RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

MARIA EZIA SERPICO

Varietà di Fano di dimensione $n > 4$ e di indice $r > n - 1$

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 62 (1980), p. 295-308

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1980__62__295_0>

Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, Vol. 62 (1980)

Varietà di Fano di dimensione $n \geqslant 4$ e di indice $r \geqslant n-1$.

Maria Ezia Serpico (*)

Summary - Let V_n be a Fano variety on $\mathbf{C}$ of dimension $n > 3$ with anticanonical sheaf $\mathcal{A}$, and let r ($r \leqslant n + 1$) be the index of V_n, that is the maximal integer r such that $\mathcal{B}^r \simeq \mathcal{A}$ for some invertible sheaf $\mathcal{B}$ on V_n. Let d be the degree (univocally determinated) of $\mathcal{B}$. Fano varieties with $r = n + 1$, n, and those with $r = n - 1$ and $d = 3, 4$ are here completely characterized. Moreover it is proved that Fano varieties with $r = n - 1$ only exist if $d \leqslant 6$, whilst, in dimension 3, Fano varieties with $r = 2$ and $d = 7$ exist (cfr. [5]).

Introduzione.

Per studiare le varietà di Fano, ossia le varietà V definite sul campo complesso $\mathbf{C}$ con fascio anticanonico $\mathcal{A}$ ampio, è utile (cfr. [11], [1], [5]) suddividerle in classi in base ai valori dell'indice. È questo il massimo intero r tale che risulti $\mathcal{B}^r \simeq \mathcal{A}$, per qualche fascio invertibile $\mathcal{B}$ su V. Si dimostra che, in ogni caso, è $r \leqslant \dim V + 1$ e che, per ogni coppia (n, r) di interi tali che $1 \leqslant r \leqslant n+1$, esistono varietà di Fano di dimensione n ed indice r.

Ciascuna classe di varietà di Fano, individuata da determinati valori di n ed r, può essere ulteriormente suddivisa in base ai valori del grado d del fascio $\mathcal{B}$ (che è univocamente determinato a meno di isomorfismi). È naturale chiedersi a quali valori di d corrispondono varietà effettivamente esistenti e di che tipo siano queste varietà.

Iskovskih si è occupato a lungo di questi problemi relativamente

(*) Indirizzo dell'A.: Istituto di Matematica, Via L. B. Alberti, 4, 16132 Genova.

al caso $n = 3$ e, ritrovando e completando i risultati classici di Fano e di Roth, ha descritto la maggior parte delle varietà di Fano tridimensionali.

In questa nota mi occuperò di varietà V_n di Fano di dimensione $n \geqslant 4$, restando nell'ordine di idee di Iskovskih.

Anzitutto esaminerò l'applicazione razionale $\phi_{\mathcal{B}}$ associata al fascio $\mathcal{B}$ e proverò che essa è sempre biregolare per $r = n$, $r = n + 1$ e per $r = n - 1$ e $d \geqslant 3$. Si osservi che Iskovskih è stato il primo ad interessarsi della biregolarità di $\phi_{\mathcal{B}}$ e ciò soltanto per $n = 3$.

Successivamente mi occuperò dell'esistenza delle V_n di Fano con i precedenti valori di r e d. Intanto è facile riconoscere che le V_n di Fano con $r = n + 1$ sono tutte e sole quelle isomorfe a $\mathbb{P}_n$ (e hanno $d = 1$) e che le V_n di Fano con $r = n$ sono tutte e sole le varietà isomorfe ad ipersuperficie quadriche non singolari di un $\mathbb{P}_{n+1}$ (e hanno $d = 2$).

I risultati principali ottenuti relativamente al caso $r = n - 1$ sono i Teoremi 2 e 3 del n. 3. Il primo dà una caratterizzazione delle varietà di Fano di indice $r = n - 1$ e $d \geqslant 3$. Il secondo prova che non esistono tali varietà per $n \geqslant 4$ e $d \geqslant 7$. Si noti che se invece la dimensione è $n = 3$ esistono varietà di Fano di indice 2 e $d = 7$ (cfr. [5]).

Esistono poi V_n di Fano di indice $n - 1$ per ogni d tale che $3 \leqslant d \leqslant 6$. Quelle con $d = 3$ e con $d = 4$ hanno come modello biregolare rispettivamente un'ipersuperficie cubica non singolare di $\mathbb{P}_{n+1}$ ed una varietà intersezione di due quadriche di $\mathbb{P}_{n+2}$. La grassmanniana $G(1, 4) \subset \mathbb{P}_9$ delle rette di $\mathbb{P}_4$ e le sue intersezioni con sottospazi di codimensione 1, 2, 3 sono altrettanti esempi di varietà di Fano con $r = n - 1$, $d = 5$ e di dimensione 6, 5, 4, 3. Il prodotto alla Segre $\mathbb{P}_2 \times \mathbb{P}_2$ è un esempio di varietà di Fano di dimensione 4 con $r = 3$ e $d = 6$.

In tutto il lavoro farò l'ipotesi che esista una catena

$$B^1 \supset B^2 \supset \ldots \supset B^{n-3}$$

di varietà i-caratteristiche del sistema $|B|$ associato a $\mathcal{B}$ (per varietà i-caratteristica di un sistema lineare $|B|$ intendo una varietà caratteristica di $|B|$ di dimensione $n - i$) tale che, per ogni $1 \leqslant i \leqslant n - 3$, B^i sia non singolare. Non so se tale ipotesi, che è essenziale per la dimostrazione della Proposizione 1, sia conseguenza delle altre ipotesi fatte su V. Si noti che per $n = 3$ il sistema $|B|$ contiene sempre divisori non singolari, come è stato recentemente dimostrato da V. V. Šokurov.

1. Sia V una varietà algebrica, proiettiva, irriducibile, non singolare, di dimensione $n \geqslant 3$, definita sul campo complesso, e sia K_V un suo divisore canonico. Supporremo che V sia di Fano, ossia che il fascio anticanonico $\mathcal{O}_V(-K_V)$ sia ampio. Se $s \geqslant 1$ e $\mathcal{O}_V(L)$ sono rispettivamente un intero positivo qualunque e un fascio invertibile su V tale che risulti $\mathcal{O}_V(-K_V) \simeq \mathcal{O}_V(sL)$, è immediato riconoscere che:

$$\dim H^i(V, \mathcal{O}_V(jL)) = 0 \qquad \text{se } i < n \text{ e } j < 0\,, \tag{1}$$

$$\dim H^i(V, \mathcal{O}_V(jL)) = 0 \qquad \text{se } i > 0 \text{ e } j \geqslant 1 - s\,. \tag{2}$$

Per provare la (1) basta applicare il Kodaira Vanishing Theorem, per la (2) occorre anche il teorema di dualità di Serre.

In particolare per $j = 0$ la (2) diventa:

$$\dim H^i(V, \mathcal{O}_V) = 0 \qquad \forall i > 0\,, \tag{3}$$

pertanto il gruppo Pic V coincide con $NS(V)$, e quindi è finitamente generato.

Diremo indice di V il massimo intero $r \geqslant 1$ [1] per cui esista un fascio invertibile $\mathcal{B}$ su V tale che $\mathcal{O}_V(-K_V) = \mathcal{B}^r$.

Posto $B^0 = V$ supporremo che esista una catena

$$B^0 \supset B^1 \supset \ldots \supset B^{n-3}$$

di varietà i-caratteristiche del sistema $|B|$ associato a $\mathcal{B}$ (per $i = 1$ B^1 è la varietà definita dalle equazioni locali di un divisore di $|B|$) tale che, per ogni $1 \leqslant i \leqslant n-3$, B^i sia non singolare. Indicheremo infine con d il grado (B^n) del sistema $|B|$.

In questo paragrafo e nel successivo dimostreremo alcune proposizioni di carattere generale sulle varietà B^i e sui fasci $\mathcal{O}_{B^i}(B^{i+1})$, facili estensioni di proposizioni provate in [5] per $n = 3$ e che ci saranno utili nel seguito.

Proposizione 1. *Nelle nostre ipotesi per ogni* $1 \leqslant i \leqslant n-3$

(I) *B^i è una varietà irriducibile (di dimensione $n - i$) e $\mathcal{O}_{B^i}(B^{i+1})$ è fascio ampio*

(1) Se G è un gruppo finitamente generato e se $g \in G$ è un elemento di G, l'insieme $R = \{r \in \mathbb{Z},\ r \geqslant 1 : \exists z \in G : rz = g\}$ è finito.

(II) risulta $\mathcal{O}_{B^i}(-K_{B^i}) \simeq \mathcal{O}_{B^i}((r-i)B^{i+1})$ e, se $i<r$, B^i è una varietà di Fano.

DIMOSTRAZIONE. La (I) si dimostra per induzione su i. Per $i=1$, posto $B^1 = B$ si ha la sequenza esatta di coomologia

$$\ldots \to H^0(V, \mathcal{O}_V(-B)) \to H^0(V, \mathcal{O}_V) \to H^0(B, \mathcal{O}_B) \to H^1(V, \mathcal{O}_V(-B)) \to \ldots,$$

nella quale risulta

$$H^0(V, \mathcal{O}_V(-B)) = H^1(V, \mathcal{O}_V(-B)) = 0\ ;$$

è poi $H^0(V, \mathcal{O}_V) = 1$ perchè V è per ipotesi irriducibile, dunque $H^0(B, \mathcal{O}_B) = 1$ ed anche B è irriducibile; il fascio $\mathcal{O}_B(B^2)$ è ampio perchè restrizione di fascio ampio ad una sottovarietà irriducibile. Supponendo ora che la tesi sia vera per $i = n-4$ si ha che

$$H^0(B^{n-4}, \mathcal{O}_{B^{n-4}}(-B^{n-3})) = H^1(B^{n-4}, \mathcal{O}_{B^{n-4}}(-B^{n-3})) = 0$$

e la (I) segue dalla sequenza esatta

$$\ldots \to H^0(B^{n-4}, \mathcal{O}_{B^{n-4}}(-B^{n-3})) \to H^0(B^{n-4}, \mathcal{O}_{B^{n-4}}) \to$$
$$\to H^0(B^{n-3}, \mathcal{O}_{B^{n-3}}) \to H^1(B^{n-4}, \mathcal{O}_{B^{n-4}}(-B^{n-3})) \to \ldots$$

e dal fatto che $\mathcal{O}_{B^{n-3}}(B^{n-2})$ è restrizione di fascio ampio (a sottovarietà irriducibile).

Quanto alla (II) basta osservare che con successive applicazioni del teorema di aggiunzione si ottiene $\mathcal{O}_{B^i}(K_{B^i}) \simeq \mathcal{O}_{B^i}((i-r)B^{i+1})$.

Per la (II) della proposizione precedente e per il Teorema 1.2 di [13] se $r \geqslant n-2$ il sistema lineare $|B^{n-2}|$ contiene una superficie non singolare B^{n-2}. Come sopra si vede che B^{n-2} è irriducibile e poichè risulta $\mathcal{O}_{B^{n-2}}(-K_{B^{n-2}}) \simeq \mathcal{O}_{B^{n-2}}([r-(n-2)]B^{n-1})$ si può concludere che

COROLLARIO 1. Se $r > n-2$, B^{n-2} è una superficie di Del Pezzo, se $r = n-2$ B^{n-2} è una superficie $K3$.

COROLLARIO 2. Se $r \geqslant n-2$ i gruppi Pic B^i sono privi di torsione per ogni $0 \leqslant i \leqslant n-2$.

La dimostrazione segue, del tutto analogamente che per $n=3$ ([5], 1.15), dal fatto che $H^2(S, \mathbb{Z})$ è libero da torsione per ogni superficie S di Del Pezzo o $K3$, dalle immersioni $H^2(B^i, \mathbb{Z}) \to H^2(B^{i+1}, \mathbb{Z})$ e dalla regolarità delle B^i (cfr. (II) Proposizione 1).

Osservazione 1. Poichè $\operatorname{Pic} V$ è libero da torsione, è univocamente determinato (a meno di isomorfismi) il fascio $\mathcal{B}$ tale che $\mathcal{O}_V(-K_V) \simeq \mathcal{B}^r$.

Proposizione 2. Sia $r \geqslant n-2$ risulta:

$$\dim H^0(V, \mathcal{O}_V(B)) = \frac{\{2+[r-(n-3)]\}\{1+[r-(n-3)]\}}{12}(B^n) + \\ + \frac{2}{[r-(n-3)]} + n - 2 .$$

Dimostrazione. Per come sono state scelte le B^i e per il fatto che queste varietà sono tutte regolari risulta (cfr. [1]):

$$(4) \qquad \dim H^0(V, \mathcal{O}_V(B)) = \dim H^0(B^{n-3}, \mathcal{O}_{B^{n-3}}(B^{n-2})) + n - 3 .$$

Applicando il teorema di Riemann Roch a B^{n-3} si ottiene che

$$(5) \qquad \dim H^0(B^{n-3}, \mathcal{O}_{B^{n-3}}(B^{n-2})) = \\ = \frac{\{2+[r-(n-3)]\}\{1+[r-(n-3)]\}}{12}(B^n) + \frac{2}{[r-(n-3)]} + 1 .$$

Sostituendo la (5) in (4) si ha la tesi.

2. Studieremo ora l'applicazione razionale $\phi_{|B|}$ associata al sistema $|B|$.

È noto (cfr. [1], [5]) che l'indice r di V non può superare $n+1$ e che risulta:

$$d = 1 \qquad \text{se } r = n+1 ,$$
$$d = 2 \qquad \text{se } r = n .$$

Inoltre se $r = n-1$ le superficie B^{n-2} sono di Del Pezzo con $\mathcal{O}_{B^{n-2}}(K_{B^{n-2}}) \simeq \mathcal{O}_{B^{n-2}}(-B^{n-1})$ e quindi deve essere $1 \leqslant d \leqslant 9$.

È anche noto che se il sistema $|B|$ non ha punti base e se $r \geqslant n-2$, il grado $\deg \phi_{|B|}$ del morfismo è sempre 1 o 2; ed è certamente 1 non appena risulti $r \geqslant n$ oppure $r = n - 1$ e $d \geqslant 3$.

D'ora in poi considereremo varietà V di indice $r \geqslant n - 1$.

Proposizione 3. Se $r = n + 1$ o $r = n$ i sistemi $|B^{i+1}|_{B^i}$ (per ogni $0 \leqslant i \leqslant n-2$) non hanno punti base; se $r = n - 1$ i sistemi $|B^{i+1}|_{B_i}$ $(0 \leqslant i \leqslant n-2)$ hanno punti base solo quando $d = 1$ ed in questo caso ne hanno uno solo.

Dimostrazione. La tesi si dimostra per induzione sulla dimensione delle varietà caratteristiche di $|B|$, in modo del tutto analogo a quanto fatto da Iskovskih per $n = 3$. Occorre osservare che per $i = n - 2$, B^{n-2} è una superficie di Del Pezzo, con

$$|-K_{B^{n-2}}| = |[r-(n-2)]B^{n-1}|_{B^{n-2}}$$

e ricordare (cfr. [8], cap. IV, § 24) proprietà ben note del divisore canonico di una tale superficie. Basta poi sfruttare gli omomorfismi

$$(6) \qquad H^0(B^{i-1}, \mathcal{O}_{B^{i-1}}(B^i)) \to H^0(B^i, \mathcal{O}_{B^i}(B^{i+1})) \to 0 \qquad 1 \leqslant i \leqslant n-2$$

surgettivi perchè le varietà B^{i-1} sono tutte regolari.

Corollario 3. Se $r \geqslant n-1$, escluso il caso $r = n-1$ e $d = 1$, il sistema $|B^{n-1}|_{B^{n-2}}$ contiene una curva liscia e irriducibile.

Dimostrazione. Basta applicare i due teoremi di Bertini, tenendo presente che, per ipotesi, $|B^{n-1}|_{B^{n-2}}$ non ha punti base e risulta $\dim |B^{n-1}|_{B^{n-2}} \geqslant 2$ (2).

Proposizione 4. Se è $r \geqslant n$ oppure $r = n-1$ e $d \geqslant 3$ (3), $|B|$ è molto ampio e $\phi_{|B|}(V)$ è proiettivamente normale.

(2) B^{n-3} è una varietà di Fano di dimensione 3 con

$$\mathcal{O}_{B^{n-3}}(-K_{B^{n-3}}) \simeq \mathcal{O}_{B^{n-3}}([r-(n-3)]B^{n-2}),$$

risulta allora $H^1(B^{n-3}, \mathcal{O}_{B^{n-3}}) = 0$ e si ha la sequenza esatta

$$0 \to H^0(B^{n-3}, \mathcal{O}_{B^{n-3}}) \to H^0(B^{n-3}, \mathcal{O}_{B^{n-3}}(B^{n-2})) \to H^0(B^{n-2}, \mathcal{O}_{B^{n-2}}(B^{n-1})) \to 0$$

dalla quale si ricava:

$$\dim |B^{n-1}|_{B^{n-2}} = \frac{\{2+[r-(n-3)]\}\{1+[r-(n-3)]\}}{12}(B^n) + \frac{2}{[r-(n-3)]} - 1\,;$$

nelle ipotesi fatte segue appunto che $\dim |B^{n-1}|_{B^{n-2}} \geqslant 2$.

(3) Nel qual caso $\deg \phi_{|B|}$ è certamente 1 e $|B|$ non ha punti base.

DIMOSTRAZIONE. Chiaramente basta dimostrare che l'omomorfismo naturale di algebre graduate

$$S^* H^0(V, \mathcal{O}_V(B)) \to \bigoplus_{m \geqslant 1} H^0(V, \mathcal{O}_V(mB)) \tag{7}$$

è surgettivo. La dimostrazione può farsi ancora ricalcando quella di Iskovskih relativa al caso $n = 3$ (cfr. [5], 4.4). Sia $B^0 \supset B^1 \supset \ldots \supset B^{n-1}$ una catena di varietà caratteristiche di $|B|$ tutte irriducibili e non singolari (tale catena esiste in conseguenza delle ipotesi fatte al n. 1, del Corollario 1 e del Corollario 3).

Poichè valgono gli omomorfismi (6), è sufficiente, per quanto provato da Iskovskih in [5], 2.9, dimostrare che l'anello graduato $\bigoplus_{m \geqslant 1} H^0(B^{n-1}, \mathcal{O}_{B^{n-1}}(mB^n))$ è generato da $H^0(B^{n-1}, \mathcal{O}_{B^{n-1}}(B^n))$ e quindi (cfr. [9], § 2) che $(B^n) \geqslant 2g + 1$, essendo g il genere di B^{n-1}. Con il teorema di aggiunzione si ottiene $g = \dim H^0\big(B^{n-1}, \mathcal{O}_{B^{n-1}}(-[r-(n-1)]B^n)\big)$ e quindi risulta $g = 0$ per $r = n + 1$ e $r = n$, e $g = 1$ per $r = n - 1$. Sappiamo d'altra parte che per $r = n + 1$ ed $r = n$ si ha rispettivamente $(B^n) = 1$ e $(B^n) = 2$, quindi risulta senz'altro $(B^n) \geqslant 2g + 1$.

Questa diseguaglianza è anche verificata per $r = n - 1$ nell'ipotesi da noi fatta: $(B^n) \geqslant 3$.

3. Dalle Proposizioni 2 e 4 e da quanto ricordato all'inizio del n. 2, segue subito il teorema (già provato in [5] per $n = 3$):

TEOREMA 1. *Qualunque sia $n \geqslant 3$*

(I) *per $r = n + 1$ $\phi_{|B|}: V \to \mathbf{P}_n$ è isomorfismo,*

(II) *per $r = n$ $\phi_{|B|}: V \to V^2 \subset \mathbf{P}_{n+1}$ è un isomorfismo di V su una quadrica non singolare,*

(III) *per $r = n - 1$ e $d \geqslant 3$ $\phi_{|B|}: V \to V_n^d \subset \mathbf{P}_{d+n-2}$ è un isomorfismo di V su una varietà V_n^d di ordine d non singolare (regolare) e proiettivamente normale.*

OSSERVAZIONE 2. In modo del tutto identico a quanto fatto in [5], 4.2 (iii), si studia il nucleo dell'omomorfismo (7) e (ricordando i valori, calcolati sopra, di g e di (B^n), per $r \geqslant n$ e per $r = n - 1$ e $d \geqslant 3$) si dimostra che ciascuna varietà $V_n^d = \phi_{|B|}(V)$ è, per $d \geqslant 4$, intersezione delle quadriche che la contengono.

Proviamo ora che:

TEOREMA 2. Ogni V_n^d, immersa in $\mathbf{P}_{d+n-2}$, non singolare linearmente normale, regolare, di grado d, con $3 \leqslant d \leqslant 9$ è tale che $\mathcal{O}_{V_n^d}(-K_{V_n^d}) \simeq \mathcal{O}_{V_n^d}(n-1)$ ed è (per $n \geqslant 3$) una varietà di Fano di indice $n-1$ ad eccezione che per $n=3$ e $d=8$ nel qual caso V_3^8 è una varietà di Fano di indice 4.

DIMOSTRAZIONE. Proviamo prima di tutto che $\mathcal{O}_{V_n^d}(-K_{V_n^d}) \simeq$ $\simeq \mathcal{O}_{V_n^d}(n-1)$. Se $n=2$, per le ipotesi, V_2^d è una superficie di Del Pezzo (cfr. [10] e [8]) e inoltre $\mathcal{O}_{V_2^d}(-K_{V_2^d}) \simeq \mathcal{O}_{V_2^d}(1)$ (cfr. [3]). Sia ora $n>2$. La generica sezione iperpiana $\bar{B}$ di V_n^d è una V_{n-1}^d immersa in $\mathbf{P}_{d+n-3}$ non singolare e regolare. Inoltre è facile riconoscere che $\bar{B}$ è linearmente normale, sfruttando la sequenza esatta di coomologia associata alla sequenza esatta $0 \to \mathcal{O}_{V_n^d} \to \mathcal{O}_{V_n^d}(1) \to \mathcal{O}_{\bar{B}}(1) \to 0$, tenendo presente che $H^1(V_n^d, \mathcal{O}_{V_n^d}) = 0$ e che V_n^d è linearmente normale.

Per l'ipotesi induttiva si ha allora $\mathcal{O}_{\bar{B}}(-K_{\bar{B}}) \simeq \mathcal{O}_{\bar{B}}(n-2)$ e quindi il teorema di aggiunzione fornisce l'isomorfismo:

$$\mathcal{O}_{V_n^d}(K_{V_n^d}) \underset{\mathcal{O}_{V_n^d}}{\otimes} \mathcal{O}_{\bar{B}}(1) \simeq \mathcal{O}_{\bar{B}}(-(n-2)) \,. \tag{8}$$

Tensorizzando ambo i membri della (8) per $\mathcal{O}_{\bar{B}}(-1)$ si ottiene poi

$$\mathcal{O}_{V_n^d}(K_{V_n^d}) \underset{\mathcal{O}_{V_n^d}}{\otimes} \mathcal{O}_{\bar{B}} \simeq \mathcal{O}_{\bar{B}}(-(n-1)) \,.$$

Per l'immersione $\operatorname{Pic} V_n^d \to \operatorname{Pic} \bar{B}$ ([4]) si ha senz'altro che $\mathcal{O}_{V_n^d}(-K_{V_n^d}) \simeq$ $\simeq \mathcal{O}_{V_n^d}(n-1)$. Allora V_n^d è una varietà di Fano di indice $r \geqslant n-1$. Si vede subito che non può essere $r=n$. Infatti in tal caso dovrebbe essere $\mathcal{O}_{V_n^d}(-K_{V_n^d}) \simeq \mathcal{O}_{V_n^d}(n\tilde{B})$, con $\mathcal{O}_{V_n^d}(\tilde{B})$ fascio invertibile su V_n^d e $(\tilde{B}^n) = 2$ (cfr. Teorema 1) e quindi dovrebbe valere l'eguaglianza $2n^n = (n-1)^n d$ che non è verificata da alcun valore di n e d. Per $r = n+1$ deve risultare $\mathcal{O}_{V_n^d}(-K_{V_n^d}) \simeq \mathcal{O}_{V_n^d}((n+1)\tilde{B})$, con $\mathcal{O}_{V_n^d}(\tilde{B})$ fascio invertibile su V_n^d e $(\tilde{B}^n) = 1$ (cfr. Teorema 1) e quindi $(n+1)^n =$

([4]) Se X è una varietà proiettiva non singolare definita sul campo complesso $\mathbf{C}$, e se Y è una sottovarietà non singolare di dimensione $n \geqslant 3$ completa intersezione in X, si prova (cfr. [4], Corollario 3.3) che si ha $\operatorname{Pic} X \simeq$ $\simeq \operatorname{Pic} Y$. In maniera analoga si dimostra poi, che se $\dim Y = 2$, si ha una immersione $\operatorname{Pic} X \to \operatorname{Pic} Y$.

$= (n-1)^n d$; questa eguaglianza nelle nostre ipotesi è soddisfatta solo da $n = 3$ e $d = 8$, e V_3^8 è di Fano di indice 4 perchè non esistono V_3 di Fano con $d = 8$ e $r = 2$ (cfr. [5], 4.6). In tutti gli altri casi, dunque V_n^d ha indice $n-1$.

Osservazione 3. Si vede che è possibile scegliere una catena $V_n^d = \bar{B}^0 \supset \bar{B}^1 \supset \ldots \supset \bar{B}^i \supset \ldots \supset \bar{B}^{n-1}$ di sezioni lineari $\bar{B}^i$ di V_n^d, di dimensione $n-i$ (immerse in un $\mathbf{P}_{d+(n-i)-2}$), tutte irriducibili, non singolari e (tranne l'ultima) regolari. Basta infatti ricordare l'isomorfismo $V_n^d \simeq V$, l'esistenza della catena $B^0 \supset B^1 \supset \ldots \supset B^{n-3}$, la Proposizione 1 e il Corollario 3. È anche facile riconoscere che le $\bar{B}^i$ sono tutte linearmente normali (sfruttando gli omomorfismi surgettivi $H^0(\bar{B}^{i-1}, \mathcal{O}_{\bar{B}^{i-1}}(1)) \to H^0(\bar{B}^i, \mathcal{O}_{\bar{B}^i}(1)) \to 0$).

4. In conseguenza dei Teoremi 1 e 2, per stabilire l'esistenza o meno di varietà di Fano di indice $r = n-1$ e con un fissato valore di d, maggiore di 3, è sufficiente stabilire quella dei loro modelli biregolari $V_n^d \subset \mathbf{P}_{d+n-2}$. Proveremo che:

Teorema 3. *Se $n \geqslant 4$, non esistono V_n^d proiettivamente anticanoniche con $d \geqslant 7$ e $r = n-1$.*

Dimostrazione. Si è già detto che non può essere $d > 9$. Consideriamo allora il

Caso $d = 9$. Se V_n^9 esistesse risulterebbe come sappiamo $\mathcal{O}_{V_n^9}(-K_{V_n^9}) \simeq \mathcal{O}_{V_n^9}(n-1)$; costruita una catena $\bar{B}^0 \supset \bar{B}^1 \supset \ldots \supset \bar{B}^{n-2}$ come in Osservazione 3 si avrebbe $\mathcal{O}_{\bar{B}^{n-3}}(-K_{\bar{B}^{n-3}}) \simeq \mathcal{O}_{\bar{B}^{n-3}}(2)$ e la varietà $\bar{B}^{n-3}$ sarebbe allora una V_3 di Fano con $d = 9$ e $r = 2$ (cfr. Teorema 2), ma non esistono varietà di questo tipo (cfr. [5], 4.2).

Caso $d = 8$. Se V_n^8 esistesse risulterebbe, ancora con gli stessi simboli dell'Osservazione 3, $\mathcal{O}_{\bar{B}^{n-3}}(-K_{\bar{B}^{n-3}}) \simeq \mathcal{O}_{\bar{B}^{n-3}}(2)$ e $\bar{B}^{n-3}$ sarebbe una V_3 di Fano con $d = 8$ e $r = 4$ (cfr. Teorema 2).

Su $\bar{B}^{n-3}$ esisterebbe allora un fascio invertibile $\mathcal{O}_{\bar{B}^{n-3}}(\tilde{b})$ tale che $\mathcal{O}_{\bar{B}^{n-3}}(2) \simeq \mathcal{O}_{\bar{B}^{n-3}}(-K_{\bar{B}^{n-3}}) \simeq \mathcal{O}_{\bar{B}^{n-3}}(4\tilde{b})$ e quindi (essendo $\operatorname{Pic} \bar{B}^{n-3}$ privo di torsione) $\mathcal{O}_{\bar{B}^{n-3}}(1) \simeq \mathcal{O}_{\bar{B}^{n-3}}(2\tilde{b})$. Gli isomorfismi naturali $\operatorname{Pic} \bar{B}^{i-1} \to \operatorname{Pic} \bar{B}^i$ $(1 \leqslant i \leqslant n-3)$ condurebbero allora ad individuare un fascio invertibile $\mathcal{O}_{V_n^8}(\tilde{B})$ tale che

$$\mathcal{O}_{V_n^8}(\tilde{B}) \underset{\mathcal{O}_{V_n^8}}{\otimes} \mathcal{O}_{\bar{B}^{n-3}} \simeq \mathcal{O}_{\bar{B}^{n-3}}(\tilde{b}) \qquad \text{e} \qquad \mathcal{O}_{V_n^8}(-K_{V_n^8}) \simeq \mathcal{O}_{V_n^8}(2(n-1)\tilde{B}),$$

e l'indice della nostra V_n^8 sarebbe $2(n-1)$ e non $(n-1)$.

Caso $d = 7$. Proveremo dapprima la proposizione per varietà di dimensione quattro. Supporremo per assurdo che esista una $V_4^7 \subset \mathbb{P}_9$ di Fano di indice 3, e dimostreremo che essa sarebbe la proiezione da un punto di una $V_4^8 \subset \mathbb{P}_{10}$ (di Fano) di indice 3, che sappiamo non esistere. Per l'Osservazione 3 si possono scegliere due sezioni iperpiane di V_4^7, $\bar{B}_1$ e $\bar{B}_2$ (almeno una delle quali non singolare), la cui intersezione è una superficie non singolare $S^7 \subset \mathbb{P}_7$ di Del Pezzo. Come è noto S^7 contiene tre rette Z_0, Z_1, Z_2 una delle quali, sia Z_0, si distingue dalle altre perchè le incontra entrambe. Per uno dei teoremi di Bertini il generico elemento $\bar{B}_\lambda$ del fascio $\mathcal{F}$ di sezioni iperpiane di V_4^7 definito da $\bar{B}_1$ e $\bar{B}_2$ è non singolare; poichè è anche linearmente normale esso è senz'altro una V_3^7 di Fano, con $r = 2$, avente S^7 come sezione iperpiana. Ogni varietà di questo tipo (cfr. [5], 6.1) contiene un unico piano P_λ contraibile a un punto non singolare (ossia tale che $N_{P_\lambda}^{\bar{B}_\lambda} \simeq \mathcal{O}_{\bar{B}_\lambda}(P_\lambda) \underset{\mathcal{O}_{\bar{B}_\lambda}}{\otimes} \mathcal{O}_{P_\lambda} \simeq \mathcal{O}_{P_\lambda}(-1)$), il quale incontra S^7 soltanto in Z_0. Se L è la chiusura del luogo degli infiniti piani P_λ relativi alle $\bar{B}_\lambda$ non singolari del fascio $\mathcal{F}$ e H è un qualunque iperpiano, $L \cap H$ contiene tutte le rette $P_\lambda \cap H$, ciascuna delle quali appartiene alla varietà $V_3^7 = V_4^7 \cap H$ e passa per il punto $Z_0 \cap H$. Tenendo presente la struttura della famiglia delle rette di V_3^7 (5) si conclude che $L \cap H$ è un piano e quindi $L = \mathbb{P}_3$.

OSSERVAZIONE 4. L è regolarmente contraibile a un punto non singolare.

DIMOSTRAZIONE. È sufficiente provare che $\mathcal{O}_L(L^2) \simeq \mathcal{O}_L(-1)$ (cfr. [7], Teorema 5, § 2).

Si considerino le sequenze esatte di Fasci normali

$$0 \to N_{P_\lambda}^{\bar{B}_\lambda} \to N_{P_\lambda}^{V_4^7} \to N_{\bar{B}_\lambda}^{V_4^7}|_{P_\lambda} \to 0 \qquad \text{e} \qquad 0 \to N_{P_\lambda}^{L} \to N_{P_\lambda}^{V_4^7} \to N_{L}^{V_4^7}|_{P_\lambda} \to 0 .$$

Risulta $N_{\bar{B}_\lambda}^{V_4^7} \simeq \mathcal{O}_{\bar{B}_\lambda}(1)$ e, come si è detto $N_{P_\lambda}^{\bar{B}_\lambda} \simeq \mathcal{O}_{P_\lambda}(-1)$. Inoltre valgono gli isomorfismi $N_{P_\lambda}^{L} \simeq \mathcal{O}_L(P_\lambda) \underset{\mathcal{O}_L}{\otimes} \mathcal{O}_{P_\lambda} \simeq \mathcal{O}_{P_\lambda}(1)$ e $N_L^{V_4^7} \simeq \mathcal{O}_L(L^2)$. Le

(5) V_3^7 è lo scoppiamento di $\mathbb{P}_3$ in un punto (cfr. [5], 6.1) e pertanto contiene una ed una sola retta per ogni punto non situato sul piano eccezionale.

due sequenze esatte si possono allora riscrivere

$$0 \to \mathcal{O}_{P_\lambda}(-1) \to N_{P_\lambda}^{V_4^7} \to \mathcal{O}_{P_\lambda}(1) \to 0 \,, \tag{9}$$

$$0 \to \mathcal{O}_{P_\lambda}(1) \to N_{P_\lambda}^{V_4^7} \to \mathcal{O}_L(L^2) \underset{\mathcal{O}_L}{\otimes} \mathcal{O}_{P_\lambda} \to 0 \,. \tag{10}$$

Dalla (9) tenendo presente che il polinomio di Chern di $N_{P_\lambda}^{V_4^7}$ è il prodotto dei polinomi di Chern di $\mathcal{O}_{P_\lambda}(-1)$ e $\mathcal{O}_{P_\lambda}(1)$ si ricava che la prima classe di Chern $c_1(N_{P_\lambda}^{V_4^7})$ di $N_{P_\lambda}^{V_4^7}$ è nulla. Tenendo conto di questo dalla (10) si ricava in maniera analoga che la prima classe di Chern del fascio $\mathcal{O}_L(L^2) \underset{\mathcal{O}_L}{\otimes} \mathcal{O}_{P_\lambda}$ è la classe di equivalenza dei divisori corrispondenti a $\mathcal{O}_{P_\lambda}(-1)$ e quindi $\mathcal{O}_L(L^2) \underset{\mathcal{O}_L}{\otimes} \mathcal{O}_{P_\lambda} \simeq \mathcal{O}_{P_\lambda}(-1)$; ne segue subito che $\mathcal{O}_L(L^2) \simeq \mathcal{O}_L(-1)$.

LEMMA 1. *Fissato λ il sistema $|\bar{B}_\lambda + L|$ definisce un morfismo che contrae regolarmente L, cioè un morfismo birazionale da V_4^7 in una $V_4^8 \subset \mathbf{P}_{10}$ che trasforma L in un punto non singolare p_0 ed è isomorfismo tra $V_4^7 - L$ e $V_4^8 - p_0$.*

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo la sequenza esatta di fasci

$$0 \to \mathcal{O}_{V_4^7}(\bar{B}_\lambda) \to \mathcal{O}_{V_4^7}(\bar{B}_\lambda + L) \to \mathcal{O}_L(\bar{B}_\lambda + L) \to 0 \,,$$

che per l'Osservazione 4 può riscriversi:

$$0 \to \mathcal{O}_{V_4^7}(\bar{B}_\lambda) \to \mathcal{O}_{V_4^7}(\bar{B}_\lambda + L) \to \mathcal{O}_L \to 0 \,. \tag{11}$$

Per la dualità di Serre ed il Kodaira Vanishing Theorem si ha

$$H^1(V_4^7, \mathcal{O}_{V_4^7}(\bar{B}_\lambda)) \simeq H^3\big(V_4^7, \mathcal{O}_{V_4^7}(-4)\big) = 0 \,,$$

quindi la sequenza di coomologia associata alla (11) contiene il segmento

$$0 \to H^0(V_4^7, \mathcal{O}_{V_4^7}(\bar{B}_\lambda)) \to H^0(V_4^7, \mathcal{O}_{V_4^7}(\bar{B}_\lambda + L)) \xrightarrow{r} H^0(L, \mathcal{O}_L) \to 0 \tag{12}$$

e di qui segue che $\dim |\bar{B}_\lambda + L| = \dim |\bar{B}_\lambda| + 1 = 10$.

Lo spazio L offre quindi una sola condizione ai divisori di $|\bar{B}_\lambda + L|$ che devono contenerlo e dunque il sistema $|\bar{B}_\lambda + L|$ contrae L a un punto p_0 e non ha punti base. Inoltre dal fatto che $|\bar{B}_\lambda|$ separa i punti e i punti infinitamente vicini segue che nell'aperto $V_4^7 - L$ anche $|\bar{B}_\lambda + L|$ ha le stesse proprietà. Il sistema $|\bar{B}_\lambda + L|$ definisce quindi un morfismo birazionale, biregolare su $V_4^7 - L$, di V_4^7 su una varietà V' di dimensione quattro contenuta in $\mathbf{P}_{10}$.

Tenendo conto che $L \simeq \mathbf{P}_3$ e che $\mathcal{O}_L(L^2) \simeq \mathcal{O}_L(-1)$ si trova che:

$$(\bar{B}_\lambda^3 L)_{V_4^7} = 1\,, \quad (\bar{B}_\lambda^2 L^2)_{V_4^7} = -1\,, \quad (\bar{B}_\lambda L^3)_{V_4^7} = 1 \quad \text{e} \quad (L^4)_{V_4^7} = -1\,.$$

Si ha perciò:

$$\begin{aligned}(\bar{B}_\lambda + L)^4_{V_4^7} = (\bar{B}_\lambda^4)_{V_4^7} + 4(\bar{B}_\lambda^3 L)_{V_4^7} + 6(\bar{B}_\lambda^2 L^2)_{V_4^7} + 4(\bar{B}_\lambda L^3)_{V_4^7} + (L^4)_{V_4^7} = \\ = 7 + 4 - 6 + 4 - 1 = 8\,.\end{aligned}$$

La varietà V' ha allora ordine 8 ed è non singolare in $V' - p_0$. Modificando lievemente un ragionamento di Kodaira (cfr. [6], Appendice) possiamo ora provare che anche p_0 è non singolare. Sia $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_{10}\}$ una base di $H^0(V_4^7, \mathcal{O}_{V_4^7}(\bar{B}_\lambda))$ e sia $\{\mathfrak{U}_j\}$ un ricoprimento finito di V_4^7 tale che risulti $\varphi_\alpha = \{\mathfrak{U}_j, \varphi_\alpha^j\}$ con $\varphi_\alpha^j \in \Gamma(\mathfrak{U}_j, \mathcal{O}_{V_4^7})$ per ogni $\alpha = 1, \ldots$ $\ldots, 10$ e che $s = \{\mathfrak{U}_j, s^j\}$ sia un sistema di equazioni locali per L. Per la (12) se $\varphi_0 \in H^0(V_4^7, \mathcal{O}_{V_4^7}(\bar{B}_\lambda + L))$ è tale che risulti $r\varphi_0 = 1$, $\{\varphi_0, s\varphi_1, \ldots, s\varphi_{10}\}$ è una base di $H^0(V_4^7, \mathcal{O}_{V_4^7}(\bar{B}_\lambda + L))$. Per ogni $z \in \mathfrak{U}_j$ l'applicazione $\phi_{|\bar{B}_\lambda + L|}$ si rappresenta così:

$$\phi_{|\bar{B}_\lambda + L|}(z) = (\varphi_0^j(z), s^j\varphi_1^j(z), \ldots, s^j\varphi_{10}^j(z))$$

e quindi L ha come immagine il punto $p_0 = (1, 0, \ldots, 0)$.

Osserviamo poi che possiamo supporre di avere scelto le φ_α in modo tale che $\{\varphi_1|_L, \varphi_2|_L, \varphi_3|_L, \varphi_4|_L\}$ sia una base di $H^0(L, \mathcal{O}_L(1))$ e quindi $\varphi_1^j, \ldots, \varphi_4^j$ non siano mai contemporaneamente nulle in $\mathfrak{U}_j \cap L$.

Dato ai simboli φ_i^j ed s^j il significato precisato sopra, si può ripetere la dimostrazione di Kodaira senza alcun cambiamento. Si vede così che se si pone:

$$\psi(z) = \left(\frac{s^j(z)\varphi_1^j(z)}{\varphi_0^j(z)}, \ldots, \frac{s^j(z)\varphi_4^j(z)}{\varphi_0^j(z)}, \varphi_1^j(z), \ldots, \varphi_4^j(z)\right), \quad \forall z \in \mathfrak{U}_j$$

l'applicazione $z \to \psi(z)$ è biolomorfa tra un intorno di L, aperto in topologia complessa, e una varietà W ottenuta scoppiando un opportuno intorno (complesso) $\mathfrak{A}$ dell'origine in $\mathbf{C}_4$ nell'origine stessa, e che, se $Q_0\colon \mathfrak{A} \to W$ è questo scoppiamento, l'applicazione $\phi_{|\bar{B}_\lambda+L|}\psi^{-1}Q_0$ è un omeomorfismo tra $\mathfrak{A}$ ed un intorno (complesso) di p_0 in V'; quindi p_0 è non singolare per V'.

Per il lemma precedente la V_4^7 che abbiamo supposto esistente, sarebbe lo scoppiamento di V' nel punto $p_0 = \phi_{|\bar{B}_\lambda+L|}(L)$, e quindi per il suo fascio canonico $\omega_{V_4^7}$ si avrebbe $\omega_{V_4^7} \simeq \phi^*_{|\bar{B}_\lambda+L|}\omega_{V'} \underset{\mathcal{O}_{V_4^7}}{\otimes} \mathcal{O}_{V_4^7}(3L)$; ma per ipotesi è $\omega_{V_4^7} \simeq \mathcal{O}_{V_4^7}(-3\bar{B}_\lambda)$, ed allora sarebbe $\mathcal{O}_{V_4^7}(-3(\bar{B}_\lambda + L)) \simeq \simeq \phi^*_{|\bar{B}_\lambda+L|}\omega_{V'}$ e quindi $\omega_{V'} \simeq \mathcal{O}_{V'}(3)$. In conclusione V' sarebbe una varietà di Fano di indice $r = 3$ (il grado $3^4 \cdot 8$ di $|-K_V|$ non è divisibile nè per 4^4 nè per 5^4) con $d = 8$ e si è già provato che non esistono V_4^8 di Fano con questi valori di r e di d.

Sia ora $n > 4$; se esistesse una $V_n^7 \subset \mathbf{P}_{n+5}$ di Fano risulterebbe $\mathcal{O}_{V_n^7}(-K_{V_n^7}) \simeq \mathcal{O}_{V_n^7}(n-1)$, sempre con i simboli dell'Osservazione 3, si avrebbe $\mathcal{O}_{\bar{B}^{n-4}}(-K_{\bar{B}^{n-4}}) \simeq \mathcal{O}_{\bar{B}^{n-4}}(3)$. Quindi (cfr. Teorema 2) $\bar{B}^{n-4}$ sarebbe una V_4 di Fano con $r = 3$ e $d = 7$ che come si è appena dimostrato non esiste.

5. Al contrario che per $d \geqslant 7$, è facile riconoscere invece che esistono $V_n^d \subset \mathbf{P}_{d+n-2}$ di Fano con $d = 3, 4, 5, 6$ e di dimensione superiore a 3.

È immediato riconoscere che ogni $V_n^3 \subset \mathbf{P}_{n+1}$ non singolare è una varietà di Fano di indice $n-1$.

Per l'Osservazione 2 e per questioni di grado ogni $V_n^4 \subset \mathbf{P}_{n+2}$ di Fano è l'intersezione completa di due quadriche non singolari di $\mathbf{P}_{n+2}$; viceversa usando il teorema di aggiunzione è facile vedere che ogni $V_n^4 \subset \mathbf{P}_{n+2}$, non singolare, intersezione di due ipersuperficie quadriche, è una varietà di Fano di indice $n-1$.

Per quanto riguarda il caso $d = 5$, esistono certamente varietà di Fano con tale valore di d e di dimensione n minore o uguale a 6. È ben noto infatti, che la grassmanniana W delle rette di $\mathbf{P}_4$ è una varietà di Fano di dimensione 6 e di indice 5 (cfr. [14] e [2]) e che le sezioni iperpiane generiche di W, intersezioni con 1, 2, 3 iperpiani generici sono anche esse di Fano (ancora con $d = 5$) rispettivamente di dimensione 5, 4, 3 e di indice 4, 3, 2.

Una V_4 di Fano con $d = 6$, anzi una $V_4^6 \subset \mathbf{P}_8$ di Fano, è il prodotto alla Segre $\mathbf{P}_2 \times \mathbf{P}_2$. Infatti se si indicano con $p_i\colon \mathbf{P}_2 \times \mathbf{P}_2 \to \mathbf{P}_2$ $(i = 1, 2)$, le proiezioni rispettivamente sul primo e sul secondo fattore, e si pone $\mathcal{O}_{\mathbf{P}_2\times\mathbf{P}_2}(E_i) = p_i^* \mathcal{O}_{\mathbf{P}_2}(1)$, risulta:

$$\mathcal{O}_{\mathbf{P}_2\times\mathbf{P}_2}(-K_{\mathbf{P}_2\times\mathbf{P}_2}) \simeq \mathcal{O}_{\mathbf{P}_2\times\mathbf{P}_2}(3(E_1+E_2)) .$$

Il grado di $|-K_{\mathbf{P}_2\times\mathbf{P}_2}|$ è $3^4\cdot\deg(E_1+E_2) = 3^4\cdot 6$, quindi l'indice di $\mathbf{P}_2\times\mathbf{P}_2$ non può che essere 3.

BIBLIOGRAFIA

[1] M. T. Bonardi, *Intorno a certe varietà algebriche dotate di sistema anticanonico*, B.U.M.I. (4) **8** (1973), pp. 456-464.

[2] G. Fano, *Sulle sezioni spaziali della varietà Grassmanniana delle rette dello spazio a cinque dimensioni*, Rend. Acc. Naz. Lincei (6), XI (1930), pp. 325-335.

[3] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Springer-Verlag, Vol. 52, New York (1977).

[4] R. Hartshorne, *Ample subvarieties of algebraic varieties*, Lecture Notes in Math., **156**, Springer-Verlag, Heidelberg (1970).

[5] V. A. Iskovskih, *Fano 3-folds - I*, Izvestija Akad. Nauk. SSSR, Ser. Matem., **41** (1977), pp. 516-562.

[6] K. Kodaira, *On Kahler varieties of restricted type*, Annales of Math., **60** (1954), pp. 28-48.

[7] A. T. Lascu, *Sous-variétés régulièrement contractibles d'une variété algébrique*, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, **23** (1969), pp. 675-695.

[8] Yu. I. Manin, *Cubic Forms, Algebra, Geometry, Arithmetic*, North-Holland, Amsterdam (1974).

[9] D. Mumford, *Varieties defined by quadratic equations*, C.I.M.E., Varenna (1969), pp. 31-94.

[10] M. Nagata, *On rational surfaces - I*, Mem. Coll. Sci. Kyoto (A), **32** (1960), pp. 351-370.

[11] L. Roth, *Sulle V_3 algebriche su cui l'aggiunzione si estingue*, Rend. Acc. Lincei, (8), **9** (1950), pp. 246-250.

[12] B. Saint-Donat, *Sur les équations définissant une courbe algébrique*, C. R. Acad. Sci. Paris, **274**: 4 (1972), pp. A 324-A 327.

[13] V. V. Šokurov, *La non singolarità del divisore anticanonico di una varietà di Fano tridimensionale*, Izvestija Akad. Nauk. SSSR, Ser. Mat. (in corso di stampa).

[14] A. N. Tyurin, *Five lectures on three-dimensional varieties*, Russian Math. Surveys, **27** (1972), pp. 1-53.

Manoscritto pervenuto in redazione l'11 ottobre 1979.