A.

Siano H e K T-algebre e A e B relazioni in H e K rispettivamente, sia Φ: $H \to K$ un morfismo di T-algebre tale che se $x\, A\, y$ allora $\Phi(x)\, B\, \Phi(y)$. Dette $\bar{A}$ e $\bar{B}$ le relazioni di congruenza rispettivamente generate da A e B esiste un unico morfismo di T-algebre

$\bar{\Phi}: H/\bar{A} \to K/\bar{B}$ tale che il diagramma seguente commuti

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d] & K \arrow[d] \\ H/\bar{A} \arrow[r, "\bar{\Phi}"'] & K/\bar{B} \end{tikzcd}$$

le frecce verticali sono le proiezioni canoniche sui quozienti.

1.2. *Il funtore P: T-algebre → T-algebre permutative.*

Sia T un anello permutativo.

Una T-algebra H è permutativa se per ogni $h \in H^n$, $k \in H^m$ $h + k = \tau_{m,n}(k+h)$ essendo $\tau_{m,n}$ la permutazione di scambio; più in generale, per somme di più di due addendi, la permutatività si presenta nella forma seguente: consideriamo $h_1 \in H^{n_1}$, $h_2 \in H^{n_2}$, .., $h_r \in H^{n_r}$ e $h_1 + h_2 + \ldots + h_r$, se α è una permutazione degli addendi, cioè $\alpha \in S_r$, si ha $h_1 + h_2 + \ldots + h_r = \tau_\alpha(h_{\alpha(1)} + h_{\alpha(2)} + \ldots + h_{\alpha(r)})$ essendo τ_α la permutazione di $[n_{\alpha(1)} + n_{\alpha(2)} + \ldots + n_{\alpha(r)}]$ che riordina secondo α i blocchi di $n_{\alpha(1)}, n_{\alpha(2)}, \ldots, n_{\alpha(r)}$ elementi cioè:

$$\tau_\alpha(x) = x - \sum_{i=1}^{k-1} n_{\alpha(i)} + \sum_{i=1}^{\alpha(k)-1} n_i \qquad \text{per } x: \sum_{i=1}^{k-1} n_{\alpha(i)} \leqslant x \leqslant \sum_{i=1}^{k} n_{\alpha(i)} .$$

Data una T-algebra H, per costruire da essa in modo canonico una T-algebra permutativa, sarà naturale quozientare H modulo la relazione di congruenza generata dalla relazione A in H:

$h\,A\,k$ se esistono $a \in H^r$, $b \in H^s$ tali che $h = a + b$ e

$k = \tau_{s,r}(b + a)$ o meglio dalla relazione A in H:

$h\,A\,k$ se esistono $r \in \mathrm{N}$ e $a_1 \in H^{n_1}$, $a_2 \in H^{n_2}$, ..., $a_r \in H^{n_r}$ e S_r tali che $h = a_1 + a_2 + \ldots + a_r$ e $k = \tau_\alpha(a_{\alpha(1)} + a_{\alpha(2)} + \ldots + a_{\alpha(r)})$.

Tale relazione non è una relazione di equivalenza in H^n, è riflessiva ma non è necessariamente simmetrica e transitiva nè compatibile con il prodotto, è invece compatibile con la somma.

Per renderla compatibile col prodotto consideriamo la seguente relazione $\bar{A}$ in H:

$h\,\bar{A}\,k$ se esistono $a, b \in H^m$ e $\varphi \in T_m^n$ tali che $a\,A\,b$ e $\varphi a = h$ e $\varphi b = k$.

Questa relazione $\bar{A}$ risulta compatibile con somma e prodotto ed è anche riflessiva e simmetrica, la sua transitivizzata R sarà la relazione di congruenza cercata, infatti si prova facilmente che è la relazione di congruenza più fine tra le meno fini di A.

Sia dunque H una T-algebra, definiamo $P(H) = H/R$, $P(H)$ è una T-algebra permutativa, se H è permutativa $P(H) = H$.

Sia poi $\Phi\colon H \to K$ un morfismo di T-algebre, definiamo

$$P(\Phi)\colon P(H) \to P(K)$$

il morfismo di T-algebre permutative che rende commutativo il diagramma

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "\Phi"'] \arrow[d] & K \arrow[d] \\ H/R \arrow[r] & K/R \end{tikzcd}$$

in cui le frecce verticali sono le proiezioni canoniche sui quozienti; notiamo che, come si è visto, poichè se $x\,A\,y$ in H allora $\Phi(x)\,A\,\Phi(y)$ in K, resta individuato in modo canonico il morfismo in questione.

Si verifica immediatamente che

$$P\colon T\text{-algebre} \to T\text{-algebre permutative}$$

è un funtore.

TEOREMA 1.1. Consideriamo il funtore di inclusione

$$\varepsilon\colon T\text{-algebre permutative} \to T\text{-algebre},$$

P è aggiunto a sinistra di ε.

DIMOSTRAZIONE. Per provare l'aggiunzione costruiamo una coppia di trasformazioni naturali η, θ:

$$\operatorname{Hom}\big(P(H), K\big) \underset{\theta}{\overset{\eta}{\rightleftarrows}} \operatorname{Hom}\big(H, \varepsilon(K)\big)$$

l'una inversa dell'altra.

Siano H una T-algebra e K una T-algebra permutativa, sia $\Phi\colon P(H) \to K$ un morfismo di T-algebre permutative, definiamo $\eta(\Phi)\colon H \to \varepsilon(K)$ il morfismo di T-algebre ottenuto componendo nella categoria delle T-algebre $H \xrightarrow{\pi} P(H) \xrightarrow{\Phi} K$, dove π è il morfismo canonico sul quoziente.

Si verifica facilmente che η è trasformazione naturale.

Sia $\Psi: H \to \varepsilon(k)$ morfismo di T-algebre, definiamo $\theta(\Psi): P(H) \to K$ il morfismo di T-algebre permutative ponendo $\theta(\Psi)(\bar{h}) = \Psi(h)$ per ogni $h \in H$, essendo $\bar{h}$ la classe di congruenza di h.

La definizione è ben posta, infatti se $x\, R\, y$ allora $\Psi(x) = \Psi(y)$; basta provare per come è definita R che se $x\, A\, y$ allora $\Psi(x) = \Psi(y)$.

Sia dunque $x\, A\, y$, allora esistono $r \in \mathbf{N}$ e $a_1, a_2, \ldots, a_r \in H$ ed $\alpha \in S_r$ tali che $x = a_1 + a_2 + \ldots + a_r$ e $y = \tau_\alpha(a_{\alpha(1)} + a_{\alpha(2)} + \ldots + a_{\alpha(r)})$ allora

$$\Psi(x) = \Psi(a_1) + \Psi(a_2) + \ldots + \Psi(a_r) =$$
$$= \tau_\alpha[\Psi(a_{\alpha(1)}) + \Psi(a_{\alpha(2)}) + \ldots + \Psi(a_{\alpha(r)})] = \Psi(y)$$

essendo K T-algebra permutativa.

Anche θ è trasformazione naturale ed è manifestamente l'inversa di η.

1.3. *Il funtore R: T-algebre permutative $\to$ T-algebre ridotte.*

Sia T un anello permutativo.

Una T-algebra permutativa H è ridotta se $H^0 = \{0\}$.

Data una T-algebra permutativa H, per costruire da essa in modo canonico una T-algebra ridotta, sarà naturale identificare tutti gli elementi di H^0, ovvero quozientare H modulo la relazione di congruenza generata dalla relazione B in H:

$$h\, B\, k \text{ se } h, k \in H_0 \text{ oppure } h = k.$$

Tale relazione è una relazione di equivalenza in H^n per ogni $n \in \mathbf{N}$, ma non è detto che sia compatibile con la simma nè con il prodotto in H.

Per renderla compatibile con la somma consideriamo la seguente relazione $\bar{B}$ in H:

$$h\, \bar{B}\, k \text{ se esistono } a, b \in H^0 \text{ e } c \in H \text{ tali che } h = a + c,\ k = b + c.$$

Questa relazione B risulta riflessiva e simmetrica, ma potrà non essere transitiva, è invece compatibile con la somma (si tenga presente che gli elementi di H^0 commutano), è anche compatibile con il prodotto.

La relazione S transitivizzata di $\bar{B}$ sarà la relazione di congruenza cercata, si prova infatti facilmente che è la più fine relazione di congruenza meno fine di B.

Sia dunque H una T-algebra permutativa, definiamo $R(H) = H/S$, $R(H)$ è un T-algebra ridotta, se H è una T-algebra ridotta $R(H) = H$.

Sia poi $\Phi\colon H \to K$ un morfismo di T-algebre permutative, definiamo $R(\Phi)\colon R(H) \to R(K)$ il morfismo di T-algebre ridotte che rende commutativo il diagramma

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "\Phi"'] \arrow[d] & K \arrow[d] \\ H/S \arrow[r] & K/S \end{tikzcd}$$

in cui le frecce verticali sono le proiezioni canoniche sui quozienti; notiamo che, come si è visto, tale morfismo resta individuato in modo canonico poichè se $x\,B\,y$ in H allora $\Phi(x)\,B\,\Phi(y)$ in K.

È facile verificare che

$$R\colon T\text{-algebre permutative} \to T\text{-algebre ridotte}$$

è un funtore.

Teorema 1.2. Consideriamo il funtore di inclusione

$$\varepsilon\colon T\text{-algebre ridotte} \to T\text{-algebre permutative};$$

il funtore R è aggiunto a sinistra di ε.

Dimostrazione. Per provare l'aggiunzione costruiamo una coppia di trasformazioni naturali μ, ν:

$$\operatorname{Hom}\big(R(H), K\big) \underset{\nu}{\overset{\mu}{\rightleftarrows}} \operatorname{Hom}\big(H, \varepsilon(K)\big)$$

l'una inversa dell'altra.

Siano H una T-algebra permutativa e K una T-algebra ridotta, sia $\Phi\colon R(H) \to K$ un morfismo di T-algebre ridotte, definiamo $\mu(\Phi)\colon H \to \varepsilon(K)$ il morfismo di T-algebre permutative ottenuto componendo nella categoria della T-algebre permutative $H \xrightarrow{\pi} R(H) \xrightarrow{\Phi} K$, dove π è il morfismo canonico di proiezione sul quoziente.

Si verifica facilmente che μ è una trasformazione naturale.

Sia Ψ: $H \to \varepsilon(K)$ un morfismo di T-algebre permutative, definiamo $\nu(\Psi)$: $R(H) \to K$ il morfismo di T-algebre permutative così definito $\nu(\Psi)(\bar{h}) = \Psi(h)$ per ogni $h \in H$, essendo $\bar{h}$ la classe di congruenza di h.

La definizione è ben posta, infatti se $x \, S \, y$ allora $\Psi(x) = \Psi(y)$; basta provare, per come S è definita, che se $x \, \bar{B} \, y$ allora $\Psi(x) = \Psi(y)$.

Sia dunque $x \bar{B} y$, esistono allora $a, b \in H^0$, $c \in H$ tali che $x = a + c$ e $y = b + c$ allora

$$\Psi(x) = \Psi(a) + \Psi(c) = 0 + \Psi(c) = \Psi(c) ,$$

$$\Psi(y) = \Psi(b) + \Psi(c) = 0 + \Psi(c) = \Psi(c) .$$

Anche ν è una trasformazione naturale ed è manifestamente l'inversa di μ.

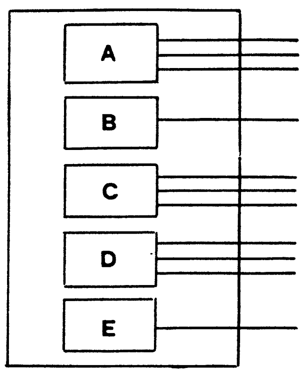
2. Completezza della categoria delle T-algebre.

Sia T un $\mathcal{G}$-anello che supporremo anche permutativo; risulterà dal contesto in quali considerazioni tale ipotesi è ridondante.

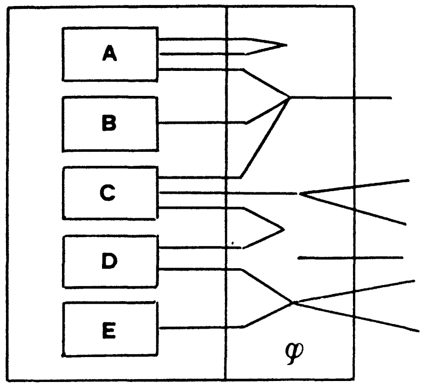
2.1. *Somma diretta di T-algebre.*

Se H e K sono algebre di dispositivi la loro somma diretta $H + K$ è «la più semplice» algebra in cui ci siano reti miste, composte cioè di dispositivi dell'una e dell'altra algebra.

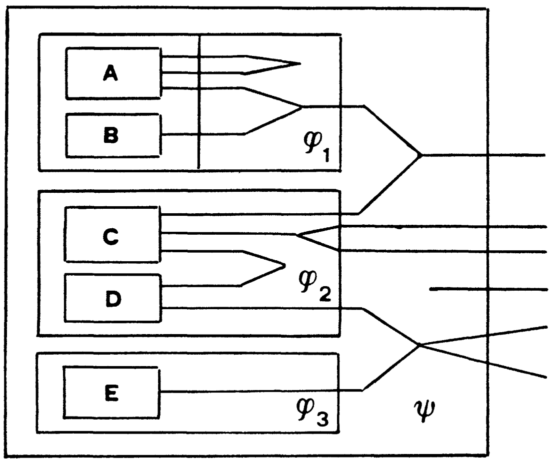
Ad esempio dovrà esserci



essendo $A, B, E \in H$ e $C, D \in K$; ed anche se φ è un trasduttore



e questo non dovrebbe essere distinto da



essendo φ_1, φ_2, φ_3, ψ trasduttori tali che $\psi(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3) = \varphi$.

Le considerazioni euristiche precedenti guidano alla costruzione che segue; si è tradotta nella consueta caratterizzazione universale la minimalità di cui si è detto.

Siano H, K T-algebre, consideriamo la somma diretta W di H e K come monoidi graduati ovvero il monoide W delle parole « ridotte » con lettere in H o K; W è un monoide graduato se si assume come grado di ogni parola ridotta la somma dei gradi di ogni sua singola « lettera », e come somma di due parole la parola ottenuta per giustapposizione e successiva riduzione.

Consideriamo per ogni $n \in N$ l'insieme $S^n = \underset{i \in \mathrm{N}}{+} T_i^n \times W^i$, $S = (S^n)_{n \in \mathrm{N}}$ è una T-algebra rispetto alle operazioni di somma e prodotto definite come segue:

$$(\varphi, p) + (\psi, q) = (\varphi + \psi, p + q)$$

$$\text{per ogni } \varphi \in T_m^n, \ p \in W^m, \ \psi \in T_r^s, \ q \in W^r;$$

$$\psi(\varphi, p) = (\psi\varphi, p) \quad \text{per ogni } \psi \in T_n^r, \ \varphi \in T_m^n, \ p \in W^m;$$

'a verifica delle proprietà $1H$, $2H$, ..., $5H$ è immediata.

Volendo immergere H e K in S consideriamo le seguenti immersioni di insiemi graduati:

$$j_H \colon H \to S \text{ così definita} \quad j_H^n(h) = (\varepsilon_n, h) \quad \text{per ogni } h \in H^n,$$

$$j_K \colon K \to S \text{ così definita} \quad j_K^n(k) = (\varepsilon_n, k) \quad \text{per ogni } k \in K^n,$$

dove il secondo elemento delle coppie è la parola ridotta costituita rispettivamente dalla sola lettera h o k, vuota se $h = 0$ oppure $k = 0$, j_H e j_K non è detto che siano morfismi di T-algebre, possono infatti non essere compatibili con il prodotto poichè se $h \in H^m$ e $\varphi \in T_m^n$ allora $j_H^n(\varphi h) = (\varepsilon_n, \varphi h)$ e $\varphi j_H^m(h) = (\varphi, h)$, analogamente j_K.

Per ottenere due morfismi di T-algebre occorrerà quozientare modulo la relazione di congruenza generata dalla relazione A in S: $x\,A\,y$ se esistono $\varphi \in T_m^n$, p parola ridotta di una sola lettera di H^m oppure di K^m tali che: $x = (\varepsilon_m, \varphi p)$ e $y = (\varphi, p)$, dove si pensi φp parola ridotta costituita da una sola lettera o eventualmente vuota se $\varphi p = 0$.

La relazione A non è necessariamente riflessiva nè simmetrica nè transitiva e neppure compatibile con somma e prodotto.

Per renderla compatibile con la somma e con il prodotto consideriamo la relazione $\bar{A}$: $x\,\bar{A}\,y$ se esistono una parola ridotta di W $p = p_1 p_2 \dots p_n$ scomposta in lettere, e $\psi, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n \in T$ tali che $x = (\psi, (\varphi_1 p_1)(\varphi_2 p_2) \dots (\varphi_n p_n))$ e $y = (\psi(\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n), p_1 p_2 \dots p_n)$.

$\bar{A}$ risulta riflessiva non simmetrica nè transitiva ma ovviamente compatibile con somma e prodotto, la transitivizzata della simmetrizzata di $\bar{A}$ è la relazione di congruenza cercata, si prova infatti facilmente che è la relazione di congruenza più fine tra le meno fini di A, Consideriamo la T-algebra S/R, i morfismi d insiemi graduati

$$i_H = \pi j_H\,, \qquad H \xrightarrow{j_H} S \xrightarrow{\pi} S/R\,, \qquad i_K = \pi j_K\,, \qquad K \xrightarrow{j_K} S \xrightarrow{\pi} S/R\,,$$

risultano ovviamente morfismi di T-algebre.

Teorema 2.1. La T-algebra S/R con i morfismi i_H, i_K è una somma diretta delle T-algebre H e K nella categoria delle T-algebre, la indicheremo come di consueto $H + K$.

Dimostrazione. Sia X una T-algebra $\Phi\colon H \to X$, $\Psi\colon K \to X$ morfismi di T-algebre, esiste uno ed un solo morfismo di T-algebre $\Sigma\colon S/R \to X$ che rende commutativo il diagramma

$$\begin{tikzcd}
& X & \\
H \arrow[ur, "\Phi"] \arrow[r, "i_H"'] & S/R \arrow[u, "\Sigma"] & K \arrow[ul, "\Psi"'] \arrow[l, "i_K"]
\end{tikzcd}$$

Intanto se un tale Σ esiste, dato un elemento $[\varphi, p]$ di S/R, classe di congruenza di $(\varphi, p) \in S$ con $p = h_1 k_1 h_2 k_2 \dots h_n k_n$, $h_i \in H$, $k_i \in K$, $i = 1, 2, \dots, n$ ad esempio, dovrà essere:

$$\begin{aligned}
\Sigma[\varphi, p] &= \Sigma\varphi[\varepsilon, p] = \varphi\Sigma[\varepsilon, p] = \\
&= \varphi\Sigma\big([\varepsilon, h_1] + [\varepsilon, k_1] + \dots + [\varepsilon, h_n] + [\varepsilon, k_n]\big) = \\
&= \varphi\big(\Sigma[\varepsilon, h_1] + \Sigma[\varepsilon, k_1] + \dots + \Sigma[\varepsilon, h_n] + \Sigma[\varepsilon, k_n]\big) = \\
&= \varphi\big(\Sigma i_H(h_1) + \Sigma i_K(k_1) + \dots + \Sigma i_H(h_n) + \Sigma i_K(k_n)\big) = \\
&= \varphi\big(\Phi(h_1) + \Psi(k_1) + \dots + \Phi(h_n) + \Psi(k_n)\big)\,.
\end{aligned}$$

Definiamo allora Σ nel modo seguente:

$$\Sigma[\varphi, p] = \varphi\big(\Phi(h_1) + \Psi(k_1) + \dots + \Phi(h_n) + \Psi(k_n)\big)$$

è ovvio che la definizione è ben posta, mostriamo che Σ è morfismo di T-algebre, infatti se $[\varphi, p]$, $[\psi, q] \in S/R$ e p, q sono le seguenti parole ridotte

$$p = a_1 b_1 \ldots a_n b_n\,, \qquad q = c_1 d_1 \ldots c_m d_m$$

con a_i, $c_j \in H$ e b_i, $d_j \in K$

$$\begin{aligned}\Sigma([\varphi, p] + [\psi, q]) &= \Sigma[\varphi + \psi, p + q] = \\ &= (\varphi + \psi)\big(\Phi(a_1) + \Psi(b_1) + \ldots + \Phi(a_n) + \Psi(b_n) + \\ &\qquad + \Phi(c_1) + \Psi(d_1) + \ldots + \Phi(c_m) + \Psi(d_m)\big)\,,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Sigma[\varphi, p] + \Sigma[\psi, q] &= \varphi\big(\Phi(a_1) + \Psi(b_1) + \ldots \\ &\ldots + \Phi(a_n) + \Psi(b_n) + \Phi(c_1) + \Psi(d_1) + \ldots + \Phi(c_m) + \Psi(d_m)\big) = \\ &= (\varphi + \psi)\big(\Phi(a_1) + \Psi(b_1) + \ldots + \Phi(a_n) + \Psi(b_n) + \\ &\qquad + \Phi(c_1) + \Psi(d_1) + \ldots + \Phi(c_m) + \Psi(d_m)\big)\,,\end{aligned}$$

ed è immediato dalla definizione che

$$\Sigma(\psi[\varphi, p]) = \psi\Sigma[\varphi, p]\,.$$

2.2. *Somma diretta di T-algebre permutative.*

La somma diretta di due T-algebre permutative H, K può non essere permutativa; la somma diretta di H e K nella categoria delle T-algebre permutative si ottiene in modo canonico considerando la loro somma diretta $H + K$ come T-algebra ed applicando a questa il funtore P.

La T-algebra permutativa $P(H + K)$ è la somma diretta di H e K nella categoria delle T-algebre permutative infatti il funtore P essendo dotato di aggiunto a destra muta somme dirette in somme dirette.

Può essere utile la seguente costruzione alternativa della somma diretta nella categoria delle T-algebre permutative.

Date H e K T-algebre permutative consideriamo l'insieme graduato $S = (S^n)$ dove

$$S^n = \{(\varphi, h, k) \mid h \in H^r,\ k \in K^s,\ \varphi \in T^n_{r+s}\}$$

con le seguenti operazioni di somma e prodotto:

$$(\varphi, a, b) + (\psi, c, d) = \big((\varphi + \psi)\chi, a + c, b + d\big)$$

per ogni $a \in H^r$, $b \in H^s$, $\varphi \in T^n_{r+s}$, e per ogni $c \in H^p$, $d \in H^q$, $\psi \in T^m_{p+q}$ essendo $\chi = \varepsilon_r + \tau_{p,s} + \varepsilon_q$;

$$\psi(\varphi, h, k) = (\psi\varphi, h, k) \text{ per ogni } h \in H^r,\ k \in K^s,\ \varphi \in T^m_{r+s},\ \psi \in T^n_m.$$

L'insieme graduato S con le operazioni definite è una T-algebra, può non essere permutativa; quozientiamo S modulo la relazione di congruenza generata dalla relazione che identifica fra loro due elementi del tipo $(\varepsilon, \varphi h, 0)$, $(\varphi, h, 0)$ oppure due del tipo $(\varepsilon, 0, \psi k)$, $(\psi, 0, k)$ in modo che i morfismi indotti sul quoziente dai morfismi di insiemi graduati $H \xrightarrow{i_H} S$, $i_H(h) = (\varepsilon, h, 0)$, $H \xrightarrow{i_K} S$, $i_K(k) = (\varepsilon, 0, k)$ risultino morfismi di T-algebre.

La T-algebra quoziente di S modulo la relazione transitivizzata della simmetrizzata della relazione A:

$x\, A\, y$ se esistono $\mu \in T^n_{q+s}$, $\varphi \in T^q_p$, $\psi \in T^s_r$, $h \in H^p$, $k \in k^r$ tali che $x = (\mu, \varphi h, \psi k)$ e $y = \big(\mu(\varphi + \psi), h, k\big)$,

è permutativa, e si verifica facilmente essere la somma diretta di H e K.

2.3. *Somma diretta di T-algebre ridotte.*

La somma diretta di due T-algebre ridotte H, K può non essere ridotta; la somma diretta di H e K nella categoria delle T-algebre ridotte si ottiene in modo canonico considerando la loro somma diretta $H + K$ come T-algebre permutative ed applicando a questa il funtore R.

La T-algebra ridotta $R(H + K)$ è la somma diretta di H e K nella categoria delle T-algebre ridotte infatti il funtore R, essendo dotato di aggiunto a destra muta somme dirette in somme dirette.

2.4. *Somma diretta di una famiglia di T-algebre.*

Con procedimento analogo a quello descritto per costruire la somma diretta di due T-algebre si costruisce la somma diretta di una arbitraria famiglia di T-algebre $\{H_i\}_{i\in I}$, si ripete la identica costruzione precedente in cui sia però W la somma diretta delle H_i come monoidi graduati, ovvero l'insieme delle « parole ridotte » con lettere in qualcuna delle H_i.

L'applicazione del funtore P fornisce poi la somma diretta nella categoria delle T-algebre permutative, l'ulteriore applicazione del funtore R fornisce la somma diretta nella categoria delle T-algebre ridotte.

2.5. *Coequalizzatore nella categoria delle T-algebre.*

Siano H e K T-algebre, Φ, $\Psi\colon H \to K$ morfismi di T-algebre; consideriamo in K la relazione di congruenza R generata dalla relazione A: $x\,A\,y$ se esiste $h \in H$ tale che $x = \Phi(h)$ e $y = \Psi(h)$.

Teorema 2.2. La proiezione sul quoziente $\pi\colon K \to K/R$ è il coequalizzatore di Φ e Ψ nella categoria delle T-algebre.

Dimostrazione. Intanto ovviamente $\pi\Phi = \pi\Psi$.

Sia poi X una T-algebra e $\chi\colon K \to X$ un morfismo di T-algebre tale che $\chi\Phi = \chi\Psi$, se c'è un morfismo Γ: $K/R \to X$ che rende commutativo il diagramma

$$\begin{tikzcd}
H \arrow[r, shift left, "\Phi"] \arrow[r, shift right, "\Psi"'] & K \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\chi"'] & K/R \\
 & X \arrow[ur, "\Gamma"'] &
\end{tikzcd}$$

deve essere $\Gamma\pi(k) = \Gamma(\bar{k}) = \chi(k)$ per ogni $k \in K$ dove $\bar{k}$ indica la classe di congruenza modulo R di $k \in K$.

Definiamo allora $\Gamma(\bar{k}) = \chi(k)$ per ogni $k \in K$, risulta Γ ben definita, inoltre morfismo di T-algebre e $\Gamma\pi = \chi$ infatti

$$\Gamma\pi(k) = \Gamma(\bar{k}) = \chi(k) \qquad \text{per ogni } k \in K\,.$$

Γ è quindi l'unico morfismo di T-algebre che rende commutativo il diagramma.

È poi ovvio che anche la categoria delle T-algebre permutative e la categoria delle T-algebre ridotte sono dotate di coequalizzatore poichè se K è una T-algebra permutativa oppure ridotta, la T-algebra K/R è rispettivamente permutativa o ridotta.

2.6. *Push-out nella categoria delle T-algebre.*

Essendo la categoria delle T-algebre dotata di somme dirette qualunque e di coequalizzatore risulta anche dotata di Push-Out anzi cocompleta; analogamente la categoria delle T-algebre permutative e la categoria delle T-algebre ridotte.

2.7. *Prodotto, equalizzatore, pull-back nella categoria delle T-algebre.*

È immediato verificare che date H e K T-algebre, l'insieme graduato $(H^n \times K^n)_{n\in\mathbf{N}}$ strutturato come T-algebra definendo nel modo naturale le operazioni:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$
$$\text{per ogni } (a, b) \in H^n \times K^n, \quad (c, d) \in H^m \times K^m,$$

$$\varphi(h, k) = (\varphi h, \varphi k) \qquad \text{per ogni } (h, k) \in H^m \times K^m, \quad \varphi \in T^n_m,$$

è il prodotto diretto nella categoria delle T-algebre ed anche nella categoria delle T-algebre permutative e delle T-algebre ridotte.

Analogamente data una famiglia $\{H_i\}_{i\in I}$ di T-algebre, l'insieme graduato $\left(\prod_{i\in I} H^n_i\right)$ strutturato nel modo naturale come T-algebra è il prodotto diretto nella categoria.

Per quanto riguarda l'equalizzatore nella categoria delle T-algebre è immediato verificare che dati $\Phi, \Psi\colon H \to K$ morfismi di T-algebre l'insieme graduato $E = (E^n)_{n\in\mathbf{N}}$, $E^n = \{h | h \in H^n \text{ e } \Phi(h) = \Psi(h)\}$ è una sotto-T-algebra di H, e che l'inclusione $i\colon E \to H$ è l'equalizzatore di Φ, Ψ nella categoria delle T-algebre ed anche nella categoria delle T-algebre permutative e delle T-algebre ridotte.

Così le categorie delle T-algebre, T algebre permutative, T-algebre ridotte, essendo dotate di prodotti diretti qualunque ed equalizzatori sono pure dotate di pull-back anzi sono complete.

In particolare dati i morfismi di T-algebre

$$\begin{tikzcd} & A & \\ B \arrow[ur, "\Phi"] & & C \arrow[ul, "\Psi"'] \end{tikzcd}$$

Il pull-back di Φ, Ψ si ottiene considerando la sotto-T-algebra $P = (P^n)_{n \in \mathrm{N}}$ di $B \times C$

$$P^n = \{(b, c) | b \in B^n, \ c \in C^n \text{ e } \Phi^n(b) = \Psi^n(c)\} .$$

3. *T*-algebra libera generata da un insieme graduato.

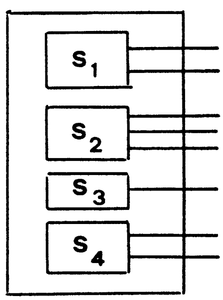
Si vuole ora realizzare la costruzione della T-algebra libera generata da un insieme graduato.

Svolgiamo alcune considerazioni euristiche nel caso particolarmente interessante di T-algebre di dispositivi.

È dato un insieme S di « dispositivi » con terminali e si vuole costruire « la più semplice » T-algebra in cui siano tutte le possibili reti di dispositivi di S.

Il numero dei terminali di ciascun dispositivo di S fa di S un insieme graduato.

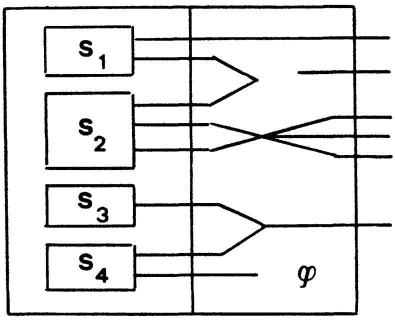
Dovranno essere in tale algebra dispositivi del tipo:



se s_1, s_2, s_3, s_4 sono elementi di S rispettivamente di 2, 3, 1, 2 terminali, dovrebbe avere terminali $2 + 3 + 1 + 2$.

Ciò porta alla considerazione del monoide graduato delle parole generato da S.

Dovranno poi essere nell'algebra dispositivi del tipo:



in cui φ è un trasduttore opportuno.

Ciò porta alla successiva considerazione delle coppie costituite da una parola su S e da un trasduttore, elemento di T.

La minimalità di cui si è detto è stata tradotta nella consueta caratterizzazione universale.

3.1. *Monoide graduato libero generato da un insieme graduato.*

Sia $S = (S^n)_{n\in\mathbb{N}}$ un insieme graduato, consideriamo $W(S)$ il monoide delle parole su S, $W(S)$ è un monoide graduato se si definisce grado di una parola su S la somma dei gradi di ogni sua « lettera ».

Siano S, R insiemi graduati $\Phi\colon S \to R$ morfismo di insiemi graduati, definiamo $W(\Phi)\colon W(S) \to W(R)$ nel modo seguente

$$W(\Phi)(s_1 s_2 \ldots s_p) = \Phi(s_1)\Phi(s_2) \ldots \Phi(s_p) \qquad \text{per ogni } s_1, s_2, \ldots, s_p \in S\,;$$

è ovvio che $W(\Phi)$ è un morfismo di monoidi graduati.

Si verifica facilmente che W è un funtore dalla categoria degli insiemi graduati alla categoria dei monoidi graduati.

Se indichiamo con $|-|$ il funtore « supporto insiemistico » che ad ogni monoide graduato associa l'insieme graduato soggiacente dimenticando la struttura algebrica, si ha che W è aggiunto a sinistra di $|-|$; in tal senso si dice $W(S)$ il monoide graduato libero generato dall'insieme graduato S.

L'aggiunzione fra W e $|-|$ è data dalla coppia di isomorfismi naturali l'uno inverso dell'altro:

$$\operatorname{Hom}\big(W(S), M\big) \underset{\theta}{\overset{\eta}{\rightleftarrows}} \operatorname{Hom}\big(S, |M|\big)$$

così definiti:

se $\Phi: W(S) \to M$ è un morfismo di monoidi graduati,
$\eta\Phi: S \to |M|$ è il seguente morfismo di insiemi graduati:
$(\eta\Phi)(s) = s$ per ogni $s \in S$;

se $\Psi: S \to |M|$ è un morfismo di insiemi graduati,
$\theta\Psi: W(s) \to M$ è il seguente morfismo di monoidi graduati:
$(\theta\Psi)(s_1 s_2 \dots s_p) = \Psi(s_1)\Psi(s_2)\dots\Psi(s_p)$ per ogni $s_1 s_2 .. s_p \in W(S)$.

3.2. *T-algebra libera generata da un monoide graduato.*

Sia T un $\mathcal{C}$-anello.

Sia M un monoide graduato, consideriamo l'insieme graduato τM $(\tau M)^n = \underset{i \in \mathrm{N}}{+} (T_i^n \times M^i)$ per ogni $n \in N$.

Definiamo in τM le seguenti operazioni di somma e prodotto:

$$(\varphi, m) + (\psi, n) = (\varphi + \psi, m + n)$$
$$\text{per ogni } \varphi \in T_p^q,\ m \in M^p,\ \psi \in T_r^s,\ n \in M^r,$$

$$\psi(\varphi, m) = (\psi\varphi, m) \qquad \text{per ogni } \psi \in T_q^r,\ \varphi \in T_p^q,\ m \in M^p.$$

È immediato provare che le operazioni definite verificano le proprietà $1H, \dots, 5H$, τM risulta pertanto una T-algebra.

Siano M, N monoidi graduati e $\Phi: M \to N$ un morfismo di monoidi graduati, definiamo $\tau\Phi: \tau M \to \tau N$ nel modo seguente:

$$(\tau\Phi)^q(\varphi, m) = (\varphi, \Phi^q(m)) \qquad \text{per ogni } \varphi \in T_p^q,\ m \in M^q.$$

È facile verificare che $\tau\Phi$ risulta un morfismo di T-algebre.

Risulta ovviamente che τ è un funtore dalla categoria dei monoidi graduati alla categoria delle T-algebre.

Se indichiamo con $|-|$ il funtore « supporto monoidale » che ad ogni T-algebra associa il monoide graduato soggiacente, dimenticando la struttura che gli deriva dall'operazione di prodotto per elementi di T, si ha che τ è aggiunto a sinistra di $|-|$; in tal senso diremo τM la T-algebra libera generata dal monoide graduato M.

L'aggiunzione fra τ e $|-|$ è data dalla coppia di isomorfismi naturali, l'uno inverso dell'altro

$$\mathrm{Hom}\,(\tau(M), H) \underset{\xi}{\overset{\xi}{\rightleftarrows}} \mathrm{Hom}\,(M, |H|)$$

definiti così:

se $\Phi\colon \tau(M) \to H$ è un morfismo di T-algebre,
$\xi\Phi\colon M \to H$ è il seguente morfismo di monoidi graduati:
$(\xi\Phi)^p(m) = \Phi(\varepsilon_p, m^p)$ per ogni $m \in M^p$;

se $\Psi\colon M \to |H|$ è un morfismo di monoidi graduati,
$\zeta\Psi\colon \tau(M) \to H$ è il seguente morfismo di T-algebre:
$(\zeta\Psi)^p(\varphi, m) = \varphi\Psi^p(m)$ per ogni $\varphi \in T^q_p$, $m \in M^p$.

3.3. *T-algebra libera generata da un insieme graduato.*

Componendo i due funtori W, τ

$$\text{Insiemi graduati} \underset{|-|}{\overset{W}{\rightleftarrows}} \text{Monoidi graduati} \underset{|-|}{\overset{\tau}{\rightleftarrows}} T\text{-algebre}$$

si ha il funtore $L = \tau W$.

Componendo il funtore « supporto insiemistico » con il funtore « supporto monoidale » si ha il funtore « supporto », che denoteremo ancora $|-|$, che associa ad ogni T-algebra l'insieme graduato soggiacente.

L è aggiunto a sinistra di $|-|$, essendo aggiunti a sinistra i rispettivi componenti; così, nel senso solito, diremo $L(S)$ la T-algebra libera generata dall'insieme graduato S.

Esplictamente un elemento di grado n di $L(S)$ sarà una coppia $(\varphi, s_1 s_2 \dots s_p)$ con $\varphi \in T^n_m$ e $s_1, s_2, .., s_p \in S$ essendo m la somma dei gradi di $s_1, s_2, \dots, s_p$.

3.4. *T-algebra permutativa libera generata da un insieme graduato.*

Se poi T è un $\mathcal{C}$-anello permutativo, componendo i due funtori L e P

$$\text{Insiemi graduati} \underset{|-|}{\overset{L}{\rightleftarrows}} T\text{-algebre} \underset{\varepsilon}{\overset{P}{\rightleftarrows}} T\text{-algebre permutative}$$

si ha il funtore $\mathfrak{L} = PL$; se ε è il funtore di inclusione, componendolo con il funtore « supporto » si ha un funtore che diremo ancora « supporto » e denoteremo ancora $|-|$ che associa ad ogni T-algebra permutativa l'insieme graduato soggiacente.

Il funtore $\mathfrak{L}$ è aggiunto a sinistra di $|-|$ essendo aggiunti a sinistra i rispettivi funtori componenti; diremo $\mathfrak{L}(S)$ la T-algebra permutativa libera generata dall'insieme graduato S.

3.5. *T-algebra ridotta libera generata da un insieme graduato.*

Infine componendo i due funtori $\mathcal{L}$ e R

$$\text{Insiemi graduati} \underset{|-|}{\overset{\mathcal{L}}{\rightleftarrows}} T\text{-algebre permutative} \underset{\varepsilon}{\overset{R}{\rightleftarrows}} T\text{-algebre ridotte}$$

si ha il funtore $\Lambda = R\mathcal{L}$; se ε è il funtore di inclusione, componendolo con il funtore « supporto » si ha un funtore che diremo ancora « supporto » e denoteremo ancora $|-|$ che associa ad ogni T-algebra ridotta l'insieme graduato soggiacente.

Il funtore Λ è aggiunto a sinistra di $|-|$ essendo aggiunti a sinistra i rispettivi funtori componenti; diremo $\Lambda(S)$ la T-algebra ridotta libera generata dall'insieme graduato S.

BIBLIOGRAFIA

[1] F. PARODI, *Categoria delle T-algebre e categoria degli universi di dispositivi*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, questo stesso volume.

[2] G. DARBO, *Aspetti algebrico categoriali della teoria dei dispositivi*, Symposia Mathematica, **4** (1970), pp. 303-336.

[3] F. PARODI, *Simmetrizzazioni di una categoria*, parte I e II, Rend. Sem, Mat. Univ. Padova, **44** (1970), pp. 185-262.

[4] S. MAC LANE, *Natural associativity and commutativity*, Rice University Studies, **49**, no. 4 (1963), pp. 28-46.

[6] S. MAC LANE, *Categories for the working mathematician*, Springer-Verlag, New York - Heidelberg - Berlin, 1971.

[6] S. MAC LANE - G. BIRKOFF, *Algebra*, Mac Millan Company, 1967.

F. PARODI, *Costruzione di un universo di dispositivi non lineari su una coppia di gruppi abeliani*, in corso di pubblicazione su Rend. Sem. Mat. Univ. Padova.

S. TESTA, *Costruzione di un universo di dispositivi ciclicamente monotoni massimali*, in corso di stampa su Rend. Sem. Mat. Univ. Padova.

Manoscritto pervenuto in redazione il 23 marzo 1979.