RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

TRAN VAN TRUNG

Eine Kennzeichnung der endlichen einfachen Gruppe J_4 von Janko durch eine 2-lokale Untergruppe

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 62 (1980), p. 35-45

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1980__62__35_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 62 (1980)

Eine Kennzeichnung der endlichen einfachen Gruppe J_4 von Janko durch eine 2-lokale Untergruppe.

TRAN VAN TRUNG (*)

1. Einleitung.

Das Ziel dieser Arbeit ist der Beweis des folgenden Satzes:

SATZ. Sei G eine nichtabelsche endliche einfache Gruppe vom Charakteristik 2-Typ. Sei M eine 2-lokale Untergruppe von G derart, daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(1) Setze $Q = O_2(M)$ und $Z = Z(Q)$. Dann gelte $M = N_G(Z)$. Weiter sei Q eine spezielle Gruppe der Ordnung 2^{15}, $Z \simeq E_8$ und $M/Q \simeq \Sigma_5 \times L_3(2)$. Ist x ein Element der Ordnung 7 aus M, so gelte $C_Q(x) = 1$.

(2) Ist y ein Element der Ordnung 3 aus M mit $[x, y] = 1$, so gelte $C_Q(y) = Z$.

Dann ist G isomorph zu J_4.

BEMERKUNG. (a) Die kürzlich von Janko entdeckte einfache Gruppe J_4 [5] enthält eine 2-lokale Untergruppe, die die Voraussetzungen des Satzes erfüllt.

(b) Die Gruppe $O_{10}^-(2)$ besitzt eine 2-lokale Untergruppe M, die die Bedingung (1) des Satzes erfüllt. Sind x *bzw.* y Elemente der Ordnung 7 bzw. 3 aus M mit $[x, y] = 1$, so ist $C_{O_2(M)}(y)$ eine spezielle Gruppe der Ordnung 2^9 mit $Z(C_{O_2(M)}(y)) = Z(O_2(M))$.

(*) Indirizzo dell'A.: Mathematisches Institut der Universität Heidelberg - Im Neuenheimer Feld 288 - D 6900 Heidelberg, Bundesrepublik Deutschland.
Diese Arbeit wurde von DFG-Mitteln unterstützt.

In dieser Arbeit verwenden wir die Bezeichnungen aus [4]. Weiter heißt eine endliche Gruppe X vom Charakteristik 2-Typ, falls $C_X(O_2(N)) \subseteq O_2(N)$ für alle 2-lokale Untergruppen N von X ist.

Wir beweisen zuerst ein Lemma von T. Yoshida, auf das mich Dr. G. Stroth aufmerksam gemacht hat.

LEMMA Y. Sei X eine endliche Gruppe, $S \in \mathrm{Syl}_2(X)$, $A \subseteq S$, $A' = 1$ und $\exp(A) \leqslant 4$. Sei weiter $|A^g \cap N_X(A)| \leqslant |A|/4$ für jedes $g \in X - N_X(A)$. Dann ist $S \cap X' = S \cap N_X(A)'$.

BEWEIS. Sei $S_1 = N_S(A)$ und $|S_2 : S_1| = 2$. Sei $x \in S_2 - S_1$. Dann ist $A^x \subseteq S_1$. Das widerspricht der Annahme $|A^x \cap S_1| \leqslant |A|/4$. Also ist $S \subseteq N_X(A)$. Setze $H = N_X(A)$. Dann ist $N_X(S) \subseteq N_X(A)$. Sei nun die Behauptung falsch. Dann liefert [7, (4.1)], daß es ein $g \in X - H$ gibt, so daß $H \cap H^g$ eine Singularität von H ist. Weiter ist $S \neq S \cap S^g \in \mathrm{Syl}_2(H \cap H^g)$. Nun ist $|A \cap S \cap S^g| = |A \cap S^g| = |A^{g^{-1}} \cap S| \leqslant |A|/4$. Also ist $4 \leqslant |A : S \cap S^g \cap A|$. Nach [7, (3.2) (3)] ist $S \cap S^g$ eine Singularität von S. Nach [7, (3.10)] gibt es ein Konjugiertes T von $S \cap S^g$ mit $|A : A \cap T| < 4$. Sei $s \in S$ mit $T^s = S \cap S^g$. Dann ist $|A \cap T| = |A \cap T^s| = |A \cap S \cap S^g|$. Das ist ein Widerspruch. q.e.d.

2. Beweis des Satzes.

Von nun an sei G eine endliche Gruppe, die den Voraussetzungen des Satzes genügt.

Setze $\bar{M} = M/Q = \bar{\Sigma} \times \bar{L}$, wobei $\bar{\Sigma} \simeq \Sigma_5$ und $\bar{L} \simeq L_3(2)$. Weiter setze $\tilde{M} = M/Z$.

Wir beweisen den Satz durch eine Serie von Lemmata.

LEMMA 1. Seien $\varrho, \lambda_1 \in M$ mit $o(\varrho) = 5$, $o(\lambda_1) = 3$ und $\bar{\lambda}_1 \in \bar{L}$. Dann gilt $C_Q(\varrho) = Z$ und $C_Q(\lambda_1) \simeq E_{32}$:

BEWEIS: Es ist $7 \| |C_M(\varrho)|$. Da ein Element der Ordnung 7 aus M fixpunktfrei auf Q operiert, gilt $C_Q(\varrho) = Z$. Insbesondere ist $\overline{C_M(Z)} = \bar{\Sigma}$. Sei $F_{21} = \langle \theta, \lambda_1 / \theta^7 = \lambda_1^3 = 1 \rangle \subseteq M$ eine Frobeniusgruppe der Ordung 21. Es ist $\bar{F}_{21} \subseteq \bar{L}$. Offenbar ist $C_M(F_{21}) \simeq \Sigma_5$. Setze $S = C_M(F_{21})$. Wegen $C_Q(\theta) = 1$ ist $|C_Q(\lambda_1)| \leqslant 2^7$ und $|C_Z(\lambda_1)| = 2$. Sei $x \in S$ mit $o(x) = 5$. Da $C_Q(\lambda_1)$ von $\langle x \rangle$ normalisiert wird, gilt $|C_Q(\lambda_1)| = 2^5$. Angenommen, es sei $C_Q(\lambda_1)$ nicht abelsch. Wegen $C_Q(\lambda_1) \cap Z = \langle z \rangle$ und $C_Q(\lambda_1) \cap C_Q(x) = \langle z \rangle$ ist $C_Q(\lambda_1)$ extraspeziell. Somit ist $C_Q(\lambda_1) \simeq D_8 * D_8$. Sei

$\lambda \in S$ mit $o(\lambda) = 3$. Dann ist $C_{C_Q(\lambda_1)}(\lambda) \supsetneqq \langle z \rangle$. Das widerspricht der Voraussetzung (2) des Satzes. Also ist $C_Q(\lambda_1)$ abelsch. Wegen $C_{C_Q(\lambda_1)}(x) = \langle z \rangle$ gilt $C_Q(\lambda_1) \simeq E_{32}$. q.e.d.

Lemma 2. Sei $F_{21} = \langle \theta, \lambda_1 / \theta^7 = \lambda_1^3 = 1 \rangle$ eine Frobeniusgruppe der Ordnung 21 von M mit $\overline{F}_{21} \subseteq \overline{L}$. Dann ist $S = C_M(F_{21}) \simeq \Sigma_5$. Sei $S_0 \subseteq S$ mit $S_0 \simeq A_5$. Sei $D \in \mathrm{Syl}_2(S)$, $E = D \cap S_0 \in \mathrm{Syl}_2(S_0)$ und $f \in D - E$ eine Involution. Dann gilt $C_Q(E) = C_Q(e) \simeq E_{2^9}$ für alle $e \in E^\#$, $C_Q(f) \simeq E_{2^9}$ und $C_Q(E) \cap C_Q(f) \simeq E_{2^6}$.

Beweis. Es ist $N_S(E) \simeq \Sigma_4$. Wegen $C_Q(\lambda_1) \simeq E_{32}$ gilt $|C_Q(e) \cap \cap C_Q(\lambda_1)| \geqslant 2^3$ für alle $e \in E^\#$. Also ist $|C_Q(E) \cap C_Q(\lambda_1)| \geqslant 4$. Weiter ist $C_Q(\lambda_1) \cap Z = \langle z \rangle$. Somit ist $C_Q(E) \supsetneqq Z$. Insbesondere enthält $C_Q(E) - Z$ Involutionen. Setze $W = C_Q(E)$. Sei $\lambda \in N_{S_0}(E)$ mit $o(\lambda) = 3$. Offenbar wird W von $\langle \theta, \lambda \rangle$ normalisiert. Wegen $C_W(\theta) = 1$ und $C_W(\lambda) = Z$ gilt $|W| = 2^9$. Sei $e \in E^\#$. Dann invertiert e ein Element y der Ordnung 3 aus S_0. Wegen $C_Q(y) = Z$ folgt $C_Q(e) = W$. Angenommen, es sei W nicht abelsch. Dann ist $W' = \Phi(W) = Z$. Da $Z(W)$ von $\langle \theta, \lambda \rangle$ normalisiert wird, ist $Z(W) = Z$. Also ist W eine spezielle Gruppe der Ordnung 2^9 mit $Z(W) = Z$. Da W von $F_{21} \times \langle \lambda \rangle$ normalisiert wird, haben wir $C_Q(W) = Z$ oder $C_Q(W) = W_1$, dabei ist $|W_1| = 2^9$. Sei $C_Q(W) = Z$. Dann ist $C_{Q \cdot E}(W) = Z \times E \trianglelefteq Q \cdot E$. Da $C_Q(e) = W$ für $e \in E^\#$ ist, hat e genau 64 Konjugierte unter der Wirkung von Q, im Widerspruch zu $Z \times E \trianglelefteq Q \cdot E$ und $Z \times E \simeq E_{32}$. Also ist $C_Q(W) = W_1$. Es folgt $Q = W \cdot W_1$ und $W \cap W_1 = Z$. Wegen $C_Q(\lambda_1) \simeq E_{2^5}$ gilt $C_{W_1}(\lambda_1) \simeq E_{2^3}$. Also ist $|C_{W_1}(e) \cap C_{W_1}(\lambda_1)| \geqslant 4$ und $C_{W_1}(e) \cap C_{W_1}(\lambda_1) \nsubseteq Z$ für $e \in E^\#$, im Widerspruch zu $C_Q(e) = W$. Damit ist W abelsch. Wegen $C_W(\lambda_1) \simeq E_8$ und $|C_W(\lambda_1) \cap Z| = 2$ enthält $W - Z$ Involutionen. Also ist $\Omega_1(W) \neq Z$. Da $\Omega_1(W)$ von $\langle \theta, \lambda \rangle$ normalisiert wird, gilt $W = \Omega_1(W) \simeq E_{2^9}$. Nun ist $3 \,\big|\, |C_S(f)|$. Wegen $|C_{C_Q(\lambda_1)}(f)| \geqslant 8$ enthält $C_Q(f) - Z$ Involutionen. Sei $\lambda_0 \in C_S(f)$ mit $o(\lambda_0) = 3$.

Da $C_Q(f)$ von $\langle \theta, \lambda_0 \rangle$ normalisiert wird, ist $|C_Q(f)| = 2^9$. Angenommen, es sei $C_Q(f)$ nicht abelsch. Offenbar ist $C_Q(f)' = \Phi(C_Q(f)) = Z(C_Q(f)) = Z$. Da $C_Q(f)$ von $\langle \theta, \lambda_1, \lambda_0 \rangle$ normalisiert wird, gilt $C_Q(C_Q(f)) = Z$ oder X, dabei ist X eine spezielle Gruppe der Ordnung 2^9 mit $Z(X) = Z$ und $C_Q(f) \cap X = Z$. Sei $C_Q(C_Q(f)) = Z$. Dann ist $C_{Q \cdot \langle f \rangle}(C_Q(f)) = Z \times \langle f \rangle \trianglelefteq Q \cdot \langle f \rangle$ und $Z \times \langle f \rangle \simeq E_{16}$. Andererseits besitzt die Nebenklasse fQ genau 64 Konjugierte von f unter der Wirkung von Q, ein Widerspruch. Also ist $C_Q(C_Q(f)) = X$. Es folgt $C_X(\lambda_1) \simeq E_8$ und $|C_X(f) \cap C_X(\lambda_1)| \geqslant 4$. Somit ist $C_X(f) \supsetneqq Z$, im Widerspruch zu $C_Q(f) \cap X = Z$. Also ist $C_Q(f)$ abelsch. Da $C_Q(f) - Z$ Involutionen enthält, ist $\Omega_1(C_Q(f)) \supsetneqq Z$. Ferner wird $\Omega_1(C_Q(f))$ von $\langle \theta, \lambda_0 \rangle$ normalisiert. Also folgt $C_Q(f) = \Omega_1(C_Q(f)) \simeq E_{2^9}$. Da f ein Element der Ordnung 3 aus $N_S(E)$ invertiert, ist $|C_W(f)| \leqslant 2^6$. Weiter wird $C_W(f)$ von $\langle \theta \rangle$ normalisiert. Daher ist $C_W(f) \simeq E_{2^6}$. q.e.d.

Sei E eine feste Sylow 2-Untergruppe von S_0. Setze $W = C_Q(E)$ and $V = E \times W$. Est ist $W \simeq E_{2^9}$ und $V \simeq E_{2^{11}}$. Sei T eine Sylow 2-Untergruppe von M, die V enthält.

Lemma 3. Es gilt:

(a) $V \trianglelefteq T$.

(b) $N_M(V)/V$ ist eine treue Erweiterung einer elementar abelschen Gruppe der Ordnung 2^6 mit $\Sigma_3 \times L_3(2)$.

Beweis. (a) Nach Lemma 2 ist $C_Q(e) = C_Q(E) = W$ für $e \in E^\#$. Wegen $C_Q(e) = W$ invertiert e keine Elemente der Ordnung 4 von Q. Also liegen alle Involutionen der Nebenklasse eQ in eW. Somit ist $V \trianglelefteq T$.

(b) Es ist $N_M(Q \cdot E)/Q \cdot E \simeq \Sigma_3 \times L_3(2)$. Da $N_M(Q \cdot E)$ die Menge aller Involutionen aus $V - W$ normalisizert, folgt $V \trianglelefteq N_M(Q \cdot E)$. Andererseits normalisiert $N_M(V)$ die Gruppe $Q \cdot E$, also gilt $N_M(V) = N_M(Q \cdot E)$. Daraus folgt (b). q.e.d.

Lemma 4. Sei $\mathfrak{U} = \{u \in Q / o(u) = 2 \text{ und } |C_Q(u)| = 2^{13}\}$. Dann gilt $Q = \langle \mathfrak{U} \rangle$ und $W = \langle \mathfrak{U} \cap W \rangle$.

Beweis. Wir zeigen zuerst, daß $\mathfrak{U} \neq \emptyset$ ist. Sei $\lambda_1 \in N_M(V)$ mit $o(\lambda_1) = 3$ und $\bar{\lambda}_1 \in \bar{L}$. Dann ist $C_W(\bar{\lambda}_1) \simeq E_8$ und $C_W(\bar{\lambda}_1) \neq Z$. Sei $u \in C_W(\bar{\lambda}_1) - Z$. Wegen $C_Q(\bar{\lambda}_1) \simeq E_{2^5}$ gilt $C_Q(u) \supseteq C_Q(\bar{\lambda}_1)$. Damit operiert $\langle \bar{\lambda}_1 \rangle$ fixpunktfrei auf $Q/C_Q(u)$. Da $2 \leqslant |Q/C_Q(u)| \leqslant 8$ ist, erzwingt das $|Q/C_Q(u)| = 4$. Also ist $\mathfrak{U} \neq \emptyset$. Da ein Element der Ordnung 35 aus $\tilde{M}$ fixpunktfrei auf $\tilde{Q}$ operiert, folgt $Q = \langle \mathfrak{U} \rangle$. Offenbar ist $N_M(W) = N_M(V)$. Setze $X = \langle \mathfrak{U} \cap W \rangle$. Dann ist $X \supsetneqq Z$ und $X \trianglelefteq N_M(W)$. Da ein Element der Ordnung 7 aus $N_M(V)$ fixpunktfrei auf X operiert, folgt $|X| = 2^6$ order 2^9. Ferner ist $C_{X/Z}(\bar{\lambda}) = 1$ für $\bar{\lambda} \in \overline{N_M(V)}$, $o(\bar{\lambda}) = 3$ und $\bar{\lambda} \in \bar{\Sigma}$. Also ist $|X| = 2^9$. Daher ist $W = \langle \mathfrak{U} \cap W \rangle$. q.e.d.

Lemma 5. Seien $s, t, r \in M - Q$ Involutionen mit $\bar{s} \in \bar{\Sigma}$, $\bar{t} \in \bar{L}$ und $\bar{r} \notin \bar{\Sigma}$, $\bar{r} \notin \bar{L}$. Dann gilt:

(a) $|C_Q(t)| \leqslant 2^{10}$ und $C_Q(t)$ enthält keine elementar abelsche Unter gruppe der Ordnung 2^9.

(*b*) $|C_Q(r)| \leqslant 2^8$. Ist $|C_Q(r)| = 2^8$, so ist $C_Q(r)$ nicht abelsch.

(*c*) Ist $[i, j] = 1$ für $i, j \in \{s, t, r\}$, $i \neq j$, so ist $|C_Q(i) \cap C_Q(i)| \leqslant 2^6$.

Beweis. (*a*) Offenbar invertiert t ein Element x der Ordnung 3 aus M mit $\bar{x} \in \bar{L}$. Wegen $|C_Q(x)| = 2^5$ gilt $|C_Q(t)| \leqslant 2^{10}$. Angenommen, $C_Q(t)$ enthalte eine elementar abelsche Untergruppe A der Ordung 2^9. Dann ist $A^x \subseteq C_Q(t^x)$. Wegen $|A| = |A^x| = 2^9$ und $A \cap A^x \subseteq C_Q(t) \cap \cap C_Q(t^x) \subseteq C_Q(x)$ ist $2^3 \leqslant |A \cap A^x| \leqslant 2^5$. Ferner ist $Z \not\subseteq C_Q(t)$ und $Z \not\subseteq \not\subseteq C_Q(t^x)$. Also ist $Z \not\subseteq A \cap A^x$. Somit folgt $2^4 \leqslant |A \cap A^x| \leqslant 2^5$. Sei $|A \cap A^x| = 2^4$. Dann ist $|\langle A, A^x\rangle| = 2^{14}$. Nach Lemma 4 gilt $Q = = \langle A, A^x\rangle\langle u\rangle$ mit geeignetem $u \in \mathfrak{U}$. Wegen $|(A \cap A^x)\cdot Z| = 2^6$ und $(A \cap A^x)\cdot Z \subseteq Z(\langle A, A^x\rangle)$ ist $|C_Q(u) \cap (A \cap A^x)\cdot Z| \geqslant 2^4$ und $C_Q(u) \cap \cap (A \cap A^x)\cdot Z \subseteq Z(Q)$, ein Widerspruch. Also ist $|A \cap A^x| = 2^5$. Somit ist $A \cap A^x = C_Q(x)$ und $|\langle A, A^x\rangle| = 2^{13}$. Es ist $\langle A, A^x\rangle \subseteq \subseteq C_Q(A \cap A^x) \neq Q$. Ferner operiert x fixpunktfrei auf $Q/C_Q(A \cap A^x)$, also gilt $C_Q(A \cap A^x) = \langle A, A^x\rangle$. Sei $\bar{y} \in C_{\bar{M}}(\bar{x})$ mit $o(\bar{y}) = 5$. Dann operiert $\langle \bar{y}\rangle$ auf $C_Q(A \cap A^x)$. Aus $C_{\tilde{Q}}(\bar{y}) = 1$ folgt ein Widerspruch. Also enthält $C_Q(t)$ keine elementar abelsche Untergruppe der Ordnung 2^9.

(*b*) Es ist $\bar{r} = \bar{r}_1 \cdot \bar{r}_2$, dabei ist $\bar{r}_1 \in \bar{\Sigma}$, $\bar{r}_2 \in \bar{L}$ und $o(\bar{r}_1) = o(\bar{r}_2) = 1$. Da $\bar{r}$ ein Element der Ordnung 5 aus M invertiert, ist $|C_{\tilde{Q}}(\bar{r})| \leqslant 2^6$. Ferner ist $C_Z(\bar{r}) \neq Z$. Daraus foglt $|C_Q(r)| \leqslant 2^8$. Weiter invertiert r ein Element λ_1 der Ordnung 3 aus M mit $\bar{\lambda}_1 \in \bar{L}$. Wir haben $\tilde{Q} = \tilde{P}_1 \times \tilde{P}_2$, wobei $\tilde{P}_1 = C_{\tilde{Q}}(\bar{\lambda}_1)$ und $\tilde{P}_2 = [\tilde{Q}, \bar{\lambda}_1]$. Seien P_1 bzw. P_2 Urbilder von $\tilde{P}_1$ bzw. $\tilde{P}_2$ in Q. Dann ist $P_1 \simeq E_{2^7}$ und $|P_2| = 2^{11}$. Sei $C_Q(r) = 2^8$ und sei $C_Q(r)$ abelsch. Wegen $|C_Q(\bar{r})| = 2^8$ gilt $C_Q(r) = C_Q(\bar{r})$. Setzen wir $X = C_Q(r) \cap C_Q(\lambda_1)$, so ist $X \simeq E_8$ und $X \neq Z$. Da $C_Q(r)$ abelsch ist, gilt $C_Q(r) \subseteq C_Q(X)$. Es ist $|C_{P_2}(\bar{r})| = 2^6$. Also ist $|C_{P_2}(r)| = 2^6$. Weiter ist $C_{P_2}(r) \cap C_{P_2}(r^{\lambda_1}) \subseteq Z$ und $C_Q(X) \cap P_2$ ist $\langle\lambda_1\rangle$-zulässig. Wegen $C_{P_2}(r) \subseteq C_Q(X) \cap P_2$ gilt $C_Q(X) \cap P_2 = P_2$. Damit ist $X \subseteq Z(\langle P_1, P_2\rangle)$. Da $\langle P_1, P_2\rangle = Q$ ist, folgt ein Widerspruch. Somit ist (*b*) bewiesen.

(*c*) Sei $[s, t] = 1$. Da die Involutionen der Nebenklasse sQ in $sC_Q(s)$ liegen, ist $\overline{N_M(C_Q(s))} \subseteq \bar{L}$. Wir haben $x^t = x^{-1}$, dabei ist $x \in M$, $o(x) = 3$ und $\bar{x} \in \bar{L}$. Wegen $C_Q(s) \simeq E_{2^9}$ und $C_Q(s) \cap C_Q(x) \simeq E_8$ folgt $|C_Q(s) \cap C_Q(t)| \leqslant 2^6$. Sei $[s, r] = 1$. Es invertiert r ein Element y der Ordnung 3 aus M mit $\bar{y} \in \bar{L}$. Da $|C_Q(\bar{s}) \cap C_Q(\bar{y})| = 8$ ist, gilt $|C_Q(\bar{s}) \cap \cap C_Q(\bar{r})| \leqslant 2^6$. Somit ist $|C_Q(s) \cap C_Q(r)| \leqslant 2^6$. Sei schließlich $[r, t] = 1$. Es invertiert $\bar{r}$ ein Element $\bar{\lambda}$ der Ordnung 3 aus $\bar{\Sigma}$. Da $\langle\bar{\lambda}\rangle$ fixpunktfrei auf $C_Q(\bar{t})/C_Q(\bar{t}) \cap Z$ operiert, folgt $|C_Q(\bar{r}) \cap C_Q(\bar{t})| \leqslant 2^6$. Also ist $|C_Q(r) \cap C_Q(t)| \leqslant 2^6$. q.e.d.

Lemma 6. Sei $\bar{U}$ eine Vierergruppe von $\overline{N_M(V)}$ mit $\bar{U} \subseteq \bar{L}$. Dann gilt $|C_W(\bar{U})| \leqslant 2^5$.

Beweis. Setze $\overline{N_M(V)} = \bar{D} \times \bar{L}$, dabei ist $\bar{D} \simeq \Sigma_4$ und $\bar{L} \simeq L_3(2)$. Sei $\bar{C} = \langle \bar{\lambda}, \bar{s} / \bar{\lambda}^3 = \bar{s}^2 = 1 \rangle \simeq \Sigma_3$ eine Untergruppe von $\bar{D}$. Es ist $|C_W(\bar{s}) = |C_W(\bar{s}^{\bar{\lambda}})| = 2^6$ und $C_W(\bar{s}) \cap C_W(\bar{s}^{\bar{\lambda}}) = Z$. Setze $A = C_W(\bar{s})$ und $Y = C_Q(A)$. Wegen $C_Q(\bar{s}) \simeq E_{2^9}$ ist $Y \supsetneqq W$. Da Y von $\bar{L}$ normalisiert wird, gilt $|Y| = 2^{12}$. Wegen $C_Q(W) = W$ ist $Z(Y) = A$. Sei $\bar{F}_{21} = \langle \bar{\theta}, \bar{\lambda}_1 / \bar{\theta}^7 = \bar{\lambda}_1^3 = 1 \rangle$ eine Frobenius-gruppe der Ordnung 21 von $\bar{L}$. Nach einem Theorem von Maschke ist $\tilde{Y} = \tilde{A} \times \tilde{B}$, dabei ist $\tilde{B}$ eine $\bar{F}_{21}$-zulässige Untergruppe von $\tilde{Y}$. Sei B das Urbild von $\tilde{B}$ in Q. Dann ist $|B| = 2^9$, und B ist nicht abelsch. Wegen $Z(Y) = A$ und da $\bar{F}_{21}$ auf B operiert gilt $B' = \Phi(B) = Z(B) = Z$. Also ist B speziell. Nach [2] ist die Struktur von B eindeutig bestimmt. Insbesondere ist $\tilde{B} = \tilde{B}_1 \oplus \tilde{B}_2$, dabei sind $\tilde{B}_1$ and $\tilde{B}_2$ zwei isomorphe $\langle \theta \rangle$-Moduln und Z ist als $\langle \theta \rangle$-Modul nicht isomorph zu $\tilde{B}_1$ und $\tilde{B}_2$. Wegen $\tilde{A}^{\bar{\lambda}_1}$ und $\tilde{A} \cap \tilde{A}^{\bar{\lambda}_1} = 1$ sind $\tilde{A}^{\bar{\lambda}_1}$ und $\tilde{A}$ als $\langle \theta \rangle$-Moduln isomorph zu $\tilde{B}_1$ und $\tilde{B}_2$, aber nicht zu Z. Ferner ist $\tilde{W} = \tilde{A} \times \tilde{A}^{\bar{\lambda}_1}$ und $\bar{L}$ operiert auf $\tilde{A}$ und $\tilde{A}^{\bar{\lambda}_1}$. Damit sind $\tilde{A}$ und $\tilde{A}^{\bar{\lambda}_1}$ als $\bar{L}$-Moduln dual zu Z. Also folgt $|C_W(\bar{U})| \leqslant 2^5$. q.e.d.

Lemma 7. V ist die einzige elementar abelsche Untergruppe der Ordnung 2^{11} von T. Insbesondere ist V schwach abgeschlossen in T in bezug auf G.

Beweis. Sei V_1 eine elementar abelsche Untergruppe der Ordnung 2^{11} von T. Angenommem, es sei $V_1 \subseteq Q$. Da $\bar{M}$ irreduzibel auf $\tilde{Q}$ operiert, gibt es ein $h \in M$ mit $V_2 = V_1^h \neq V_1$. Offenbar gilt $2^8 \leqslant |V_1 \cap V_2| \leqslant 2^{10}$ und $|\langle V_1, V_2 \rangle| \geqslant 2^{12}$. Weiter ist $V_1 \cap V_2 \subseteq Z(\langle V_1, V_2 \rangle)$. Nach Lemma 4 ist $Q = \langle V_1, V_2 \rangle \cdot X$, Dabei gilt

$$X = \langle u \rangle, \quad \text{falls } |\langle V_1, V_2 \rangle| = 2^{14}$$

$$X = \langle u_1, u_2 \rangle, \quad \text{falls } |\langle V_1, V_2 \rangle| = 2^{13}$$

$$X = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle, \quad \text{falls } |\langle V_1, V_2 \rangle| = 2^{12},$$

mit geeigneten $u, u_1, u_2, v_1, v_2, v_3 \in \mathfrak{U}$. In allen Fällen gilt $|C_Q(X) \cap V_1 \cap V_2| \geqslant 2^4$. Aber $C_Q(X) \cap V_1 \cap V_2 \subseteq Z(Q)$. Das ist ein Widerspruch. Also ist $V_1 \not\subseteq Q$. Wegen $\bar{T} \simeq D_8 \times D_8$ gilt $|V_1 \cap Q| \geqslant 2^7$. Sei $|V_1 / V_1 \cap Q| \geqslant 2^3$. Dann enthält $V_1 - (V_1 \cap Q)$ zwei Involutionen s, t mit $\bar{s} \in \bar{\Sigma}$, $\bar{t} \in \bar{L}$. Aus $V_1 \cap Q \subseteq C_Q(s) \cap C_Q(t)$ folgt mit Lemma 5(c) ein

Widerspruch. Also ist $|V_1/V_1 \cap Q| \leqslant 2^2$. Nach Lemma 5 gilt $|V_1/V_1 \cap \cap Q| = 2^2$, und $\overline{V}_1 \subseteq \overline{\Sigma}$. Mit Lemma 2 erhalten wir $V_1 = V$. q.e.d.

LEMMA 8. T ist eine Sylow 2-Untergruppe von G.

BEWEIS. Angenommen, es sei $T \notin \mathrm{Syl}_2(G)$. Dann ist $T \subseteq T_1 \subseteq G$ und $|T_1 : T| = 2$. Sei $t \in T_1 - T$. Nach Lemma 7 ist $V^t = V$. Ferner ist $Q^t \neq Q$. Mit Lemma 2 und 5 folgt $Z^t \subseteq Q$. Insbesondere ist $|Q \cap Q^t| \geqslant 2^{11}$. Sei $\overline{V \cap Q^t} \neq 1$. Nach Lemma 4 ist $W = \langle W \cap \mathfrak{U} \rangle$, also gibt es ein $u \in W \cap \mathfrak{U}$ mit $u^t \in V \cap Q^t - Q$. Wegen $|Q \cap Q^t| \geqslant 2^{11}$ gilt $|C_{Q \cap Q^t}(u^t)| \geqslant 2^9$. Also ist $W = C_{Q \cap Q^t}(u^t) \subseteq Q \cap Q^t$. Somit ist $W^t = (V \cap Q)^t = V \cap Q^t \subseteq Q \cap Q^t$, im Widerspruch zu der Annahme $\overline{V \cap Q^t} \neq 1$. Also ist $\overline{V \cap Q^t} = 1$. Inbesondere ist $V \cap Q^t \subseteq Q$. Es folgt $V \cap Q^t \subseteq Q \cap V = W$. Da $|V \cap Q^t| = |W|$ gilt $V \cap Q^t = W$. Nach Lemma 4 gibt es ein $u \in \mathfrak{U}$ derart, daß $u^t \in Q^t - Q$ ist. Wegen $|C_{Q^t}(u^t)| = 2^{13}$ folgt $|C_{V \cap Q^t}(u^t)| = |C_W(u^t)| \geqslant 2^7$. Da $\overline{V \cap Q^t} = 1$ ist, ist $u^t \notin V \cdot Q$. Somit invertiert u^t ein Element λ der Ordnung 3 aus $N_M(V)$. Wegen $|C_W(\lambda)| = 2^3$ folgt $|C_W(u^t)| \leqslant 2^6$, ein Widerspruch. Also ist $T \in \mathrm{Syl}_2(G)$. q.e.d.

LEMMA 9. Sei $|V^g \cap N_G(V)| = 2^{10}$ für ein $g \in G - N_G(V)$. Dann gilt $V^g \cap N_G(V) \subseteq V$.

BEWEIS. Wegen $T \in \mathrm{Syl}_2(N_G(V))$ können wir o.B.d.A. annehmen $|V^g \cap T| = 2^{10}$. Setze $X = V^g \cap T$ und $\overline{T} = \overline{D}_1 \times \overline{D}_2$, dabei ist $\overline{D}_1 \simeq \simeq \overline{D}_2 \simeq D_8$, $\overline{D}_1 \subseteq \overline{\Sigma}$, $\overline{D}_2 \subseteq \overline{L}$. Angenommen, es sei $X \nsubseteq V$. Offenbar ist $|X \cap Q| \geqslant 2^6$. Wegen $V^g \nsubseteq M$ ist $Z \nsubseteq X$. Mit Lemma 7 folgt insbesondere $X \nsubseteq Q$. Also ist $\overline{X} \neq 1$. Sei $\overline{X} \subseteq \overline{D}_1$. Sei $|\overline{X}| = 2$. Dann ist $|X \cap Q| = 2^9$ und $X = \langle x \rangle \times (X \cap Q) = \langle x \rangle \times C_Q(x)$, dabei ist $x \in X - Q$. Wegen $C_Q(x) \supseteq Z$ ist $X \supseteq Z$, ein Widerspruch. Also ist $|\overline{X}| = 4$, $|X \cap Q| = 2^8$ und $X \cap Q \subseteq C_Q(\overline{X})$. Andererseits ist $\overline{X} \neq \overline{V}$, also gilt nach Lemma 2 $|C_Q(\overline{X})| = 2^6$, ein Widerspruch. Damit ist $\overline{X} \nsubseteq \overline{D}_1$. Sei $\overline{X} \cap \overline{D}_1 = 1$. Dann ist $|\overline{X}| \leqslant 4$ und $|X \cap Q| \geqslant 2^8$. Sei $|\overline{X}| = 2$. Dann ist $|X \cap Q| = 2^9$ und $X \cap Q \subseteq C_Q(\overline{X})$. Da $\overline{X} \cap \overline{D}_1 = 1$ ist, liefert Lemma 5 einen Widerspruch. Also ist $|\overline{X}| = 4$ und $|X \cap Q| = 2^8$. Nach lemma 5 gilt $\overline{X} \subseteq \overline{D}_2$. Sei $|X \cap Z| = 2$. Dann ist $C_Q(x) \supseteq C_Z(x) \cdot (X \cap Q)$ für ein $x \in X - Q$. Aus $C_Z(x) \cdot (X \cap Q) \simeq E_{2^9}$ folgt nun mit Lemma 5(a) ein Widerspruch. Also ist $|X \cap Z| = 4$. Da ein Element der Ordnung 5 aus $\overline{\Sigma}$ fixpunktgrei auf $C_Q(\overline{X})/C_Z(\overline{X})$ operiert, folgt $|C_Q(\overline{X})| = 2^{10}$. Daher ist $|C_{\widetilde{C_Q(\overline{X})}}(\tilde{e})| \geqslant 2^4$ für $\tilde{e} \in \widetilde{V}^{\#}$. Wegen $W = C_Q(\tilde{e})$ folgt $|W \cap C_Q(\overline{X})| \geqslant 2^6$, im Widerspruch zu Lemma 7. Somit ist $\overline{X} \cap \overline{D}_1 \neq 1$. Wegen $\overline{X} \nsubseteq \overline{D}_1$ gilt $2^2 \leqslant |\overline{X}| \leqslant 2^4$. Sei $2^2 \leqslant |\overline{X}| \leqslant 2^3$. Dann ist $2^7 \leqslant |X \cap Q| \leqslant 2^8$ und

$X \cap Q \subseteq C_Q(\bar{X})$, im Widerspruch zu Lemma 5. Also ist $|\bar{X}| = 2^4$ und $|X \cap Q| = 2^6$. Insbesondere ist $\bar{X} \cap \bar{V} \neq 1$. Da $X \cap Q \subseteq C_Q(\bar{X} \cap \bar{V})$ ist, gilt $X \cap Q \subseteq W$. Aus $|\bar{X} \cap \bar{D}_2| = 4$ und $X \cap Q \subseteq C_Q(\bar{X} \cap \bar{D}_2)$ folgt mit Lemma 6 ein Widerspruch. Somit ist $X \subseteq V$. q.e.d.

LEMMA 10. Es gilt:

(*a*) $N_G(V) \not\subseteq M$.

(*b*) $N_G(V)$ enthält keine Untergruppe vom Index 2.

BEWEIS. Wir zeigen zuerst, daß $|V^g \cap N_G(V)| \leqslant 2^9$ für alle $g \in G - N_G(V)$ ist. Angenommen, es sei $|V^g \cap N_G(V)| = 2^{10}$ für ein $g \in G - N_G(V)$. Setze $X = V^g \cap N_G(V)$. Nach Lemma 9 ist $X \subseteq V$. Offenbar ist $C_G(X) \not\subseteq M$. Nun ist V/X eine Involution aus $C_G(X)/X$. Sei Y das Urbild von $C_{C_G(X)}(V/X)$ in $C_G(X)$. Dann gilt $V \subseteq Y \subseteq N_G(V)$. Sei $y \in Y$ ein Element ungerader Ordnung. Wegen $[X, y] = 1$ ist $[V, y] = 1$. Da $C_G(V) = V$ ist, gilt $y = 1$. Also ist Y eine 2-gruppe. Sei $V \subsetneqq Y$. Es gibt ein $h \in N_G(V)$ mit $V \subsetneqq Y^h \subseteq T$. Weiter ist $X^h \subseteq V \subseteq T$ und $X^h = V^{gh} \cap N_G(V) = V^{gh} \cap N_M(V)$. Wegen $[X, Y] = 1$ ist $[X^h, Y^h] = 1$. Wegen $C_{N_M(V)}(X^h) = V$ ist das ein Widerspruch. Also ist $V = Y$. Insbesondere ist V/X selbst-zentralizierend in $C_G(X)/X$. Daher besitzt $C_G(X)/X$ ein normales 2-Komplement $\mathfrak{K}$. Sei K das Urbild von $\mathfrak{K}$ in $C_G(X)$. Dann gilt $K = X \times R$. Dabei ist R eine 2'-gruppe. Es ist $|C_G(X): K| = 2$. Also ist $R = O(C_G(X))$. Es folgt $R \trianglelefteq N_G(X)$. Dies widerspricht jedoch der Voraussetzung, daß G vom Charakteristik 2-Typ ist. Also ist $|V^g \cap N_G(V)| \leqslant 2^9$ für alle $g \in G - N_G(V)$. Nach Lemma Y ist $T \cap G' = T \cap N_G(V)'$. Somit ist $N_G(V) \not\subseteq M$ und $N_G(V)$ enthält keine Untergruppe vom Index 2. q.e.d.

LEMMA 11. Es gilt $N_G(V)/V \simeq M_{24}$.

BEWEIS. Setze $N = N_G(V)$, $\mathcal{N} = N/V$ und $\mathcal{N}_1 = N_M(V)/V$. Es ist $\mathcal{N}_1 \simeq E_{2^6} \cdot (\Sigma_3 \times L_3(2))$. Sei $\lambda \in \mathcal{N}$ ein Element der Ordnung 3 mit $C_V(\lambda) = Z$. Dann gilt $N_{\mathcal{N}}(\langle\lambda\rangle) = N_{\mathcal{N}_1}(\langle\lambda\rangle) \simeq \Sigma_3 \times L_3(2)$. Sei $O(\mathcal{N}) \neq 1$. Offenbar ist $O(\mathcal{N}) \cap \mathcal{N}_1 = 1$. Also ist $\lambda \notin O(\mathcal{N})$ und $C_{O(\mathcal{N})}(\lambda) = 1$. Insbesondere ist $O(\mathcal{N})$ eine 3'-Gruppe. Ferner ist $\mathcal{N}$ isomorph zu einer Untergruppe von $GL(11, 2)$. Wegen $|GL(11, 2)|_{2'} = 3^6 \cdot 5^2 \cdot 7^3 \cdot 11 \cdot 17 \cdot 23 \cdot 31^2 \cdot 73 \cdot 89 \cdot 127$ ist $O(\mathcal{N})$ eine $\{5, 7, 31, 73, 127\}$-Gruppe. Sei $\mathcal{F} = \langle \theta, \lambda_1 / \theta^7 = \lambda_1^3 = 1 \rangle$ eine Frobeniusgruppe der Ordnung 21 von $N_{\mathcal{N}_1}(\langle\lambda\rangle)$ derart, daß $C_{N_{\mathcal{N}}(\langle\lambda\rangle)}(\mathcal{F}) = \langle \lambda, \tau / \lambda^3 = \tau^2 = 1 \rangle \simeq \Sigma_3$ ist.

(*a*) Sei $7 \big| |O(\mathcal{N})|$. Offenbar normalisiert $\langle \lambda, \tau \rangle$ eine Sylow 7-Untergruppe $\mathfrak{R}_7$ von $O(\mathcal{N})$. Nach dem Frattini-Argument gilt $\mathcal{N} = O(\mathcal{N}) \cdot$

$\cdot N_{\mathcal{N}}(\mathfrak{R}_7)$. Insbesondere ist $C_{N_{\mathcal{N}}(\mathfrak{R}_7)}(\langle\lambda, \tau\rangle) \simeq C_{\mathcal{N}_1}(\langle\lambda, \tau\rangle)$. Ferner ist $C_{\mathcal{N}}(\langle\lambda, \tau\rangle) = C_{\mathcal{N}_1}(\langle\lambda, \tau\rangle)$. Also ist $C_{\mathcal{N}_1}(\langle\lambda, \tau\rangle) = C_{N_{\mathcal{N}}(\mathfrak{R}_7)}(\langle\lambda, \tau\rangle)$. Es folgt $\mathcal{F} \times \langle\lambda, \tau\rangle \subseteq N_{\mathcal{N}}(\mathfrak{R}_7)$. Wegen $C_{\mathfrak{R}_7}(\lambda) = 1$ gilt $1 \neq C_{\mathfrak{R}_7}(\tau) \neq \mathfrak{R}_7$. Damit ist $|\mathfrak{R}_7| = 7^2$. Es ist $\mathfrak{R}_7 = C_{\mathfrak{R}_7}(\tau) \times [\mathfrak{R}_7, \tau]$ und $C_{\mathfrak{R}_7}(\tau) \simeq \simeq [\mathfrak{R}_7, \tau] \simeq Z_7$. Setze $C_{\mathfrak{R}_7}(\tau) = \langle\theta_1\rangle$ und $[\mathfrak{R}_7, \tau] = \langle\theta_2\rangle$. Dann ist $\mathfrak{R}_7\langle\theta\rangle = \langle\theta_1, \theta_2, \theta\rangle \simeq E_{7^3}$. Wir haben $W = [V, \theta] \simeq E_{2^9}$ und $C_W(\tau) \simeq E_{2^6}$. Ferner ist $\langle\theta_2, \tau\rangle$ eine Diedergruppe der Ordnung 14. Also gilt $C_W(\tau) \cap \cap C_W(\theta_2) \simeq E_8$ und $C_W(\tau) \cap [W, \theta_2] \simeq E_8$. Setzen wir $W_1 = C_W(\tau) \cap \cap C_W(\theta_2)$ und $W_2 = C_W(\tau) \cap [W, \theta_2]$, so ist $W_1 \cap W_2 = 1$ und $C_W(\tau) = = W_1 \times W_2$. Wegen $\theta_2 \notin M$ ist $W_1 \neq Z$. Da $W_1 \cap Z$ von $\langle\theta\rangle$ normalisiert wird, gilt $W_1 \cap Z = 1$. Aus dem Beweis des Lemmas 6 wissen wir, daß $C_W(\tau)/Z$ und Z zwei nichtisomorphe $\langle\theta\rangle$-Moduln sind. Also sind W_1 und W_2 die einzigen $\langle\theta\rangle$-zulässigen Untergruppen der Ordnung 8 von $C_W(\tau)$. Daher gilt $W_2 = Z$. Somit wird Z von $\langle\theta, \theta_1\rangle$ normalisiert und $C_{\langle\theta,\theta_1\rangle}(Z) \simeq Z_7$, ein Widerspruch. Also ist $7 \nmid |O(\mathcal{N})|$.

(b) Sei $5 \,|\, |O(\mathcal{N})|$. Da $O(\mathcal{N})$ eine $7'$-Gruppe ist, normalisiert $\mathcal{F} \times \langle\lambda, \tau\rangle$ eine Sylow 5-Untergruppe $\mathfrak{R}_5$ von $O(\mathcal{N})$. Wegen $C_{\mathfrak{R}_5}(\lambda) = 1$ gilt $|\mathfrak{R}_5| = 5^2$. Insbesondere ist $[\theta, \mathfrak{R}_5] = 1$. Damit normalisiert $\mathfrak{R}_5$ die gruppe $W = [V, \theta]$. Weiter operiert $\mathfrak{R}_5$ treu auf W. Also ist $|C_W(\varrho)| = 2$ oder 2^5 für alle $\varrho \in \mathfrak{R}_5^{\#}$. Da $C_W(\varrho)$ von $\langle\theta\rangle$ normalisizert wird, ist das ein Widerspruch. Also ist $5 \nmid |O(\mathcal{N})|$.

(c) Sei $31 \,|\, |O(\mathcal{N})|$. Da $O(\mathcal{N})$ eine $\{3, 5, 7\}'$-Gruppe ist, normalisiert $\mathcal{F} \times \langle\lambda, \tau\rangle$ eine Sylow 31-Untegruppe $\mathfrak{R}_{31}$ von $O(\mathcal{N})$. Wegen $C_{\mathfrak{R}_{31}}(\lambda) = 1$ gilt $1 \neq C_{\mathfrak{R}_{31}}(\tau) \neq \mathfrak{R}_{31}$. Also ist $|\mathfrak{R}_{31}| = 31^2$ und $C_{\mathfrak{R}_{31}}(\tau) \simeq Z_{31}$. Es folgt $[C_{\mathfrak{R}_{31}}(\tau), \theta] = 1$. Weiter ist $[W, C_{\mathfrak{R}_{31}}(\tau)] \simeq E_{2^5}$ und $[W, C_{\mathfrak{R}_{31}}(\tau)]$ ist $\langle\theta\rangle$-zulässig, ein Widerspruch. Also ist $31 \nmid |0(\mathcal{N})|$.

(d) Sei $73, 127 \,|\, |O(\mathcal{N})|$. Dann normalisiert $\mathcal{F} \times \langle\lambda, \tau\rangle$ eine Sylow 73-Untergruppe $\mathfrak{R}_{73}$ und eine Sylow 127-Untergruppe $\mathfrak{R}_{127}$ von $O(\mathcal{N})$. Da $C_{\mathfrak{R}_{73}}(\lambda) = C_{\mathfrak{R}_{127}}(\lambda) = 1$ ist, gilt $[\mathfrak{R}_{73}, \tau] \simeq \mathfrak{R}_{73}$ und $[\mathfrak{R}_{127}, \tau] \simeq \mathfrak{R}_{127}$. Andererseits ist $C_{\mathfrak{R}_{73}}(\tau) \simeq 1$ und $C_{\mathfrak{R}_{127}}(\tau) \neq 1$, ein Widerspruch. Also ist $73, 127 \nmid |O(\mathcal{N})|$. Damit haben wir $O(\mathcal{N}) = 1$. Sei $O_2(\mathcal{N}) \neq 1$. Wegen $|\mathcal{N}|_2 = |\mathcal{N}_1|_2$ gilt $O_2(\mathcal{N}) \subseteq \mathcal{N}_1$. Weiter operieren $\langle\theta\rangle$ und $\langle\lambda\rangle$ fixpunktfrei auf $O_2(\mathcal{N}_1)$. Also ist $O_2(\mathcal{N}) = O_2(\mathcal{N}_1)$. Sei O_2 das Urbild von $O_2(\mathcal{N})$ in N. Dann ist $O_2 = Q \cdot V$ und $Z(O_2) = Z(Q) = Z$. Insbesondere ist $Z \trianglelefteq N$. Aus $N \nsubseteq M$ folgt ein Widerspruch. Also ist $O_2(\mathcal{N}) = 1$.

Sei $\mathcal{K}$ ein minimaler Normalteiler von $\mathcal{N}$. Sei $\mathcal{X} = \mathcal{K} \cap \mathcal{N}_1$ und $\mathcal{S}$ eine Sylow 2-Untergruppe von $\mathcal{X}$. Dann ist $\mathcal{S}$ eine Sylow 2-Untergruppe von $\mathcal{K}$. Nach dem Frattini-Argument gilt $\mathcal{N} = \mathcal{K} \cdot N_{\mathcal{N}}(\mathcal{S})$ und $\mathcal{N}_1 = = \mathcal{X} \cdot N_{\mathcal{N}_1}(\mathcal{S})$. Wegen $\mathcal{N}_1/O_2(\mathcal{N}_1) \simeq \Sigma_3 \times L_3(2)$ und $\mathcal{X} \trianglelefteq \mathcal{N}_1$ ist $1 \neq$

$\neq O_2(\mathcal{N}_1) \cap \mathfrak{X} \trianglelefteq \mathcal{N}_1$. Da ein Element der Ordnung 21 aus $\mathcal{N}_1$ fixpunktfrei auf $O_2(\mathcal{N}_1) \simeq E_{2^6}$ operiert, folgt $O_2(\mathcal{N}_1) \subseteq \mathfrak{X}$. Angenommen, es sei $\mathfrak{X} \neq \mathcal{N}_1$. Sei $\lambda_1 \in \mathfrak{X}$. Dann ist $\mathcal{N}_1/\mathfrak{X} \simeq Z_2$, $L_3(2)$ oder $Z_2 \times L_3(2)$. Sei $\mathcal{N}_1/\mathfrak{X} \simeq Z_2$. Dann ist $|\mathfrak{X}|_2 = 2^9$. Also ist $|\mathcal{N}/\mathcal{K}|_2 = 2$. Damit besitzt $\mathcal{N}/\mathcal{K}$ ein normales 2-Komplement. Insbesondere hat $\mathcal{N}$ eine Untergruppe vom Index 2, im Widerspruch zu Lemma 10(*b*). Sei nun $\mathcal{N}_1/\mathfrak{X} \simeq L_3(2)$ oder $Z_2 \times L_3(2)$. Dann ist $C_{\mathcal{K}}(\lambda_1) = \langle \lambda_1 \rangle$. Nach [3] gilt $\mathcal{K} \simeq A_5$ oder $L_2(7)$. Wegen $|\mathcal{K}|_2 \geqslant 2^6$ ist das ein Widerspruch. Also ist $\lambda_1 \notin \mathfrak{X}$. Es gilt $\mathcal{N}_1/\mathcal{K} \simeq \Sigma_3$ oder $\Sigma_3 \times L_3(2)$. Sei $\mathcal{N}_1/\mathfrak{X} \simeq \Sigma_3$. Dann ist $|\mathfrak{X}|_2 = 2^9$ und $|\mathcal{N}/\mathfrak{X}|_2 = 2$. Also hat $\mathcal{N}/\mathcal{K}$ ein normales 2-Komplement. Somit besitzt $\mathcal{N}$ eine Untergruppe vom Index 2, ein Widerspruch. Also ist $\mathcal{N}_1/\mathcal{K} \simeq \Sigma_3 \times L_3(2)$. Es folgt $\mathfrak{X} = O_2(\mathcal{N}_1)$ und $O_2(\mathcal{N}_1) \subseteq \subseteq \mathrm{Syl}_2(\mathcal{K})$. Wegen $N_{\mathcal{N}}(O_2(\mathcal{N}_1)) = \mathcal{N}_1$ gilt $\mathcal{N} = \mathcal{K} \cdot N_{\mathcal{N}}(O_2(\mathcal{N}_1)) = \mathcal{K} \cdot \mathcal{N}_1$. Also hat $\mathcal{N}$ eine Untergruppe vom Index 2, ein Widerspruch. Damit haben wir $\mathfrak{X} = \mathcal{N}_1 \subseteq \mathcal{K}$. Insbesondere enthält $\mathcal{K}$ eine Sylow 2-Untergruppe von $\mathcal{N}$. Da das Zentrum einer Sylow 2-Untergruppe von $\mathcal{N}$ von der Ordnung 2 ist, ist $\mathcal{K}$ einfach. Nach [1] ist $\mathcal{K} \simeq M_{24}$ oder $L_5(2)$. Sei $\mathcal{K} \simeq L_5(2)$. Dann ist $\langle \lambda, \lambda_1 \rangle \in \mathrm{Syl}_3(\mathcal{K})$. Wegen

$$N_{\mathcal{N}_1}(\langle \lambda, \lambda_1 \rangle)/\langle \lambda, \lambda_1 \rangle \simeq E_4 \qquad \text{und} \qquad N_{\mathcal{K}}(\langle \lambda, \lambda_1 \rangle)/\langle \lambda, \lambda_1 \rangle \simeq D_8$$

folgt $\lambda \underset{\mathcal{K}}{\simeq} \lambda_1$. Das ist jedoch ein Widerspruch zu $|C_V(\lambda)| = 2^3$ und $|C_V(\lambda_1)| = 2^5$. Also gilt $\mathcal{K} \simeq M_{24}$. Wegen Out $(M_{24}) = 1$ ist $\mathcal{K} = \mathcal{N}$. Also ist $\mathcal{N} = N_G(V)/V \simeq M_{24}$. q.e.d.

LEMMA 12. $G \simeq J_4$.

BEWEIS. Mit [6] folgt die Behauptung. q.e.d.

LITERATURVERZEICHNIS

[1] B. BEISIEGEL - V. STINGL, *Über einfache endliche Gruppen mit Sylow 2-Untergruppen der Ordnung höchstens* 2^{10} *I, II*, Comm. in Algebra, **5** (1977), pp. 113-170 und *Dissertation*, Universität Mainz.

[2] J. BIERBRAUER, *On a certain type of 2-local subgroups in finite simple groups*, (erscheint).

[3] W. FEIT - J. THOMPSON, *Finite groups which contain a self-centralizing subgroups of order* 3, Nagoya Math. J., **21** (1962), pp. 185-197.

[4] D. GORENSTEIN, *Finite Groups*, Harper and Row, New York, 1968.
[5] Z. JANKO, *A new finite simple group of order* 86.775.571.046.077.562.880 *which possesses* M_{24} *and the full covering of group* M_{22} *as subgroups*, J. Algebra, **42** (1976), pp. 564-596.
[6] A. REIFART, *Some simple groups related to* M_{24}, J. Algebra, **45** (1977), pp. 199-209.
[7] T. YOSHIDA, *Character-theoretic transfer*, J. Algebra, **52** (1978), pp. 1-38.

Manoscritto pervenuto in redazione il 23 febbraio 1979.