RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

ANTONINO MAUGERI

Su una classe di equazioni paraboliche singolari

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 62 (1980), p. 65-74

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1980__62__65_0>

Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, Vol. 62 (1980)

Su una classe di equazioni paraboliche singolari.

Antonino Maugeri (*)

Summary - In this paper we study a boundary-value problem for the equation:

$$a(x,t)\left(u_{xx}+\frac{2\nu}{x}u_x\right)+\frac{H(x,t)}{x}u_x-u_t=f(x,t)\qquad (x,t)\in Q=\,]0,R[\times]0,T[\,,$$

where

$$2\nu>-1,\ \frac{1}{\lambda}\leqslant(a(x,t)\leqslant\lambda,\ \|H\|_{L^\infty(Q)}<\frac{1+2\nu}{\lambda},\ \lambda\geqslant1\,.$$

Detto Q il rettangolo $]0,R[\times]0,T[$ $(R,T>0)$, in questa Nota studiamo, in un opportuno spazio di Sobolev con peso, il problema:

$$(0.1)\qquad a(x,t)\left(u_{xx}+\frac{2\nu}{x}u_x\right)+\frac{H(x,t)}{x}u_x-u_t=f(x,t)\qquad \text{in } Q\,,$$

$$(0.2)\qquad u(x,0)=0\qquad x\in\,]0,R[$$

$$(0.3)\qquad u(R,t)=0\qquad t\in\,]0,T[\,.$$

Dimostriamo che tale problema ammette una ed una sola soluzione supponendo che 2ν sia un numero reale maggiore di -1 e che esista un numero reale $\lambda\geqslant1$ tale che:

$$\frac{1}{\lambda}\leqslant a(x,t)\leqslant\lambda\,,\qquad \|H\|_{L^\infty(Q)}<\frac{1+2\nu}{\lambda}\,.$$

(*) Indirizzo dell'A.: Sem. Matematico - Città Universitaria - Viale A. Doria, 6 - Catania.

Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.A.F.A. del C.N.R.

Sul termine noto $f(x, t)$ facciamo l'ipotesi che appartenga alla classe $L^2_\nu(Q)$ costituita dalle (classi di) funzioni misurabili in Q per le quali risulta finita la quantità:

$$\|f\|_{L^2_\nu(Q)} = \left(\int_Q x^{2\nu} f^2(x, t)\, dx\, dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

Denotato, poi, con $H^{2,1}_\nu(Q)$ lo spazio delle funzioni $u(x, t)$ misurabili in Q e tali che u, u_t, $u_{xx} + (2\nu/x)u_x$ e u_x/x appartengano a $L^2_\nu(Q)$, normalizzato ponendo:

$$\|u\|_\nu = \left(\|u\|^2_{L^2_\nu(Q)} + \left\|\frac{u_x}{x}\right\|^2_{L^2_\nu(Q)} + \left\|u_{xr} + \frac{2\nu}{x}u_x\right\|^2_{L^2_\nu(Q)} + \|u_t\|^2_{L^2_\nu(Q)}\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{0.4}$$

con $H^{2,1}_{\nu,0}(Q)$ indichiamo la classe delle funzioni appartenenti ad $H^{2,1}_\nu(Q)$ ed aventi traccia nulla per $t = 0$ e $x = R$ [1]. In $H^{2,1}_{\nu,0}(Q)$ cerchiamo la soluzione del problema (0.1)-(0.3).

In $H^{2,1}_{\nu,0}(Q)$ la norma (0.4) e la norma:

$$\|u\|_{\nu,0} = \left(\left\|\frac{u_x}{x}\right\|^2_{L^2_\nu(Q)} + \left\|u_{xx} + \frac{2\nu}{x}u_x\right\|^2_{L^2_\nu(Q)} + \|u_t\|^2_{L^2_\nu(Q)}\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{0.5}$$

risultano equivalenti.

1. Risultati preliminari.

Vale il seguente:

Teorema 1.1. *Per ogni $f \in L^2_\nu(Q)$ esiste una ed una sola soluzione $u(x, t)$ appartenente ad $H^{2,1}_{\nu,0}(Q)$ dell'equazione*

$$u_{xx} + \frac{2\nu}{x}u_x - u_t = f \tag{1.1}$$

[1] Le derivate sono considerate nel senso delle distribuzioni. Lo spazio $H^{2,1}_{\nu,0}(Q)$ coincide, poi, con la chiusura dell'insieme:

$$\left\{u \in C^2(\bar{Q}) : \frac{u_x}{x} \in L^2_\nu(Q),\ u(x, 0) = 0,\ u(R, t) = 0\right\}$$

rispetto alla norma (0.5).

ed essa è rappresentata dalla serie:

$$(1.2)\qquad u(x,t)=$$

$$=-x^{\frac{1}{2}-\nu}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2J_{\nu-\frac{1}{2}}(j_n x)}{R^2 J^2_{\nu+\frac{1}{2}}(j_n R)}\int_0^t \exp\left[-j_n^2(t-\tau)\right]\left(\int_0^1 \xi^{\nu+\frac{1}{2}} f(\xi,\tau) J_{\nu-\frac{1}{2}}(j_n\xi)\,d\xi\right)d\tau$$

dove $J_{\nu-\frac{1}{2}}(x)$ e $J_{\nu+\frac{1}{2}}(x)$ sono, rispettivamente, le funzioni di Bessel di prima specie di ordine $\nu-\frac{1}{2}$ e $\nu+\frac{1}{2}$ e j_n, $n\in N$, sono le radici dell'equazione:

$$J_{\nu-\frac{1}{2}}(\lambda R)=0\ .$$

Inoltre si ha:

$$(1.3)\qquad \int_Q x^{2\nu}\left[\left(u_{xx}+\frac{2\nu}{x}u_x\right)^2+u_t^2\right]dx\,dt+\frac{1}{2}\sup_{[0,T]}\int_0^1 x^{2\nu}u_x^2(x,t)\,dx\leqslant$$

$$\leqslant\int_Q x^{2\nu} f^2(x,t)\,dx\,dt\ ,$$

$$(1.4)\qquad \int_Q x^{2\nu}\frac{u_x^2}{x^2}\,dx\,dt\leqslant\frac{4}{(1+2\nu)^2}\int_Q x^{2\nu}f^2(x,t)\,dx\,dt\ .$$

Posto

$$\psi_n(x)=\frac{\sqrt{2x}\,J_{\nu-\frac{1}{2}}(j_n x)}{J_{\nu+\frac{1}{2}}(j_n)}\ (^2)\ ,$$

(2) Ricordiamo (cfr. [4] e [5]) che:

$$\int_0^1 \psi_n(x)\,\psi_m(x)\,dx=\delta_{n,m}\qquad \text{e}\qquad \int_0^1 x^{2\nu} f^2(x,t)\,dx=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^1 x^{\nu} f(x,t)\,\psi_n(x)\,dx\right)^2 .$$

Ne segue, allora, che:

$$\int_0^T\!\!\int_0^1 x^{2\nu} f^2(x,t)\,dx\,dt=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^T\left(\int_0^1 x^{\nu} f(x,t)\,\psi_n(x)\,dx\right)^2 dt\ .$$

Per l'unicità vedasi il teorema 2.1.

scriviamo la (1.2) nella forma:

$$(1.5)\qquad u(x,t) = -x^{-\nu}\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n(x)\int_0^t \exp\left[-j_n^2(t-\tau)\right]\left(\int_0^1 \xi^\nu f(\xi,\tau)\psi_n(\xi)\,d\xi\right)d\tau$$

supponendo per semplicità $R = 1$. Proviamo, per prima cosa, che $u(x,t) \in L_\nu^2(Q)$

Si ha per ogni n e p appartenenti ad N:

$$\left\| -\sum_{k=1}^{p} x^{-\nu}\psi_{n+k}(x)\int_0^1 \exp\left[-j_{n+k}^2(t-\tau)\right)\left(\int_0^1 \xi^\nu f(\xi,\tau)\psi_{n+k}(\xi)\,d\xi\right)\mathrm{d}\tau\right\|_{L_\nu^2(Q)}^2 =$$

$$= \sum_{k=1}^{p}\int_0^T\left(\int_0^t \exp\left[-j_{n+k}^2(t-\tau)\right]\left(\int_0^1 \xi^\nu f(\xi,\tau)\psi_{n+k}(\xi)\,d\xi\right)d\tau\right)^2 dt\,.$$

Considerando il termine generico della sommatoria a secondo membro ed integrando per parti si ha:

$$(1.6)\qquad \int_0^T\left(\int_0^t \exp\left[-j_{n+k}^2(t-\tau)\right]\left(\int_0^1 \xi^\nu f(\xi,\tau)\psi_{n+k}(\xi)\,d\xi\right)\mathrm{d}\tau\right)^2 dt =$$

$$= \int_0^T \mathrm{d}t\,\exp\left[-2j_{n+k}^2 t\right]\left(\int_0^t \exp\left[j_{n+k}^2\tau\right]\left(\int_0^1 \xi^\nu f(\xi,\tau)\psi_{n+k}(\xi)\,d\xi\right)d\tau\right)^2 =$$

$$= -\frac{\exp\left[-2j_{n+k}^2 T\right]}{2j_{n+k}^2}\left(\int_0^T \exp\left[j_{n+k}^2\tau\right]\left(\int_0^1 \xi^\nu f(\xi,\tau)\psi_{n+k}(\xi)\,d\xi\right)d\tau\right)^2 +$$

$$+\frac{1}{j_{n+k}^2}\int_0^T\left[\exp\left[-j_{n+k}^2 t\right]\left(\int_0^1 \xi^\nu f(\xi,\tau)\psi_{n+k}(\xi)\,d\xi\right)\int_0^t \exp\left[j_{n+k}^2\tau\right]\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\left(\int_0^1 \xi^\nu f(\xi,\tau)\psi_{n+k}(\xi)\,d\xi\right)d\tau\right]dt = -\frac{\exp\left[-2j_{n+k}^2 T\right]}{2j_{n+k}^2}\cdot$$

$$\cdot\left(\int_0^T \exp\left[j_{n+k}^2\tau\right]\left(\int_0^1 \xi^\nu f(\xi,\tau)\psi_{n+k}(\xi)\,d\xi\right)d\tau\right) +$$

$$+\frac{1}{j_{n+k}^2}\int_0^T dt\int_0^t \exp[-j_{n+k}^2 t]\exp[j_{n+k}^2\tau]\cdot$$

$$\cdot\left(\int_0^1 \xi^\nu f(\xi,t)\,\psi_{n+k}(\xi)\,d\xi\right)\left(\int_0^1 \xi^\nu f(\xi,\tau)\,\psi_{n+k}(\xi)\,d\xi\right)d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{j_{n+k}^2}\left[\frac{1}{2}\int_0^T\int_0^t \exp[-j_{n+k}^2(t-\tau)]\left(\int_0^1 \xi^\nu f(\xi,t)\,\psi_{n+k}(\xi)\,d\xi\right)^2 dt\,d\tau +\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\int_0^T\int_0^t \exp[-j_{n+n}^2(t-\tau)]\left(\int_0^1 \xi^\nu f(\xi,\tau)\,\psi_{n+k}(\xi)\,d\xi\right)^2 dt\,d\tau\right] \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{j_{n+k}^4}\int_0^T\left(\int_0^1 \xi^\nu f(\xi,\tau)\,\psi_{n+k}(\xi)\,d\xi\right)^2 dt\,.$$

Quindi:

$$\left\| -\sum_{k=1}^{p} x^{-\nu}\psi_{n+k}(x)\int_0^t \exp[-j_{n+k}^2(t-\tau)]\left(\int_0^1 \xi^\nu f(\xi,\tau)\,\psi_{n+k}(\xi)\,d\xi\right)d\tau\right\|^2_{L^2_\nu(Q)} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{p}\frac{1}{j_{n+k}^4}\int_0^T\left(\int_0^1 \xi^\nu f(\xi,\tau)\,\psi_{n+k}(\xi)\,d\xi\right)^2 d\tau$$

e, perciò, $u(x,t)$ denota una effettiva funzione di $L^2_\nu(Q)$.

Tenendo presente che:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^{-\nu+\frac12}J_{\nu-\frac12}(j_n n) = -j_n x^{-\nu+\frac12}J_{\nu+\frac12}(j_n x)$$

derivando termine a termine la (1.5) si ottiene la serie:

$$(1.7)\qquad \sum_{n=1}^{\infty} x^{-\nu} j_n\chi_n(x)\int_0^t \exp[-j_n^2(t-\tau)]\left(\int_0^1 \xi^\nu f(\xi,\tau)\,\psi_n(\xi)\,d\xi\right)\mathrm{d}\tau$$

con

$$\chi_n(x) = \frac{\sqrt{2x}\,J_{\nu+\frac12}(j_n x)}{J_{\nu+\frac12}(j_n)} \qquad \text{e} \qquad \int_0^1 \chi_n(x)\,\chi_m(x)\,dx = \delta_{m,n}\,.$$

La serie (1.7) converge in $L^2_\nu(Q)$. Infatti si ha per ogni n e $p \in N$:

$$\left\| \sum_{k=1}^{p} x^{-\nu} \chi_{n+k}(x)\, j_{n+k} \int_0^t \exp\left[-j^2_{n+k}(t-\tau)\right] \left(\int_0^1 \xi^\nu f(\xi,\tau)\, \psi_{n+k}(\xi)\, d\xi \right) \mathrm{d}\tau \right\|^2_{L^2_\nu(Q)} =$$

$$= \sum_{k=1}^{p} j^2_{n+k} \int_0^T \left(\int_0^t \exp\left[-j^2_{n+k}(t-\tau)\right] \left(\int_0^1 \xi^\nu f(\xi,\tau)\, \psi_{n+k}(\xi)\, d\xi \right) d\tau \right)^2 dt \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{j^2_{n+k}} \int_0^T \left(\int_0^1 \xi^\nu f(\xi,\tau)\, \psi_{n+k}(\xi)\, d\xi \right) d\tau .$$

Inoltre la (1.7) per ogni t fissato in $[0, \tau]$ converge in $L^2_\nu(0,1)$. Infatti:

$$\left\| \sum_{k=1}^{p} x^{-\nu} \chi_{n+k}(x)\, j_{n+k} \int_0^t \exp\left[-j^2_{n+k}(t-\tau)\right] \left(\int_0^1 \xi^\nu f(\xi,\tau)\, \psi_{n+k}(\xi)\, d\xi \right) d\tau \right\|^2_{L^2_\nu(0,1)} =$$

$$= \sum_{k=1}^{p} j^2_{n+k} \left(\int_0^t \exp\left[-j^2_{n+k}(t-\tau)\right] \left(\int_0^1 \xi^\nu f(\xi,\tau)\, \psi_{n+k}(\xi)\, d\xi \right) d\tau \right)^2 \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{p} j^2_{n+k} \left(\int_0^1 \exp\left[-2 j^2_{n+k}(t-\tau)\right] d\tau \right) \left(\int_0^T \left(\int_0^1 \xi^\nu f(\xi,\tau)\, \psi_{n+k}(\xi)\, d\xi \right)^2 d\tau \right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{p} \int_0^T \left(\int_0^1 \xi^\nu f(\xi,\tau)\, \psi_{n+k}(\xi)\, d\xi \right)^2 d\tau .$$

Detta allora $v(x,t)$ la somma della (1.7) si ha per ogni $z \in]0,1]$:

$$\left| \int_1^z \left[v(x,t) - \sum_{n=1}^{k} x^{-\nu} j_n \chi_n(x) \cdot \right.\right.$$

$$\left.\left. \cdot \left(\int_0^t \exp\left[-j^2_n(t-\tau)\right] \left(\int_0^1 \xi^\nu f(\xi,\tau)\, \psi_n(\xi)\, d\xi \right) d\tau \right] dx \right) \right| \leqslant \left(\int_z^1 x^{-2\nu}\, dx \right)^{\frac{1}{2}} \cdot$$

$$\cdot \left(\int_0^1 \left| x^\nu v(x,t) - \sum_{n=1}^{k} j_n \chi_n(x) \int_0^t \exp\left[-j^2_n(t-\tau)\right] \left(\int_0^1 \xi^\nu f(\xi,\tau)\, \psi_n(\xi)\, d\xi \right) \right|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \cdot$$

Quindi risulta

$$(1.8)\qquad \int_1^z v(x,t)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_1^z x^{-\nu} j_n\,\chi_n(x)\,dx\int_0^t \exp\left[-j_n^2(t-\tau\right]\cdot \left(\int_0^1 \xi^\nu f(\xi,\tau)\,\psi_n(\xi)\,d\xi\right)d\tau = u(z,t)\,,$$

ed, inoltre, la convergenza della serie (1.5ı è uniforme in ogni insieme del tipo $[\bar{x},1]\times[0,1]$ con $0<\bar{x}<1$

In modo analogo si vede che la serie ottenuta da (1.5) derivando rispetto a t:

$$-\sum_{h=1}^{\infty} x^{-\nu}\psi_n(x)\int_0^1 \xi^\nu f(\xi,t)\,\psi_n(\xi)\,d\xi + \sum_{n=1}^{\infty} x^{-\nu} j_n^2\psi_n(x)\int_0^t \exp\left[-j_n^2(t-\tau)\right]\cdot \left(\int_0^1 \xi^\nu f(\xi,\tau)\,\psi_n(\xi)\,d\xi\right)d\tau\,,$$

converge in $L_\nu^2(Q)$ ed, inoltre, detta $w(x,t)$ la sua somma si ha:

$$(1.9)\qquad w(x,t) = u_t(x,t)$$

nel senso delle distribuzioni perchè per ogni $\Phi(x,t)\in C_0^\infty(Q)$ risulta:

$$\int_Q x^\nu w(x,t)\,\frac{\Phi(x,t)}{x^\nu}\,dx\,dt = \sum_{n=1}^{\infty}\int_Q \psi_n(x)\left[-\int_0^1 \xi^\nu f(\xi,t)\,\psi_n(\xi)\,d\xi + \right.$$

$$\left. + j_n^2\int_0^t \exp\left[-j_n^2(t-\tau)\right]\left(\int_0^1 \xi^\nu f(\xi,\tau)\,\psi_n(\xi)\,d\xi\right)d\tau\right]\frac{\Phi(x,t)}{x^\nu}\,dx\,dt =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\int_Q \psi_n(x)\left(\int_0^t \exp\left[-j_n^2(t-\tau\right]\left(\int_0^1 \xi^\nu f(\xi,\tau)\,\psi_n(\xi)\,d\xi\right)d\tau\right)\frac{\Phi_t(x,t)}{x^\nu}\,dx\,dt =$$

$$= -\int_Q x^\nu u(x,t)\,\frac{\Phi_t(x,t)}{x^\nu}\,dx\,dt\,.$$

Consideriamo, ora, la funzione:

$$(1.10) \qquad x^{2\nu} u_x(x,t) = x^\nu \sum_{n=1}^{\infty} j_n \chi_n(x) \int_0^t \exp[-j_n^2(t-\tau)] \left(\int_0^1 \xi^\nu f(\xi,\tau)\psi_n(\xi)\,d\xi \right) d\tau ,$$

l'uguaglianza valendo nel senso di $L^1(Q)$.

Tenendo presente:

$$\frac{d}{dx} x^{\nu+\frac{1}{2}} J_{\nu+\frac{1}{2}}(j_n x) = j_n x^{\nu+\frac{1}{2}} J_{\nu-\frac{1}{2}}(j_n x)$$

derivando termine a termine la serie (1.10) si ottiene la serie:

$$x^\nu \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x)\, j_n^2 \int_0^t \exp[-j_n^2(t-\tau)] \left(\int_0^1 \xi^\nu f(\xi,\tau)\psi_n(\xi)\,d\xi \right) d\tau$$

che ha per somma in $L^1(Q)$ la funzione $x^{2\nu} u_t(x,t) + x^{2\nu} f(x,t)$.

Avendosi nel senso della convergenza in $L^1(0,T)$;

$$\int_0^z x^{2\nu}(u_t + f)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^z x^n \psi_n(x)\, j_n^2\,dx \int_0^t \exp[-j_n^2(t-\tau)] \cdot$$
$$\cdot \left(\int_0^1 \xi^\nu f(\xi,\tau)\psi_n(\xi)\,d\xi \right) d\tau = \sum_{n=1}^{\infty} z^\nu j_n \chi_n(z) \int_0^t \exp[-j_n^2(t-\tau)] \cdot$$
$$\cdot \left(\int_0^1 \xi^\nu f(\xi,\tau)\psi_n(\xi)\,d\xi \right) d\tau ,$$

e valendo la (1.10), si ha q.o. in $]0,1]$

$$\int_0^z x^{2\nu}(u_t + f)\,dx = z^{2\nu} u_x(z,t)$$

Ne segue allora:

$$(1.11) \qquad \lim_{x\to 0^+} x^{2\nu} u_x(x,t) = 0$$

$$(1.12) \qquad x^{2\nu}(u_t + f) = x^{2\nu}\left(u_{xx} + \frac{2\nu}{x} u_x \right).$$

Dalle (1.11) e (1.12) segue pure (cfr. [3]):

$$
\int_Q x^{2\nu}\frac{u_x^2}{x^2}\,dx\,dt = \int_0^T dt\int_0^1 x^{-2\nu}\left(\frac{1}{x}\int_0^x \xi^{2\nu}\left(u_{xx}+\frac{2\nu}{\xi}u_x\right)d\xi\right)^2 dx \leqslant
$$
$$
\leqslant \frac{4}{(1+2\nu)^2}\int_Q x^{2\nu}\left(x_{xx}+\frac{2\nu}{x}u_x\right)^2 dx\,dt\,. \tag{1.13}
$$

Dalla uguaglianza;

$$
\int_Q x^{2\nu}\left[\left(u_{xx}+\frac{2\nu}{x}u_x\right)^2+u_t^2\right]dx\,dt+\frac{1}{2}\int_0^1 x^{2\nu}u_x^2(x,T)\,dx=
$$
$$
=\int_Q x^{2\nu}\left[\left(u_{xx}+\frac{2\nu}{x}u_x\right)-u_t\right]^2 dx\,dt\,,
$$

segue poi la (1.3), mentre dalla (1.13) segue la (1.4).

2. Teorema di esistenza ed unicità.

Vale il seguente;

TEOREMA 2.1. *Per ogni* $f\in L_\nu^2(Q)$, *il problema* (0.1)-(0.3) *ammette una ed una sola soluzione* $u\in H_{\nu,0}^{2,1}(Q)$ *e risulta*:

$$
\left(\int_Q x^{2\nu}\left[\left(u_{xx}+\frac{2\nu}{x}u_x\right)^2+u_t^2\right]dx\,dt\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant C_0\|f\|_{L_\nu^2(Q)} \tag{2.1}
$$

$$
\left\|\frac{u_x}{x}\right\|_{L_\nu^2(Q)}\leqslant\frac{2C_0}{1+2\nu}\|f\|_{L_\nu^2(Q)}\,, \tag{2.2}
$$

dove;

$$
C_0=\left(\frac{1}{\lambda}-\|H\|_{L^\infty(Q)}\frac{2}{1+2\nu}\right)^{-1}.
$$

Per la dimostrazione basta tenere presenti i teoremi 3.1 e 3.2 di [1].

BIBLIOGRAFIA

[1] A. MAUGERI, *Soluzioni a simmetria assiale di equazioni paraboliche*, Le Matematiche, **26** (1971), pp. 267-273.

[2] A. MAUGERI, *Un problema al contorno per una classe di equazioni paraboliche singolari*, in corso di stampa su Boll. Un. Mat. Ital.

[3] G. TALENTI, *Una disuguaglianza integrale*, Boll. Un. Mat. Ital., **21** (1966), pp. 25-34.

[4] G. N. WATSON, *Theory of Bessel Functions*, Cambridge Univ. Press., 1958.

[5] A. H. ZEMANIAN, *Generalized Integral Transformations*, Interscience Pubb., 1968.

Manoscritto pervenuto in redazione il 23 marzo 1979.