RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

EDVIGE PUCCI

Su una classe di precessioni semiregolari del satellite girostatico in orbita circolare

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 62 (1980), p. 245-250

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1980__62__245_0>

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1980, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (http://rendiconti.math.unipd.it/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, Vol. 62 (1980)

Su una classe di precessioni semiregolari del satellite girostatico in orbita circolare.

Edvige Pucci (*)

Sia S un satellite girostatico del tipo di Volterra [1] soggetto a sollecitazione centrale di tipo newtoniano valutata nell'approssimazione usuale della Meccanica Celeste [2], il cui baricentro si muove su orbita circolare.

Per S è stata studiata la possibilità dinamica di moti che siano *a*) rotazioni uniformi, *b*) rotazioni non uniformi, *c*) precessioni regolari nel riferimento T' relativo al baricentro [3], [4], [5].

In questa nota si studia la possibilità dinamica per S di una particolare classe di precessioni semiregolari caratterizzate dall'avere la velocità di precessione uguale alla velocità angolare $\boldsymbol{\nu}$ associata al moto del baricentro. L'esame di questa classe di precessioni (che costituisce una sottoclasse delle precessioni semiregolari di seconda specie) permette di risolvere completamente il problema della determinazione di tutti i moti che abbiano una caratterizzazione del tipo *a*), *b*), *c*) nel riferimento T'' coincidente con la terna intrinseca associata al moto deì baricentro (1). In questo riferimento la classe di precessioni suddetta costituisce la classe delle rotazioni non uniformi attorno ad un asse non ortogonale al piano orbitale.

La risoluzione del problema viene affrontata utilizzando la terna T' per uniformarsi ai risultati già ottenuti. Tenendo conto del fatto che

(*) Indirizzo dell'A.: Istituto Matematico, Università degli Studi - Via Vanvitelli - 06100 Perugia.

Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.F.M. (C.N.R.).

(1) T'' è la terna di riferimento usata per lo studio di moti cinematicamente caratterizzati in [6], [7], [8].

la terna T'' si muove di moto rotatorio uniforme di velocità angolare $\boldsymbol{\nu}$ rispetto a T' la trascrizione di tutti i risultati ottenuti è immediata. Le equazioni che regolano il moto attorno al baricentro del satellite girostatico sono le seguenti:

$$\sigma(\dot{\boldsymbol{\omega}}) + \boldsymbol{\omega}\wedge\sigma(\boldsymbol{\omega}) + \boldsymbol{\omega}\wedge\boldsymbol{I} = \eta\boldsymbol{c}\wedge\sigma(\boldsymbol{c}) \tag{1}$$

$$\dot{\boldsymbol{c}} = \boldsymbol{c}\wedge(\boldsymbol{\omega}-\boldsymbol{\nu}) \tag{2}$$

$$\dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu}\wedge\boldsymbol{\omega}\,, \tag{3}$$

in cui si è indicata con σ l'omografia centrale d'inerzia, con $\boldsymbol{I}$ il momento girostatico, con $\boldsymbol{c}$ il versore del raggio orbitale, con η un parametro legato alla lunghezza del raggio orbitale ed alla massa del corpo attraente. Tra tutte le soluzioni di questo sistema differenziale sono moti dinamicamente possibili quelle che verificano le seguenti relazioni invarianti:

$$\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu} = \nu^2 \tag{4}$$

$$\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c} = 1 \tag{5}$$

$$\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{c} = 0\,. \tag{6}$$

Per il sistema di equazioni (1), (2), (3) sussiste l'integrale primo dell'energia generalizzato:

$$\sigma(\boldsymbol{\omega})\cdot\boldsymbol{\omega} + \eta\boldsymbol{c}\cdot\sigma(\boldsymbol{c}) - 2\boldsymbol{\omega}\cdot\sigma(\boldsymbol{\nu}) - 2\boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{\nu} = 2E_0\,. \tag{7}$$

I moti di precessione del tipo in esame sono caratterizzati dalla seguente forma della velocità angolare:

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\nu} + \mu\boldsymbol{\chi} \tag{8}$$

in cui la grandezza della velocità di rotazione propria $\mu = \mu(t)$ varia nel tempo.

Si tratta di riconoscere sotto quali condizioni sui parametri strutturali di S e sulla direzione $\boldsymbol{\chi}$ dell'asse di figura, esistono soluzioni dinamicamente possibili del sistema differenziale che siano del tipo (8).

Si utilizza nel seguito come terna di proiezione una terna solidale $R\Gamma(G, \boldsymbol{i}_1, \boldsymbol{i}_2, \boldsymbol{i}_3)$ che ha il terzo asse diretto come l'asse di figura: $\boldsymbol{\chi} \equiv \boldsymbol{i}_3$. Si può scegliere in tutta generalità $R\Gamma$ in modo che σ assuma la forma ridotta:

$$\sigma = \begin{bmatrix} A & 0 & -B' \\ 0 & B & -A' \\ -B' & -A' & C \end{bmatrix}.$$

Si usano le seguenti notazioni:

$$I_j = \boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{i}_j\,, \qquad c_j = \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{i}_j\,, \qquad \nu_j = \boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{i}_j\,, \qquad j = 1, 2, 3\,.$$

Con la scelta effettuata per $R\Gamma$ si ha:

$$\nu_3 = \text{costante}\,, \qquad c_3 = \text{costante}\,,$$

mentre in genere variano nel tempo, oltre a μ, anche ν_1, ν_2, c_1, c_2:

Si può ottenere una condizione necessaria per la possibilità dinamica di un moto del tipo in esame utilizzando le relazioni invarianti (4), (5), (6) e l'integrale primo (7), e interpretando questo sistema di equazioni algebriche come un sistema di ipersuperficie algebriche dello spazio proiettivo $\mathbb{R}^5(\nu_1, \nu_2, c_1, c_2, \mu, z)$. Questo sistema di ipersuperficie definisce in $\mathbb{R}^5$ una varietà intersezione Σ che ha almeno dimensione 1; alla parte reale di Σ deve appartenere l'arco di curva che rappresenta il moto di precessione regolare e che quindi non può ridursi ad un punto. Poichè detto arco di curva non deve appartenere a varietà del tipo $\mu = hz$ con h costante, occorre che la proiezione $\mathcal{T}$ di Σ dall'$\mathbb{R}^3(\mu = 0, z = 0)$ nell'$\mathbb{R}^1(\mu, z)$ coincida con $\mathbb{R}^1$ stesso. In particolare quindi deve esistere almeno un punto di Σ che nella proiezione $\mathcal{T}$ corrisponda al punto improprio P_∞ di $\mathbb{R}^1$. Nella proiezione $\mathcal{T}$ a punti impropri corrispondono punti impropri; P_∞ deve dunque essere proiezione di almeno un punto della varietà Σ_∞ intersezione di Σ con l'iperpiano improprio π_∞ di $\mathbb{R}^5$. Σ_∞ è costituita dalla varietà di dimensione 1 di equazioni:

$$\Sigma_{\infty,1}\colon \nu_1^2 + \nu_2^2 = 0\,, \qquad c_1^2 + c_2^2 = 0\,,$$
$$\nu_1^2(B-A) + \eta(B-A)c_2^2 + C\mu^2 = 0\,, \qquad z = 0$$

e dai punti

$$\Sigma_{\infty,0}\colon \left(0, 0, 1, i \pm \sqrt{\frac{\eta(B-A)}{C}}, 0\right), \qquad \left(0, 0, 1, -i, \pm \sqrt{\frac{\eta(B-A)}{C}}, 0\right).$$

Se $A \neq B$ $\Sigma_{\infty,1}$ non è traccia su π_∞ di una varietà di dimensione 2 ([2]); Σ ha dunque in questo caso dimensione 1 ed è costituita da $\Sigma_{\infty,1}$ stessa (che essendo interamente contenuta in π_∞ è inessenziale nel seguito) e dalla varietà Σ_1 che interseca π_∞ nei punti $\Sigma_{\infty,0}$. Il punto improprio P_∞ deve dunque essere proiezione di almeno uno dei punti che costituiscono $\Sigma_{\infty,0}$. Essendo i punti di $\Sigma_{\infty,0}$ caratterizzati da valori non nulli di c_1 e c_2, questa corrispondenza può verificarsi solo se P_∞ appartiene alla varietà tangente a Σ_1 in almeno uno dei punti $\Sigma_{\infty,0}$. Un semplice calcolo mostra che, se è $A \neq B$, ciò non può verificarsi ([3]).

Ne segue che eventuali soluzioni dinamicamente possibili possono avvenire solo se è $A = B$ e cioè se l'asse di figura è ortogonale ad una delle sezioni cicliche dell'ellissoide centrale d'inerzia.

Posto $A = B$ le varietà che costituiscono Σ_∞ divengono:

$$\Sigma'_{\infty,1}\colon v_1^2 + v_2^2 = 0\,, \quad c_1^2 + c_2^2 = 0\,, \qquad \mu = 0\,, \qquad z = 0$$

$$\Sigma'_{\infty,0}\colon (0, 0, 1, i, 0, 0) \qquad (0, 0, 1, -i, 0, 0)\,.$$

Essendo $A = B$ si può in tutta generalità porre $B' = 0$; la proiezione di (1) lungo l'asse $\boldsymbol{i}_1$ assume con questa semplificazione forma finita ([4]) e può essere interpretata come ipersuperficie dello spazio $\mathbf{R}^5$. Poichè l'intersezione di Σ con detta ipersuperficie deve avere almeno dimensione 1 ([5]), occorre che la sua intersezione con π_∞ sia contenuta in Σ_∞. Si riconosce che se è anche $A' = 0$ l'intersezione con π_∞ è ancora costituita da $\Sigma'_{\infty,1}$ e $\Sigma'_{\infty,0}$, mentre se è $A' \neq 0$ l'intersezione con π_∞ è costituita nella varietà di equazione $z = 0$, $v_2^2 = \eta c_2^2$ che ha in comune con Σ_∞ i soli punti di $\Sigma'_{\infty,1}$

$$\Sigma''_{\infty,0}\colon \left(i\sqrt{\eta}, \sqrt{\eta}, i, 1, 0, 0\right)\,, \qquad \left(-i\sqrt{\eta}, -\sqrt{\eta}, i, 1, 0, 0\right)$$

e i complessi coniugati.

Il sistema di ipersuperficie (4), (5), (6), (7), (1.1) ha dunque in comune,

([2]) La varietà tangente a Σ nel suo punto $(0, 0, 1, i, \sqrt{\eta(B-A)/C}, 0)$ ha dimensione 1 essendo contenuta nella varietà di dimensione 1 intersezione delle varietà tangenti alle ipersuperficie (4), (5), (6), (7).

([3]) Il punto P_∞ non appartiene alle varietà intersezione delle varietà tangenti alle ipersuperficie (4), (5), (6), (7) nei punti $\Sigma_{\infty,0}$.

([4]) In seguito si indica con (1.1) l'equazione algebrica ottenuta.

([5]) Questa intersezione deve contenere l'arco di curva che rappresenta il moto di precessione semiregolare.

se è $A' \neq 0$, una varietà di dimensione al più 1; per quanto detto in precedenza nella proiezione $\mathcal{T}$ questa varietà deve coincidere con $\mathbb{R}^1$ stesso. Con considerazioni del tutto analoghe a quelle precedenti si riconosce che questo non può mai avvenire per valori accettabili dei parametri strutturali ($C \neq 0$) (6).

Resta dunque come sola eventualità possibile quella che risulti $A' = 0$, condizione che, unita alle altre $A = B$, $B' = 0$, comporta che il satellite abbia struttura giroscopica intorno all'asse di figura.

Mediante un agevole calcolo diretto si esclude la possibilità dinamica di precessioni semiregolari anche in questo caso. Posto, senza ledere la generalità $I_1 = 0$, si possono ricavare (7) dalle proiezioni di (1) lungo gli assi i_1 ed i_2 le seguenti espressioni di c_1 e c_2

$$c_2 = [C\mu\nu_2 - \mu I_2 + (C-A)\nu_2\nu_3 + \nu_2 I_3 - \nu_3 I_2]/\eta(C-A)c_3 \tag{1.1}$$

$$c_1 = \nu_1[C\mu + (C-A)\nu_3 + I_3]/\eta(C-A)c_3\,. \tag{1.2}$$

Sostituendo queste espressioni nella (6) e tenendo conto che, per la (7) è

$$2I_2\nu_2 = C\mu^2 + \bar{E} \qquad \bar{E} = \text{costante}$$

si ottiene una equazione algebrica nella sola variabile μ, che non può essere verificata identicamente (cioè da infiniti valori di μ) per valori accettabili dei parametri strutturali; ne segue che eventuali precessioni sono, anche in questo caso, regolari.

(6) Anche in questo caso P_∞ non si ottiene per proiezione dei punti $\Sigma''_{\infty,0}$, nè appartiene all'intersezione delle varietà tangenti alle ipersuperficie (4), (5), (6), (7), (1.1) nei punti $\Sigma''_{\infty,0}$.

(7) Si osservi che deve essere $c_3(C-A) \neq 0$. Infatti se $c_3(C-A) = 0$ da (1.2) si ha o $\nu_1 = 0$ oppure $C\mu + (C-A)\nu_3 - I_3 = 0$. In entrambi i casi i moti corrispondenti non sono precessioni semiregolari.

BIBLIOGRAFIA

[1] V. Volterra, *Opere Matematiche, Memorie, Note*, Acc. Naz. Lincei (1956).

[2] G. Grioli, *Stereodynamics*, in *Stereodynamics*, I ciclo C.I.M.E., Cremonese, Roma, 1972.

[3] R. Balli - M. C. Nucci, *Sulle rotazioni di un satellite girostatico in orbita circolare,* Rend. Mat. Univ. Roma, serie VI, 12 (1979).

[4] R. Balli - A. Grioli, *Sulle rotazioni non uniformi di un satellite girostatico simmetrico in orbita circolare,* Riv. di Mat. Parma (4), **7** (1981).

[5] R. Balli - E. Pucci, *Regular precession of a gyrostatic satellite in a circular orbit,* Cel. Mech., **16** (1978).

[6] R. W. Longman, *The equilibria of orbiting gyrostats with internal angular momenta along principal axes,* Proc. of the Symposium on Gravity Gradient Stabilization Aerospace Corporation, El Segundo, Calif., 1968.

[7] R. W. Longman - R. E. Roberson, *General solution for the equilibria of orbiting gyrostats subject to gravitational torques,* J. Astronaut. Sci., **16,** n. 2 (1969).

[8] R. E. Roberson - W. W. Hooker, *Gravitational equilibria of a rigid body containing symmetric rotors,* Proc. 17-th Congr. Int. Austraut. Fed. (Madrid 1966), Dunod, Paris, 1967.

Manoscritto pervenuto in redazione il 26 giugno 1979.