RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

MAURO BILIOTTI

Sui derivati dei piani desarguesiani

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 62 (1980), p. 165-181

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1980__62__165_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 62 (1980)

Sui derivati dei piani desarguesiani.

MAURO BILIOTTI (*)

SUMMARY - In this note we give a generalization of the Hall quasifields to obtain a class of quasifields coordinatizing the derived planes of Desarguesian (Pappian or non Pappian) planes. Some open questions about infinite Hall planes are also solved.

In una precedente nota [2] abbiamo mostrato che un piano proiettivo desarguesiano è derivabile se e solo se il corpo delle coordinate è estensione quadratica sia a destra che a sinistra di un suo sottocorpo. I derivati dei piani desarguesiani pappiani sono, com'è ben noto [1], [22], [19] tutti e soli i piani coordinatizzabili mediante un quasicorpo di Hall e sono stati oggetto di studio da parte di vari autori (vedi bibliografia). Nella prima parte di questa nota si introduce una nuova classe di quasicorpi, detti quasicorpi di Hall generalizzati, atti a coordinatizzare tutti e soli i derivati dei piani desarguesiani. Un quasicorpo di Hall generalizzato è un quasicorpo di Hall se e solo se coordinatizza il derivato di un piano desarguesiano pappiano. Di tali quasicorpi si determina il nucleo ed il gruppo degli automorfismi.

Nella seconda parte della nota si determina il gruppo delle collineazioni dei piani di Hall (classici) mostrando che esso coincide con il gruppo ereditato per derivazione dal piano desarguesiano. Si prova inoltre che i quasicorpi di Hall H_1 ed H_2 sui campi K_1 e K_2 e relativi ai polinomi f_1 ed f_2 coordinatizzano piani isomorfi se e solo se fra

(*) Indirizzo dell'A.: Istituto Matematico « U. Dini » - Viale Morgagni 67/A - Firenze.

Lavoro eseguito nell'ambito delle attività del G.N.S.A.G.A. del C.N.R.

l'estensione quadratica di K_1 mediante f_1 e l'estensione quadratica di K_2 mediante f_2 esiste un isomorfismo che muta K_1 in K_2. Tali risultati, già noti [8], [16], [17] nel caso di quasicorpi di Hall su campi non isomorfi a sottocampi propri, non ci consta fossero sinora noti nel caso di quasicorpi di Hall qualunque (vedi [9]).

1. Sia K un corpo ed S un suo endomorfismo; una *S-derivazione* di K è un'applicazione D di K in sè con le seguenti proprietà:

1) $(\alpha+\beta)^D=\alpha^D+\beta^D$,

2) $(\alpha\beta)^D=\alpha^D\beta+\alpha^S\beta^D \qquad (\alpha,\beta\in K)$.

Dati un corpo K, un endomorfismo S ed una S derivazione D di K resta definito l'anello dei polinomi sghembi in x su K associato ad S e a D. Tale anello, che denoteremo con $K[x, S, D]$, è costituito dai polinomi del tipo

$$f=\alpha_0+\ldots+\alpha_i x^i+\ldots+\alpha_n x^n \qquad (\alpha_i\in K,\ i=0,\ldots,n)\,.$$

L'operazione di somma fra polinomi è definita nel modo usuale. Se $g=\beta_0+\ldots+\beta_j x^j+\ldots+\beta_m x^m$ è

$$f\cdot g=\sum_{\substack{0\leqslant i\leqslant n\\ 0\leqslant j\leqslant m}}\ \sum_{0\leqslant k\leqslant i}\alpha_i\beta_j^{p(k,i-k)}x^{k+j}\,,$$

ove $p(k, i-k)$ è la somma, nell'anello degli endomorfismi del gruppo additivo di K, di tutti i possibili prodotti di k fattori S ed $i-k$ fattori D $(0\leqslant k\leqslant i,\ i>0)$ e $p(0,0)=I$. Un polinomio f di $R= K[x, S, D]$ si dice *invariante a sinistra* se $fR\subseteq Rf$, ossia se l'ideale sinistro Rf risulta bilatero.

Un sovracorpo F di un corpo K è detto *estensione quadratica* (*a sinistra*) di K se $[F:K]_L=2$ (1). Se F è una estensione quadratica di K e $t\in F-K$, F è generato (come spazio vettoriale sinistro su K) da 1 e da t e la sua struttura moltiplicativa risulta completamente determinata dalle relazioni

$$t\alpha=\alpha_1 t+\alpha_2 \qquad (\alpha,\alpha_1,\alpha_2\in K)\,, \tag{1}$$

$$t^2+\lambda t+\mu=0 \qquad (\lambda,\mu\in K)\,. \tag{2}$$

(1) Con $[F:K]_L$ ($[F:K]_R$) denoteremo la dimensione di F riguardato come spazio vettoriale sinistro (destro) su K.

Le applicazioni S: $\alpha \mapsto \alpha_1$, D: $\alpha \mapsto \alpha_2$ risultano rispettivamente un endomorfismo ed una S-derivazione di K.

Dati un corpo K, un endomorfismo S, una S-derivazione D e due elementi λ, μ di K, il corpo estensione quadratica di K generato da un elemento t soddisfacente (1) e (2) esiste se e solo se il polinomio $x^2 + \lambda x + \mu$ è irriducibile ed invariante a sinistra in $R = K[x, S, D]$ e risulta in tal caso isomorfo ad R/Rf.

2. Sia K un corpo, S un *automorfismo*, D una S-derivazione di K ed $x^2 - \omega x - \varphi$ un polinomio di $K[x, S, D]$ irriducibile ed invariante a sinistra (²). Nello spazio vettoriale K^2, costituito dalle coppie ordinate di elementi di $K(+)$, definiamo un'operazione di prodotto (simbolo «$\circ$») nel modo seguente:

$$\begin{aligned}(\alpha_1, \alpha_2)\circ(\beta_1, \beta_2) = \Big(&\alpha_1\beta_2^{S^{-1}} - \alpha_1(\alpha_2\alpha_1^{-1}\beta_1)^{S^{-1}} + \beta_1\omega^{S^{-1}} + \alpha_1(\alpha_1^{-1}\beta_1)^{DS^{-1}},\\ &\alpha_2\beta_2^{S^{-1}} - \big(\alpha_2(\alpha_2\alpha_1^{-1}\beta_1)^{S^{-1}} - \alpha_2\alpha_1^{-1}\beta_1\omega^{S^{-1}} - (\alpha_1^{-1}\beta_1)^S\varphi\big) -\\ &- \big(\beta_2 - \alpha_2\alpha_1^{-1}\beta_1 + (\alpha_1^{-1}\beta_1)^S\omega + (\alpha_1^{-1}\beta_1)^D\big)^{S^{-1}D} + \alpha_2(\alpha_1^{-1}\beta_1)^{DS^{-1}}\Big)\end{aligned}$$

se $\alpha_1 \neq 0$;

$$(0, \alpha_2)\circ(\beta_1, \beta_2) = (\beta_1\alpha_2, \beta_2\alpha_2)\,.$$

Denoteremo la struttura $K^2(+, \circ)$ («$+$» simbolo dell'operazione di somma dello spazio vettoriale K^2) con $H(K, S, D, \omega, \varphi)$.

Vale il seguente teorema.

TEOREMA 1. *La struttura $H = H(K, S, D, \omega, \varphi)$ è un quasicorpo sinistro che chiameremo «quasi corpo di Hall generalizzato»* (brevemente «*q.c.g. di Hall*»).

Un piano proiettivo è il derivato di un piano proiettivo desarguesiano se e solo se ammette fra gli anelli ternari (di G. Pickert) (³) *che lo coordinatizzano un q.c.g. di Hall.*

DIMOSTRAZIONE. È subito visto che dall'irriducibilità e l'invarianza a sinistra in $K[x, S, D]$ del polinomio $x^2 - \omega x - \varphi$ segue l'irriducibilità e l'invarianza a sinistra in $K[x, S, -D]$ del polinomio

(²) Sulla determinazione dei polinomi invarianti vedi [5].

(³) Supporremo sempre nel seguito che gli anelli ternari delle coordinate siano associati ai piani con il metodo di G. Pickert [20].

$x^2 + \omega x - \varphi$, ove $-D$ è la S-derivazione di K definita da $-D$: $\alpha \mapsto -\alpha^D$. Sia F l'estensione quadratica (a sinistra) di K generata da un elemento t soddisfacente le relazioni:

$$t\alpha = \alpha^S t + \alpha^{-D} \qquad (\alpha \in K)\,, \tag{3}$$

$$t^2 + \omega t - \varphi = 0\,, \tag{4}$$

e sia $\bar{D}(F)$ il piano affine (desarguesiano) coordinatizzato da F. Denoteremo con l_∞ la retta impropria di $\bar{D}(F)$ e rispettivamente con (a) e (∞) i punti impropri delle rette di equazione $y = ax + b$ ed $x = c$ $(a, b, c \in F)$; denoteremo inoltre con $D(F)$ l'estensione proiettiva di $\bar{D}(F)$. Poichè S è un automorfismo di K risulta $\big([4]$, Corollary 3.1$\big)$ $[F:K]_R = [F:K]_L = 2$ e quindi $\big([2]$, Teorema 4.1$\big)$ $\Delta = \{(\alpha), (\infty)\colon \alpha \in K\}$ risulta un insieme di derivazione per $D(F)$ su l_∞ (4). Per ogni $a \in F$ $(a \neq 0)$, $b, c \in F$ denotiamo con $[\overline{a; b, c}]$ il sottopiano (affine) di Baer di $\bar{D}(F)$ $\big($vedi [2], Lemma 2.1 e Teorema 4.1$\big)$ costituito dai punti della forma $(\alpha a + b, \beta a + c)$ e dalle rette di equazione $y = \beta x + \alpha a - \beta b + c$, $x = \alpha a + b$ $(\alpha, \beta \in K)$. Un sottopiano di Baer di $\bar{D}(F)$ ha come insieme dei punti impropri Δ se e solo se è del tipo $[\overline{a; b, c}]$ $\big([2]$, Teorema 2.1$\big)$. Sia $\bar{D}_\Delta(F)$ il derivato affine di $D(F)$. Denoteremo con $D_\Delta(F)$ l'estensione proiettiva di $\bar{D}_\Delta(F)$. I punti di $\bar{D}_\Delta(F)$ coincidono con quelli di $\bar{D}(F)$.

Al generico punto di $\bar{D}_\Delta(F)$ di coordinate $\big($in $\bar{D}(F)\big)$

$$(x, y) = (\nu_1 t + \nu_2, \eta_1 t + \eta_2) \qquad (\nu_i, \eta_i \in K,\ i = 1, 2)$$

assegnamo le nuove coordinate

$$(x', y') = (\nu_1 t + \eta_1, \nu_2 t + \eta_2)\,.$$

Nel seguito denoteremo con Σ l'originario sistema di coordinate e con Σ' il nuovo sistema di coordinate di $\bar{D}_\Delta(F)$.

Identifichiamo poi ogni elemento $(\alpha_1, \alpha_2) \in H$ con l'elemento $\alpha_1 t + \alpha_2 \in F$. Dopo tale identificazione le operazioni di somma di F ed H coincidono e saranno entrambe denotate con lo stesso simbolo « $+$ »; l'operazione di prodotto di H continuerà ad essere indicata con il simbolo « $\circ$ ». Calcoli laboriosi, ma elementari, che omettiamo, mo-

(4) La teoria della derivazione per i piani infiniti è analoga a quella per i piani finiti. Per una trattazione che includa anche il caso infinito si veda [10].

strano che una retta di $\bar{D}_\Delta(F)$ del tipo $[\overline{a; b, c}]$ con $a = \alpha_1 t + \alpha_2$ $(\alpha_1, \alpha_2 \in K)$ ha equazione in Σ':

1) se $\alpha_1 \neq 0$, $[\overline{a; b, c}] = [\overline{a; \gamma, \delta}]$ (5) $(\gamma, \delta \in K)$, $p = \gamma t + \delta$ e $\varrho = \alpha_1^{-1}\alpha_2$,

$$y' = \varrho \circ x' + p\ ,$$

2) se $\alpha_1 = 0$, $b = \beta_1 t + \beta_2$, $c = \gamma_1 t + \gamma_2$ $(\beta_i, \gamma_i \in K,\ i = 1, 2)$ ed $l = \beta_1 t + \gamma_1$,

$$x' = l\ ;$$

mentre una retta di $\bar{D}_\Delta(F)$ di equazione in Σ

$$y = mx + q$$

con

$$m \in F - K\ ,\ m = t\omega_1 + \omega_2\ ,\ q = t\varphi_1 + \varphi_2 \qquad (\omega_i, \varphi_i \in K,\ i = 1, 2)$$

ha equazioni in Σ'

$$y' = n \circ x' + s$$

ove $n = \omega_1^{-1} t + \omega_2 \omega_1^{-1}$ ed $s = -(\omega_1^{-1}\varphi_1)t + \varphi_2 - \omega_2\omega_1^{-1}\varphi_1$.

È allora subito visto che H è l'anello ternario che coordinatizza $D_\Delta(F)$ rispetto al riferimento (O', U', V', E') ove U' e V' sono i punti impropri rispettivamente delle rette $[\overline{t; 0, 0}]$ ed $[\overline{1; 0, 0}]$ ed $O' = (0, 0)$, $E' = (0, t + 1)$ (in Σ). Poichè il piano $D(F)$ è desarguesiano, il piano $D_\Delta(F)$ è di traslazione rispetto alla retta $U'V'$ ([10], Theorem 2.13) e quindi H è un quasicorpo sinistro.

Per completare la dimostrazione del teorema è sufficiente mostrare che ogni piano derivato di un piano desarguesiano è coordinatizzabile mediante un q.c.g. di Hall.

Sia $\mathfrak{D}$ un piano proiettivo desarguesiano, Ω un insieme di derivazione per $\mathfrak{D}$ e $\mathfrak{D}_\Omega$ il derivato di $\mathfrak{D}$ mediante Ω. Fissiamo in $\mathfrak{D}$ un riferimento (O, U, V, E) con $U, V, OE \cap UV \in \Omega$. Il corpo F che

(5) Posto $b = \bar{\gamma}a + \gamma$, $c = \bar{\delta}a + \delta$ risulta

$$\{(\alpha a + b, \beta a + c)\} = \{((a + \bar{\gamma})a + \gamma, (\beta + \bar{\delta})a + \delta)\} = \{(\alpha a + \gamma, \beta\alpha + \delta)\}\ .$$

coordinatizza $\mathfrak{D}$ rispetto a tale riferimento possiede un sottocorpo K (precisamente il sottocorpo che coordinatizza il sottopiano di Baer contenente Ω ed i punti O ed E) tale che $\Omega = \{(\alpha), (\infty) \colon \alpha \in K\}$ ed $[F:K]_R = [F:K]_L = 2$ ([2], Teorema 4.1). Sia $t \in F - K$ e sia

$$t^2 + \lambda t + \mu = 0 \qquad (\lambda, \mu \in K),$$

$$t\alpha = \alpha^S t + \alpha^D \qquad (\alpha \in K).$$

Allora S è un automorfismo di K ([4], Corollary 3.1) ed il polinomio $x^2 + \lambda x + \mu$ è irriducibile ed invariante in $K[x, S, D]$. Tale risulta allora in $K[x, S, -D]$ il polinomio $x^2 - \lambda x + \mu$ e resta pertanto definito il q.c.g. di Hall $H = H(K, S, -D, \lambda, -\mu)$. Procedendo come nella prima parte della dimostrazione si prova che $\mathfrak{D}_\Omega$ è coordinatizzabile mediante H.

OSSERVAZIONI:

1) se K è un campo, $S = I$ e $D = O$ (O: $\alpha \mapsto 0$), la definizione di q.c.g. di Hall coincide con la definizione classica di q.c. di Hall;

2) gli elementi di H della forma $(0, \alpha)$ con $\alpha \in K$ costituiscono un sottocorpo K' di H antiisomorfo a K; H risulta uno spazio vettoriale sinistro di dimensione due su K'.

Nel seguito faremo spesso tacito ricorso alla identificazione degli elementi di H con quelli del corpo F come nella dimostrazione del Teorema 1 (scriveremo sempre α in luogo di $(0, \alpha)$) e quindi all'identificazione dei punti del piano affine $\bar{M}(H)$ su H con quelli del piano $\bar{D}_\Delta(F)$. I punti impropri di $\bar{M}(H)$ saranno indicati con $(a)'$, $(\infty)'$ e la retta impropria con l'_∞. Com'è noto ([10], Corollary 2.12) $\Delta' = \{(\alpha)', (\infty)' \colon \alpha \in K'\}$ costituisce un insieme di derivazione per $M(H)$ (estensione proiettiva di $\bar{M}(H)$) su l'_∞ ed il derivato $M_{\Delta'}(H)$ di $M(H)$ mediante Δ' coincide con $D(F)$.

Le collineazioni di $M(H)$ che mutano in sè Δ' sono tutte e sole quelle indotte in $M(H)$ da collineazioni di $D(F)$ che mutano in sè Δ, ossia da collineazioni di $\bar{D}(F)$ di uno dei seguenti tipi:

I) $(x, y) \mapsto (x + b, y + c) \qquad b, c \in F$;

II) $(x, y) \mapsto (xa, ya) \qquad a = \alpha_1 t + \alpha_2 \in F, \ a \neq 0$;

III) $(x, y) \mapsto (\alpha_{11} x + \alpha_{12} y, \alpha_{21} x + \alpha_{22} y)$

con $\alpha_{ij} \in K$ $(i, j = 1, 2)$, (α_{ij}) non singolare;

IV) $(x, y) \mapsto (x^A, y^A)$, $A \in \mathrm{Aut}(F)$, $K^A = K$.

Le collineazioni di tipo I inducono in $\overline{M}(H)$ tutte e sole le traslazioni di $\overline{M}(H)$.

Le collineazioni di $\overline{M}(H)$ indotte da quelle di tipo II, III, IV operano (rispetto a Σ') nel modo seguente:

$$\text{II)} \qquad (x', y') = (\nu_1 t + \eta_1, \nu_2 t + \eta_2) \mapsto$$
$$\mapsto \big((-\nu_1\alpha_1^S\omega - \nu_1\alpha_1^D + \nu_1\alpha_2^S + \nu_2\alpha_1)t + (-\eta_1\alpha_1^S\omega - \eta_1\alpha_1^D + \eta_1\alpha_2^S + \eta_2\alpha_1),$$
$$(\nu_1\alpha_1^S\varphi - \nu_1\alpha_2^D + \nu_2\alpha_2)t + (\eta_1\alpha_1^S\varphi - \eta_1\alpha_2^D + \eta_2\alpha_2)\big),$$

$$\text{III)} \qquad (x', y') = (\nu_1 t + \eta_1, \nu_2 t + \eta_2) \mapsto \big((\alpha_{11}\nu_1 + \alpha_{12}\eta_1)t + \alpha_{21}\nu_1 + \alpha_{22}\eta_1,$$
$$(\alpha_{11}\nu_2 + \alpha_{12}\eta_2)t + \alpha_{21}\nu_2 + \alpha_{22}\eta_2\big).$$

$$\text{IV)} \qquad (x', y') = (\nu_1 t + \eta_1, \nu_2 t + \eta_2) \mapsto$$
$$\mapsto \big(\nu_1^A\varrho_1 t + \eta_1^A\varrho_1, (\nu_1^A\varrho_2 + \nu_2^A)t + \eta_1^A\varrho_2 + \eta_2^A\big)$$

ove si è posto $t^A = \varrho_1 t + \varrho_2$.

TEOREMA 2. *Sia $H = H(K, S, D, \omega, \varphi)$ un q.c.g. di Hall con $|H| > 9$. Si ha:*

1) *il nucleo di H è $N = \{\alpha \in Z(K) : \alpha^S = \alpha \text{ e } \alpha^D = 0\}$* [6];

2) *è $b \circ a = a \circ b$ per ogni $a \in H$ se e solo se $b \in N$;*

3) *per ogni $a \in H - K'$ risulta*

$$a \circ a - \omega^{S^{-1}} \circ a + \omega^{S^{-1}D} - \varphi = 0 ;$$

4) *gli automorfismi di H sono tutte e sole le applicazioni di H in sè del tipo*

$$(\alpha_1, \alpha_2) \mapsto (\alpha\alpha_1^A, \beta\alpha_1^A + \alpha_2^A)$$

con $\alpha, \beta \in K$, $\alpha \neq 0$ ed $A \in \mathrm{Aut}(K)$ tale che $\omega^A = \omega$, $\varphi^A = \varphi$, $AS = SA$, $AD = DA$.

[6] Dato un corpo K si denota con $Z(K)$ il suo centro.

DIMOSTRAZIONE. Sia $b = \beta_1 t + \beta_2 \in N$. Per ogni $\alpha_1, \alpha_2 \in K$ risulta

$$(\alpha_1 t + \alpha_2)\circ b = (\alpha_1 t)\circ b + \alpha_2 \circ b$$

e quindi sussistono (in K) le relazioni

$$-\alpha_1(\alpha_2\alpha_1^{-1}\beta_1)^{S^{-1}} = \beta_1\alpha_2 , \tag{5}$$

$$\begin{aligned}\alpha_2\beta_2^{S^{-1}} - \alpha_2(\alpha_2\alpha_1^{-1}\beta_1)^{S^{-1}} + \alpha_2\alpha_1^{-1}\beta_1\omega^{S^{-1}} + {}\\ + (\alpha_2\alpha_1^{-1}\beta_1)^{S^{-1}D} + \alpha_2(\alpha_1^{-1}\beta_1)^{DS^{-1}} = \beta_2\alpha_2 .\end{aligned} \tag{6}$$

Supponiamo $\beta_1 \neq 0$. Da (5) con $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ segue $\beta_1^S = -\beta_1$. Tenuto conto di ciò da (5) con $\alpha_2 = 1$ discende $\alpha_1^S = \alpha_1$ e quindi $S = I$ e K ha caratteristica due. Ancora da (5) con $\alpha_1 = 1$ si ha allora $\beta_1 \in Z(K)$ e quindi, nuovamente da (5), $\alpha_1\alpha_2 = \alpha_2\alpha_1$, ossia K è un campo. Con $\alpha_1 = \beta_1$, tenuto conto che $1^D = 0$, (6) assume allora la forma

$$\alpha_2^D = \alpha_2^2 + \alpha_2\omega . \tag{7}$$

Da (7), ponendo $\alpha_2 = 1$, segue $\omega = 1$ e quindi risulta

$$\alpha_2^D = \alpha_2^2 + \alpha_2 .$$

Siano $\alpha, \beta \in K$; è allora

$$(\alpha\beta)^D = (\alpha\beta)^2 + \alpha\beta , \tag{8}$$

$$(\alpha\beta)^D = \alpha^D\beta + \alpha^S\beta^D = (\alpha^2 + \alpha)\beta + \alpha(\beta^2 + \beta) . \tag{9}$$

Dal confronto di (8) e (9), per $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$ si ottiene

$$(\alpha + 1)(\beta + 1) = 0 .$$

Tale relazione vale per ogni coppia α, β di elementi non nulli di K se e solo se $|K| = 2$. Avendo supposto $|K| \geqslant 3$ è necessariamente $\beta_1 = 0$, ossia $b = \beta_2$. La relazione (6) diviene allora

$$\alpha_2\beta_2^{S^{-1}} = \beta_2\alpha_2 . \tag{10}$$

Da (10), ponendo $\alpha_2 = 1$, segue $\beta_2^S = \beta_2$ e quindi, ancora per (10), $\beta_2 \in Z(K)$.

Poichè $|K|\geqslant 3$, esistono $\alpha, \bar{\alpha}\in K$ con $0\neq\alpha\neq\alpha+\bar{\alpha}\neq 0$. Da

$$(\alpha t+\bar{\alpha}t)\circ\beta_2=\alpha t\circ\beta_2+\bar{\alpha}t\circ\beta_2$$

e da quanto sopra provato discende allora $\beta_2^D=0$.

Si verifica senza difficoltà che ogni elemento $\beta_2\in Z(K)$, tale che $\beta_2^S=\beta_2$ e $\beta_2^D=0$ è nel nucleo di H e quindi 1) è provato.

La semplice verifica mostra che gli elementi di N commutano con ogni elemento di H. Il viceversa è ovvio. Anche 3) si riduce alla verifica.

Mostriamo 4). Com'è noto ([20], Satz 8,9) ogni automorfismo di H che muta in sè K' è indotto da una collineazione di $M(H)$ che muta in sè Δ' e fissa i punti della terna $\Lambda=\{(0,0),(1,0),(0,1)\}$ e viceversa. Fra le collineazioni di tipo I e II solo l'identità fissa Λ. Le collineazioni di tipo III fissano puntualmente Λ se e solo se è $\alpha_{12}=0$ ed $\alpha_{22}=1$. Ne discende che esse inducono in H tutti e soli gli automorfismi del tipo

$$a)\quad \alpha_1 t+\alpha_2\mapsto\alpha\alpha_1 t+\beta\alpha_1+\alpha_2\quad(\alpha,\beta\in K,\ \alpha\neq 0).$$

Le collineazioni di tipo IV fissano puntualmente Λ se e solo se risulta $\varrho_1=1$ e $\varrho_2=0$. Ne segue che esse inducono in H tutti e soli gli automorfismi del tipo

$$b)\quad \alpha_1 t+\alpha_2\mapsto\alpha_1^A t+a_2^A$$

con A automorfismo di F tale che $K^A=K$ e $t^A=t$. Se A è un automorfismo di F siffatto dalle relazioni

$$\alpha^{AS}t-\alpha^{AD}=t\alpha^A=t^A\alpha^A=(t\alpha)^A=(\alpha^S t-\alpha^D)^A=\alpha^{SA}t-\alpha^{DA}\qquad(\alpha\in K)\,,$$

$$-\omega^A t+\varphi^A=-\omega^A t^A+\varphi^A=(t^2)^A=t^2=-\omega t+\varphi\,,$$

segue che la sua restrizione a K gode delle proprietà date in 4). Viceversa un automorfismo A di K godente di tali proprietà è estendibile ad un automorfismo di F ponendo $t^A=t$.

È subito visto che il gruppo generato dagli automorfismi sopra definiti è prodotto semidiretto del gruppo costituito dagli automorfismi di tipo a) con il gruppo costituito da quelli di tipo b). Per completare la dimostrazione è allora sufficiente provare che ogni automorfismo di H muta in sè K'. Supposto ciò non accada, essendo il gruppo degli automorfismi di tipo a) transitivo su $H-K'$, esiste un automorfismo B di H tale che $t \in K'^B$. Poichè K'^B è un corpo è $t+1 \in K'^B$ e risulta

$$(t+1)\circ t = t\circ t + t$$

e quindi sussistono le relazioni

$$-1 = 1\,, \qquad -1-\omega^{S^{-1}} = 0$$

dalle quali segue che K ha caratteristica due ed $\omega = 1$. È pertanto $t\circ t = t + \varphi$ e quindi $\varphi \in K'^B$. Risulta allora

$$(\varphi\circ t)\circ t = \varphi\circ(t\circ t)$$

ossia

$$1 + \varphi(\varphi^{-1})^{DS^{-1}} = \varphi\,, \tag{11}$$

$$(\varphi^{-1})^S\varphi + (\varphi^{-1})^D + (\varphi^{-1})^{DS^{-1}D} = \varphi^2\,. \tag{12}$$

Per (11) è $(\varphi^{-1})^{DS^{-1}} = 1 + \varphi^{-1}$. Sostituendo in (12) e semplificando a destra per φ si ottiene

$$\varphi^S = \varphi^{-1}\,. \tag{13}$$

D'altra parte è anche

$$(t+1)\circ(t+\varphi) = t\circ(t+\varphi) + t + \varphi\,,$$

da cui

$$\varphi^S = \varphi\,. \tag{14}$$

Da (13) e (14) segue $\varphi = 1$. È allora subito verificato che in H l'inverso destro e l'inverso sinistro di un elemento $\alpha_1 t + \alpha_2$ con $\alpha_1 \neq 0$ $(\alpha_1, \alpha_2 \in K)$ coincidono entrambi con $\alpha_1 t + \alpha_2 + 1$. Mostriamo che se $0 \neq \alpha_1 t + \alpha_2 \in K'^B$, risulta $(\alpha_1 t + \alpha_2)\circ t \in K'$ se e solo se $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$. È $(t+1)\circ t = 1$. Viceversa sia $(\alpha_1 t + \alpha_2)\circ t \in K'$. È $\alpha_1 \neq 0$ ed

$$\big((\alpha_1 t + \alpha_2)\circ t\big)^{-1} = (t+1)\circ(\alpha_1 t + \alpha_2 + 1) \in K'\,.$$

Sussistono pertanto le relazioni

$$\alpha_1(\alpha_2\alpha_1^{-1})^{S^{-1}} + 1 + \alpha_1(\alpha_1^{-1})^{DS^{-1}} = 0\,, \tag{15}$$

$$(\alpha_2 + 1)^{S^{-1}} + \alpha_1^{S^{-1}} + \alpha_1 + \alpha_1^{DS^{-1}} = 0\,. \tag{16}$$

Tenuto conto che $\alpha_1^S(\alpha_1^{-1})^D = \alpha_1^D\alpha_1^{-1}$, (15) e (16) possono essere poste rispettivamente nella forma

$$(15)' \qquad \alpha_1^S\alpha_2 + \alpha_1 + \alpha_1^D = 0\,,$$

$$(16)' \qquad \alpha_2 + 1 + \alpha_1 + \alpha_1^S + \alpha_1^D = 0\,.$$

Sommando (15)′ e (16)′ si ottiene $(\alpha_1^S + 1)(\alpha_2 + 1) = 0$ e quindi $\alpha_1 = 1$ o $\alpha_2 = 1$. Se $\alpha_1 = 1$, da (15)′ segue $\alpha_2 = 1$; se $\alpha_2 = 1$, in K'^B risulta $(\alpha_1 t + 1)\circ t = \alpha_1 t^2 + t = (\alpha_1 + 1)t + \alpha_1$ e quindi $\alpha_1 = 1$.

Sia $\alpha_1 t + \alpha_2 \in K'^B$ con $0 \neq \alpha_1 \neq 1$. È subito visto che se non esiste in K'^B un tale elemento, allora $|K'^B| = 4$. In tal caso K' è nucleo di H e $K'^B = K'$. Per quanto sopra mostrato è $(\alpha_1 t + \alpha_2)\circ t \notin K'$ e quindi $\big((\alpha_1 t + \alpha_2)\circ t\big)^{-1} = \big((\alpha_1 t + \alpha_2)\circ t\big) + 1$, ossia

$$(17) \qquad \big((\alpha_1 t + \alpha_2)\circ t\big) + 1 = (t+1)\circ(\alpha_1 t + \alpha_2 + 1)\,.$$

Da (17) discende la relazione

$$(18) \qquad \alpha_1(\alpha_2\alpha_1)^{S^{-1}} + \alpha_1(\alpha_1^{-1})^{DS^{-1}} = \alpha_2^{S^{-1}} + \alpha_1^{S^{-1}} + \alpha_1 + \alpha_1^{DS^{-1}}$$

la quale, con semplici passaggi, diviene

$$(19) \qquad \alpha_1^S\alpha_2 + \alpha_1^D = \alpha_2\alpha_1 + \alpha_1^2 + \alpha_1^S\alpha_1 + \alpha_1^D\alpha_1\,.$$

Poichè $\alpha_1 t + \alpha_2 + 1$ ed $(\alpha_1 + 1)t + \alpha_2$ stanno in K'^B e $0 \neq \alpha_1 + 1 \neq 1$, sussistono anche le relazioni (19)′ e (19)″ ottenute sostituendo in (19) rispettivamente $\alpha_2 + 1$ ad α_2 ed $\alpha_1 + 1$ ad α_1. Dalla somma di (19) e (19)′ segue $\alpha_1^S = \alpha_1$, dalla somma di (19) e (19)″, $\alpha_1^D = 0$. L'ulteriore relazione, oltre a (18), ottenibile da (17) diviene allora

$$(20) \qquad \alpha_2\alpha_2^S + \alpha_2 + 1 + \alpha_2^{S^{-1}D} = \alpha_2^{S^{-1}}\alpha_1 + \alpha_1^2 + \alpha_2^{S^{-1}D}\alpha_1\,.$$

Deve sussistere anche la relazione (20)′ ottenuta sostituendo in (20) $\alpha_1 + 1$ ad α_1. La somma di (20) e (20)′ è

$$(21) \qquad \alpha_2^{S^{-1}} + 1 + \alpha_2^{S^{-1}D} = 0\,.$$

D'altra parte vale anche la relazione (21)′ ottenuta sostituendo in (21) $\alpha_2 + 1$ ad α_2. Sommando (21) e (21)′ risulta $1 = 0$, assurdo.

Dal Teorema 2 discende che un q.c.g. di Hall (di ordine maggiore di 4) è un q.c. di Hall se e solo se ha dimensione due sul nucleo. Si verifica inoltre che, eccetto $H(GF(2), I, O, 1, 1)$ ed $H(GF(3), I, O, 0, -1)$, i quali sono rispettivamente il campo di ordine 4 ed il q.c. associativo di ordine 9, un q.c.g. di Hall non è nè distributivo, nè associativo.

3. Nel piano $M(H)$ con $|H| \geqslant 9$ ogni collineazione fissa l'_∞. Si verifica infatti senza difficoltà che in caso contrario $M(H)$ risulterebbe un piano di Moufang e quindi H un anello alternativo a divisione. Resta aperta la questione se ogni collineazione di $M(H)$ muti o meno in sè Δ', ossia se il gruppo delle collineazioni di $M(H)$ coincida o meno con il gruppo ereditato per derivazione da $D(F)$. Qui rispondiamo a tale questione per i q.c. di Hall (classici).

TEOREMA 3. *Sia $H = H(K, S, D, \omega, \varphi)$ un q.c.g. di Hall. Se K è un campo, $S = I$, $D = O$ ed $|H| > 9$, ogni collineazione del piano $M(H)$ muta in sè Δ'.*

DIMOSTRAZIONE. Nelle ipotesi assunte K' risulta il nucleo di H ed è lecito identificare K' con K. È inoltre lecito supporre $|H| > 25$, poichè il teorema vale se H ha ordine finito (vedi, ad esempio, [9], Theorem 10.18).

Come osservato in precedenza ogni collineazione di $M(H)$ fissa l'_∞. Esista una collineazione f di $M(H)$ tale che $\Delta'^f \neq \Delta$ e, com'è lecito assumere, $(0, 0)^f = (0, 0)$. Sia $\mathcal{F}$ la congruenza di $H \oplus H$, riguardato come spazio vettoriale (destro) $V(K)$ di dimensione 4 su K, associata ad $\overline{M}(H)$. Com'è noto, se si riguardano i punti di $\overline{M}(H)$ come vettori di $V(K)$, la collineazione f risulta una trasformazione semilineare di $V(K)$ (che muta in sè $\mathcal{F}$) ed opera quindi nel modo seguente

$$f\colon\ (\nu_1 t + \nu_2, \nu_3 t + \nu_4) \mapsto \left(\left(\sum_{j=1}^{4} \alpha_{1j}\nu_j^A\right)t + \sum_{j=1}^{4} \alpha_{2j}\nu_j^A, \left(\sum_{j=1}^{4} \alpha_{3j}\nu_j^A\right)t + \sum_{j=1}^{4} \alpha_{4j}\nu_j^A\right)$$

con (α_{ij}) $(i, j = 1, 2, 3, 4)$ matrice non singolare ad elementi in K ed $A \in \operatorname{Aut}(K)$.

Poniamo $\Delta'_0 = \{(1, \alpha), (0, 1)\colon \alpha \in K\}$. Si ha

$$\begin{aligned}\Delta_0'^f = \big\{\big((\alpha_{12} + \alpha_{14}\alpha^A)t + \alpha_{22} + \alpha_{24}\alpha^A, (\alpha_{32} + \alpha_{34}\alpha^A)t + \alpha_{42} + \alpha_{44}\alpha^A\big);\\ (\alpha_{14}t + \alpha_{24}, \alpha_{34}t + \alpha_{44})\colon \alpha \in K\big\} =\\ = \big\{\big((\alpha_{12} + \alpha_{14}\alpha)t + \alpha_{22} + \alpha_{24}\alpha, (\alpha_{32} + \alpha_{34}\alpha)t + \alpha_{42} + \alpha_{44}\alpha\big);\\ (\alpha_{14}t + \alpha_{24}, \alpha_{34}t + \alpha_{44})\colon \alpha \in K\big\}\,.\end{aligned}$$

Rispetto all'originario sistema Σ di coordinate di $\overline{M}(H)$ risulta

$$\Delta_0'^f = \{((\alpha_{12} + \alpha_{14}\alpha)t + \alpha_{32} + \alpha_{34}\alpha, (\alpha_{22} + \alpha_{24}\alpha)t + \alpha_{42} + \alpha_{44}\alpha); \\ (\alpha_{14}t + \alpha_{34}, \alpha_{24}t + \alpha_{44}) \colon \alpha \in K\}$$

e posto

$$b_{11} = \alpha_{12}t + \alpha_{32}\ ,\quad b_{12} = \alpha_{14}t + \alpha_{34}\ ,\quad b_{21} = \alpha_{22}t + \alpha_{42}\ ,\quad b_{22} = \alpha_{24}t + \alpha_{44}\ ,$$
$$\Delta_0'^f = \{(b_{11} + b_{12}\alpha, b_{21} + b_{22}\alpha); (b_{12}, b_{22}) \colon \alpha \in K\}\ .$$

Introduciamo in $D(F)$ coordinate omogenee. Allora l'insieme dei punti impropri delle rette di $D(F)$ uscenti da $(0, 0)$ e passanti per un punto di $\Delta_0'^f$ (riguardato come insieme di punti di $D(F)$) è

$$\tilde{\Delta} = \{(b_{11} + b_{12}\alpha, b_{21} + b_{22}\alpha, 0); (b_{12}, b_{22}, 0) \colon \alpha \in K\}\ .$$

È inoltre

$$\Delta = \{(\alpha, \beta, 0) \colon \alpha, \beta \in K; \alpha \neq 0 \text{ o } \beta \neq 0\}\ ;$$

Chiaramente $\tilde{\Delta}$ risulta il trasformato di Δ nella proiettività di $D(F)$

$$g\colon\ (x, y, z) \mapsto (b_{11}x + b_{12}y, b_{21}x + b_{22}y, z)\ .$$

Consideriamo la proiettività di $D(F)$

$$h\colon\ (x, y, z) \mapsto (x, ay, z)$$

con $a \in F - K$ tale che sia $\Delta^h \neq \Delta^g$.

È subito visto che risulta

$$|\Delta \cap \Delta^h| = 2\ .$$

Osserviamo che se p è una proiettività di $D(F)$ e $|\Delta \cap \Delta^p| > 2$, allora $\Delta = \Delta^p$. Infatti, fissati $A_1, A_2, A_3 \in \Delta$ con $A_3 \neq A_1 \neq A_2 \neq A_3$ e tali che $A_1^p, A_2^p, A_3^p \in \Delta \cap \Delta^p$, esiste una proiettività p_0 del sottopiano di Baer di $D(F)$ coordinatizzato da K che muta A_1, A_2, A_3 ordinatamente in A_1^p, A_2^p, A_3^p. Sia p_0' l'estensione di p_0 a $D(F)$ e siano $\overline{p}$ e $\overline{p}_0'$ le proiettività indotte su l_∞ rispettivamente da p e p_0'. Poichè F è un campo, il gruppo delle proiettività di l_∞ è strettamente 3-transitivo sui punti di l_∞ e quindi $\bar{p} = \bar{p}'_0$. Ciò prova l'affermazione iniziale. Ne segue

$$|\Delta^h \cap \Delta^g| \leqslant 2 .$$

Infatti da $|\Delta^h \cap \Delta^g| > 2$ segue $|\Delta \cap \Delta^{gh^{-1}}| > 2$ e quindi $\Delta = \Delta^{gh^{-1}}$, ossia $\Delta^h = \Delta^g$, contrariamente a quanto supposto. Di quanto fin qui mostrato faremo ora uso per giungere ad un assurdo.

Consideriamo i piani $\bar{M}_{\Delta'}(H)$ ed $\bar{M}_{\Delta''}(H)$ (si denota con $\bar{M}_{\Delta''}(H)$ il derivato affine di $M(H)$ mediante Δ'' e con $M_{\Delta''}(H)$ la sua estensione proiettiva), entrambi definiti sullo stesso insieme di punti di $\bar{M}(H)$. Chiaramente le classi di rette parallele che i piani $\bar{M}_{\Delta'}(H)$ ed $\bar{M}_{\Delta''}(H)$ hanno a comune sono tutte e sole le classi di $\bar{M}(H)$ il cui punto improprio non appartiene a $\Delta' \cup \Delta''$ o equivalentemente, per quanto visto in precedenza, tutte e sole le classi di rette parallele di $\bar{D}(F) = \bar{M}_{\Delta'}(H)$ il cui punto improprio non appartiene a $\Delta \cup \Delta^g$. Denoteremo con $\mathfrak{C}$ l'insieme di tali classi. Fissiamo in $\bar{D}(F)$ un riferimento (O, U, V, E) in modo tale che i punti U, V, $OE \cap l_\infty$ appartengano a $\Delta^h - (\Delta \cup \Delta^g)$ (poichè $|\Delta^h \cap (\Delta \cup \Delta^g)| \leqslant 4$, ciò è sempre possibile avendo supposto $|H| > 25$). Il piano $M_{\Delta''}(H)$ è isomorfo al piano $M_{\Delta'}(H)$ ([9], Theorem 10.5) e quindi anch'esso pappiano. Sia L un insieme di elementi in corrispondenza biunivoca con i punti distinti da V della retta OV. In entrambi i piani $D(F)$, $M_{\Delta''}(H)$ introduciamo un sistema di coordinate rispetto al riferimento (O, U, V, E), assumendo L come insieme sostegno sia del campo $L(+, \cdot)$ che coordinatizza $D(F)$, che del campo $L(\oplus, \odot)$ che coordinatizza $M_{\Delta''}(H)$. La semplice verifica (vedi anche [9], Theorem 10.18) mostra che:

i) le operazioni $+$ e $\oplus$ coincidono;

ii) ai punti impropri delle classi di $\mathfrak{C}$ è assegnato lo stesso simbolo sia nella coordinatizzazione di $D(F)$ che in quella di $M_{\Delta''}(H)$;

iii) denotato con C l'insieme dei simboli di L associati ai punti impropri delle classi di $\mathfrak{C}$, risulta $c \odot x = c \cdot x$ per ogni $x \in L$ se e solo se $c \in C$.

Da i) ed iii) discende facilmente che C risulta un sottoanello di $L(+, \cdot)$. D'altra parte, per come è stato scelto il riferimento (O, U, V, E) e poichè Δ^h è un insieme di derivazione per $D(F)$ su l_∞, è subito visto che $L(+, \cdot)$ possiede anche il sottocampo M costituito da tutti e soli i simboli di L associati ai punti di Δ^h. $M \cap C$ è un sottoanello proprio di M poichè $|\Delta \cap \Delta^h| = 2$ e, d'altra parte $|M - (M \cap C)| \leqslant 4$ poichè $|\Delta^h \cap (\Delta \cup \Delta^g)| \leqslant 4$. Ciò è assurdo se $|M| > 4$, ossia se $|H| > 16$.

4. Siano $H = H(K, S, D, \omega, \varphi)$ ed $\bar{H} = H(\bar{H}, \bar{S}, \bar{D}, \bar{\omega}, \bar{\varphi})$ due q.c.g. di Hall. Nel seguito i simboli $\bar{F}$, $\bar{\Delta}$, $\bar{\Delta}'$ avranno in relazione al q.c. $\bar{H}$ lo stesso significato fin qui attribuito ai simboli F, Δ, Δ' in relazione al q.c. H. Vale il seguente teorema.

TEOREMA 4. *Se esiste un isomorfismo fra i corpi F ed $\bar{F}$ che muta K in $\bar{K}$, i piani $M(H)$ ed $M(\bar{H})$ sono isomorfi.*

DIMOSTRAZIONE. Nelle ipotesi assunte esiste fra i piani $D(F)$ e $D(\bar{F})$ un isomorfismo che muta Δ in $\bar{\Delta}$. Esiste allora anche un isomorfismo fra i piani derivati $D_\Delta(F)$ e $D_{\bar{\Delta}}(F)$ ed il teorema è provato.

Il Teorema 4 è probabilmente invertibile. Noi proveremo ciò con un'ipotesi aggiuntiva.

TEOREMA 5. *Siano i piani $M(H)$ ed $M(\bar{H})$ isomorfi e sia Δ' fissato da ogni collineazione di $M(H)$ allora esiste un isomorfismo fra i corpi F ed $\bar{F}$ che muta K in $\bar{K}$.*

DIMOSTRAZIONE. Dall'ipotesi che ogni collineazione di $M(H)$ fissi Δ' segue $|H| > 9$ ([6], App. 2). Assumiamo, com'è lecito, che $\bar{H}$ coordinatizzi il piano $M(H)$ rispetto al riferimento $(\bar{O}', \bar{U}', \bar{V}', \bar{E}')$. È $\bar{U}'\bar{V}' = l'_\infty$ poichè $M(H)$ non può risultare di traslazione rispetto a due rette distinte. Come facilmente si verifica sia il gruppo di collineazioni di $M(H)$ ereditato per derivazione da $D(F)$ che il gruppo di collineazioni di $M(H)$ ereditato per derivazione da $D(\bar{F})$ ripartiscono i punti di l'_∞ in due orbite, precisamente Δ', $l'_\infty - \Delta'$ e $\bar{\Delta}'$, $l'_\infty - \bar{\Delta}'$. Poichè le collineazioni di $M(H)$ fissano Δ' è $\bar{\Delta}' = \Delta'$ o $\bar{\Delta}' = l'_\infty - \Delta'$. Nel secondo caso risulta $\Delta' \cap \bar{\Delta}' = \emptyset$ e quindi $\bar{\Delta}'$ è un insieme di derivazione per $D(F)$ su l_∞. Sia $\hat{\Delta}$ un insieme di derivazione per $D(F)$ su l_∞ tale che $|\Delta \cap \hat{\Delta}| = 1$ (un siffatto $\hat{\Delta}$ è ottenibile trasformando Δ mediante una opportuna collineazione), $(\hat{O}, \hat{U}, \hat{V}, \hat{E})$ un riferimento di $D(F)$ tale che $\hat{U}$, $\hat{V}$, $\hat{O}\hat{E} \cap l_\infty \in \hat{\Delta} \cap \bar{\Delta}'$ ed $\hat{F}$ il corpo che coordinatizza $D(F)$ rispetto a tale riferimento. $\hat{F}$ possiede i sottocorpi $\hat{K}$ e $\hat{K}_1$ che coordinatizzano, rispetto al riferimento $(\hat{O}, \hat{U}, \hat{V}, \hat{E})$, i sottopiani di Baer contenenti rispettivamente $\hat{O}$, $\hat{E}$, $\hat{\Delta}$ ed $\hat{O}$, $\hat{E}$, $\bar{\Delta}'$. Poichè $\bar{\Delta}' = l_\infty - \Delta$ risulta $|\hat{\Delta} - \bar{\Delta}'| = 1$ e quindi $|\hat{K} - \hat{K}_1 \cap \hat{K}| = 1$, un assurdo. Pertanto è $\Delta' = \bar{\Delta}'$. Allora, tenuto anche conto della dimostrazione del Teorema 1, è subito visto che:

1) $D(F) = D(\bar{F}) = \mathfrak{D}$;

2) i corpi F ed $\bar{F}$ coordinatizzano $\mathfrak{D}$ rispetto a due riferimenti (O, U, V, E), $(\bar{O}, \bar{U}, \bar{V}, \bar{E})$ con $UV = \bar{U}\bar{V}$ ed $U, V, OE \cap \cap UV$, $\bar{U}, \bar{V}, \bar{O}\bar{E} \cap \bar{U}\bar{V}$ appartenenti allo stesso insieme di derivazione Δ su UV per $\mathfrak{D}$;

3) i sottocorpi K di F e $\bar{K}$ di $\bar{F}$ coordinatizzano rispettivamente il sottopiano di Baer di $\mathfrak{D}$ contenente O, E, Δ ed il sottopiano di Baer di $\mathfrak{D}$ contenente $\bar{O}$, $\bar{E}$, Δ.

Si verifica senza difficoltà che esiste una collineazione di $\mathfrak{D}$ che muta la quaterna (O, U, V, E) ordinatamente nella quaterna $(\bar{O}, \bar{U}, \bar{V}, \bar{E})$ e l'insieme Δ in sè e pertanto muta il sottopiano di Baer contenente O, E, Δ nel sottopiano di Baer contenente $\bar{O}, \bar{E}, \Delta$. Tale collineazione induce un isomorfismo fra i corpi F ed $\bar{F}$ che trasforma K in $\bar{K}$ ed il teorema è provato.

BIBLIOGRAFIA

[1] A. A. Albert, *The finite planes of Ostrom*, Bol. Soc. Mat. Mexicana, (2), **11** (1966), pp. 1-13.

[2] M. Biliotti, *Su una generalizzazione di Dembowski dei piani di Hughes*, Boll. Un. Mat. Ital. (5), **16**-B (1979), pp. 674-693.

[3] J. Cofman, *The validity of certain configuration-theorems in the Hall planes of order p^{2n}*, Rend. Mat. e Appl., (5), **23** (1964), pp. 22-27.

[4] P. M. Cohn, *Quadratic extensions of skew fields*, Proc. London Math. Soc., (3), **11** (1961), pp. 531-556.

[5] P. M. Cohn, *Free rings and their relations*, Acad. Press, London - New York, 1971.

[6] M. Hall, *Projective planes*, Trans. Amer. Math. Soc., **54** (1943), pp. 229-277.

[7] A. Herzer, *Die gruppe $\pi(g)$ in den endlichen Hall-Ebenen*, Geometria Dedicata, **2** (1973), pp. 1-11.

[8] D. R. Hughes, *Collineations groups of non desarguesian planes, I*, Amer. J. Math., **81** (1959), pp. 921-938.

[9] D. R. Hughes - F. C. Piper, *Projective planes*, Springer-Verlag, New York - Heidelberg - Berlin, 1973.

[10] N. L. Johnson, *Derivation in infinite planes*, Pacific J. Math., **43** (1972), pp. 387-402.

[11] N. L. Johnson, *A note on generalized Hall planes*, Bull. Austral. Math. Soc., **8** (1973), pp. 151-153.

[12] P. B. Kirkpatrik, *A characterisation of the Hall planes of odd order*, Bull. Austral. Math. Soc., **6** (1972), pp. 407-415.

[13] G. Korchmaros, *Ovali nei piani di Hall di ordine dispari*, Atti Acc. Naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur., (8), **56** (1974), pp. 315-317.
[14] G. Menichetti, *Quasicorpi, di dimensione 2 sopra un campo K, associati a trasformazioni quadratiche nel piano affine* $\mathfrak{U}(K)$, Le Matematiche, **25** (1970), pp. 117-148.
[15] G. Menichetti, *q-archi completi nei piani di Hall di ordine $q = 2^k$*, Atti Acc. Naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur., (8), **56** (1974), pp. 518-525.
[16] G. Panella, *Isomorfismo fra piani di traslazione di Marshall Hall*, Ann. Mat. Pura Appl., (4), **47** (1959), pp. 169-180.
[17] G. Panella, *Le collineazioni nei piani di Marshall Hall*, Riv. Mat. Univ. Parma, (2), **1** (1960), pp. 171-184.
[18] G. Panella, *Una classe di fibrazioni di uno spazio proiettivo*, Atti Acc. Naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur., (8), **42** (1967), pp. 611-615.
[19] G. Pickert, *Die cartesischen Gruppen der Ostrom-Rosati-Ebenen*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, **30** (1967), pp. 106-117.
[20] G. Pickert, *Projective Ebenen*, Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York, 1975.
[21] T. G. Room, *Geometric axioms for the Hall plane*, J. London Math. Soc., (2), **6** (1973), pp. 351-357.
[22] J. D. Swift, *Chains and graphs of Ostrom planes*, Pacific J. Math., **14** (1964), pp. 353-362.

Manoscritto pervenuto in redazione il 25 maggio 1979.