

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

ANDREA CARANTI

Proiettività dei p -gruppi di classe massimale

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 61 (1979), p. 393-404

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1979__61__393_0>

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

Proiettività dei p -gruppi di classe massimale.

ANDREA CARANTI (*)

Tutti i gruppi considerati saranno *p-gruppi finiti*. Le notazioni saranno quelle di [3]. In più, si useranno

$A \setminus B$ per la differenza degli insiemi A e B ,

$H < \cdot G$, per indicare che H è sottogruppo massimo di G .

Un p -gruppo nonabeliano G si dice *di classe massimale* se ha la massima classe (di nilpotenza) compatibile con il suo ordine, ovvero se ha ordine p^n , $n \geq 3$, e classe $n - 1$. Il lavoro di Blackburn [2] è di importanza fondamentale per la teoria dei p -gruppi di classe massimale; come riferimento assumeremo [3], III.14. Per le nozioni di teoria dei reticoli di sottogruppi, si rimanda a [6].

Dato il p -gruppo G , con

$$\begin{aligned} G_2 &= [G, G], \\ G_{i+1} &= [G_i, G], \quad i \geq 2, \end{aligned}$$

indichiamo i termini, diversi da G , della sua serie centrale discendente. Se G ha classe massimale e ordine p^n , si ha $|G:G_i| = p^i$ per ogni $2 < i < n$, e G_i è l'unico sottogruppo normale d'indice p^i di G , per $2 < i < n$; in particolare $G_i = Z_{n-i}(G)$, per $2 < i < n$. Inoltre G ha esattamente $p + 1$ sottogruppi massimi ([3], III.14.2).

In questo lavoro si studiano le proiettività dei p -gruppi di classe massimale, ovvero gli isomorfismi fra il reticolo dei sottogruppi di un

(*) Indirizzo dell'Autore: Dipartimento di Matematica, Libera Università di Trento - 38050 Povo (Trento).

Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.S.A.G.A. del C.N.R.

p -gruppo di classe massimale e quello di un altro gruppo. I 2-gruppi di classe massimale sono quaternionici generalizzati, diedrali o quasi-diedrali ([3], III.11.9 (b)): è facile vedere che ciascuno di questi gruppi è invariante per proiettività. Ci limiteremo pertanto, d'ora in poi, a p -gruppi relativi a primi p dispari.

I p -gruppi di classe massimale non formano una classe reticolare: infatti il p -gruppo nonabeliano D d'ordine p^3 ed esponente p^2 è proiettivo al p -gruppo abeliano di tipo $(2, 1)$. Nel teorema 6 si mostra come una opportuna sottoclasse dei p -gruppi di classe massimale sia proiettivamente chiusa. Ciò permette di concludere in generale che se $\varphi: G \rightarrow G^\varphi$ è una proiettività, ove G è un p -gruppo di classe massimale mentre G^φ non lo è, allora $\text{cl}(G^\varphi) = \text{cl}(G) - 1$ (proposizione 7). Successivamente, dopo le proposizioni preparatorie 8, 10, 11, si perviene nel teorema 12 alla caratterizzazione dei p -gruppi di classe massimale che hanno immagini proiettive che non sono di classe massimale. Informazioni sull'identificazione dei sottogruppi modulari dei p -gruppi di classe massimale sono forniti dalla proposizione 4 e dal lemma 5.

1. LEMMA. *Se un p -gruppo di classe massimale ha un quoziente G/N isomorfo a D , allora $N = 1$.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $|G| \geq p^4$ e $N \triangleleft G$ tale che $G/N \cong D$; allora deve essere $N \geq G_4$, ma G/G_4 (si veda la lista III.12.6 di [3]) non contiene alcun $N/G_4 \triangleleft G/G_4$ tale che $D \cong (G/G_4)/(N/G_4) \cong G/N$.

È noto che un p -gruppo G , di ordine almeno p^3 , è di classe massimale se e solo se c'è $s \in G$ con $|C_G(s)| = p^2$ ([3], III. 14.23). Dalla dimostrazione della sufficienza della condizione ci interessa isolare il seguente facile

2. LEMMA. *Sia G un p -gruppo di classe massimale e ordine p^n . Sia $s \in G$ per cui $|C_G(s)| = p^2$. Allora per ogni $2 \leq i \leq n$ si ha $|C_{G_i}(sG_i)| = p^2$.*

Se uno almeno degli $s \in G$ per cui $|C_G(s)| = p^2$ ha ordine p si hanno i risultati positivi, relativi a sottogruppi modulari e proiettività di G , contenuti rispettivamente nella proposizione 4 e nel teorema 6. La situazione dei sottogruppi modulari nel caso generale è descritta nel lemma 5.

3. LEMMA. *Sia G un p -gruppo di classe massimale, $s \in G$ per cui $|C_G(s)| = p^2$. Se $\langle s \rangle$ è modulare in G , allora G è isomorfo a D .*

DIMOSTRAZIONE. Sia G un minimo controesempio: è chiaro che $|G| \geq p^4$. $\langle s \rangle Z(G)/Z(G)$ è modulare in $G/Z(G)$; per il lemma 2 è dunque $G/Z(G) \cong D$, contro il lemma 1.

4. PROPOSIZIONE. *Sia G un p -gruppo di classe massimale, e vi sia $s \in G$ d'ordine p per cui $|C_G(s)| = p^2$. Allora, se G non è isomorfo a D , i sottogruppi modulari di G sono tutti e soli i sottogruppi normali.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $Q \neq 1$, Q modulare in G . Per il lemma 3, $Q \neq \langle s \rangle$. Affermo che $Z(G) \leq Q$, dopodichè la proposizione si ottiene per induzione.

Difatti, $Q \leq Q \langle s \rangle$, poichè $|Q \langle s \rangle : Q| \leq p$. Dunque $H = Z(Q \langle s \rangle) \cap Q \neq 1$. Se $s \in H$, allora $Q \leq C_G(s)$, e si ha o $Q = Z(G)$, come richiesto; o Q è coniugato a $\langle s \rangle$, e $\langle s \rangle$ è modulare in G , contro il lemma 3; o $Q = C_G(s)$, e dunque $\langle s \rangle Z(G)/Z(G)$ è modulare in $G/Z(G)$: ma allora per il lemma 3 $G/Z(G) \cong D$, e per il lemma 1 $Z(G) = 1$, assurdo. Se $s \notin H$, si ha $C_{Q \langle s \rangle}(s) \geq \langle s \rangle H$, per cui $C_{Q \langle s \rangle}(s) = C_G(s) \geq Z(G)$. Se per assurdo $Z(G) \not\leq Q$, si ottiene $C_G(s) = HZ(G) < Z(Q \langle s \rangle)$. Dunque $Q < C_G(s)$, e si conclude come nel caso precedente.

5. LEMMA. *Sia G un p -gruppo di classe massimale, Q un sottogruppo modulare di G . Allora c'è l'alternativa:*

(i) $Q \geq Z(G)$, e Q è normale in G , oppure

(ii) $Q \not\geq Z(G)$, e allora Q non è normale in G , ma $Q \times Z(G) \leq G$, e Q è elementare abeliano.

DIMOSTRAZIONE. Per i lemmi 1 e 2, e per la proposizione 4, i soli sottogruppi modulari di $G/Z(G)$ sono quelli normali. Allora è chiaro (i), e che sia $Q \times Z(G) \leq G$ in (ii). $Z(G)$ è l'unico sottogruppo normale minimo di G , dunque nel caso (ii) Q non può contenere alcun sottogruppo normale non banale,

$$\bigcap_{x \in G} Q^x = 1.$$

Ora, se Q^x è un coniugato di Q distinto da Q , tenendo conto che $QZ(G) \leq G$ si ha

$$|Q : Q \cap Q^x| = |QQ^x : Q| = |QZ(G) : Q| = p,$$

dunque $Q \cap Q^x < \cdot Q$, e $\Phi(Q) < \bigcap_{x \in G} Q^x = 1$.

6. **TEOREMA.** *Sia G un p -gruppo di classe massimale non isomorfo a D , e vi sia $s \in G$ di ordine p per cui $|C_G(s)| = p^2$. Sia $\varphi: G \rightarrow G^\varphi$ una proiettività. Allora G^φ è ancora un p -gruppo di classe massimale, e $(G_i)^\varphi = (G^\varphi)_i$, per $2 < i \leq n$.*

DIMOSTRAZIONE. Sia G il minimo controesempio. Dalla proposizione 4 si ha $Z(G)^\varphi \triangleleft G^\varphi$. Per il lemma 1, $G/Z(G)$ non è isomorfo a D , sicchè la considerazione della proiettività indotta da φ fra $G/Z(G)$ e $G^\varphi/Z(G)^\varphi$ implica che $G^\varphi/Z(G)^\varphi$ è un p -gruppo di classe massimale. Per la proposizione 4, $Z(G/Z(G))^\varphi = Z(G^\varphi/Z(G)^\varphi)$, e dunque $Z(G^\varphi) = Z_2(G)^\varphi$. Allora $Z_2(G)$ è ciclico, altrimenti G avrebbe $p + 1$ sottogruppi minimi modulari contro la proposizione 4, e $Z_2(G)\langle s \rangle$ è isomorfo a D . Se $Z_2(G)\langle s \rangle$ non è massimo in G , sia $Z_2(G)\langle s \rangle < M < G$. Per la minimalità di G , M^φ è di classe massimale, ma $|Z(M^\varphi)| \geq |Z(G^\varphi)| = p^2$, un assurdo. Allora $Z_2(G)\langle s \rangle < G$, ma allora $Z_2(G)$ e $\Omega_1(Z_2(G)\langle s \rangle)$ sono due sottogruppi normali distinti dello stesso ordine p^2 in G , ancora un assurdo.

Se tutti gli $s \in G$ per cui $|C_G(s)| = p^2$ hanno ordine p^2 , i risultati della proposizione 4 e del teorema 6 non valgono più, come si vede facilmente su esempi d'ordine p^4 . La proposizione seguente comincia a fornire un controllo sulla classe dell'immagine proiettiva di un p -gruppo di classe massimale.

7. **PROPOSIZIONE.** *Sia G un p -gruppo di classe massimale e ordine p^n , $\varphi: G \rightarrow G^\varphi$ una proiettività di G sul gruppo G^φ che non sia di classe massimale. Allora $\text{cl}(G^\varphi) = \text{cl}(G) - 1$, e $Z_i(G^\varphi) = Z_{i+1}(G)^\varphi$, per $1 < i \leq n - 2$.*

DIMOSTRAZIONE. Si ha intanto $Z(G)^\varphi \triangleleft G^\varphi$, per [5], theorem 2.2. Ora per i lemmi 1 e 2 $G/Z(G)$ soddisfa alle ipotesi del teorema 6. Dunque $G^\varphi/Z(G)^\varphi$ è di classe massimale. Se G^φ stesso non lo è, è chiaro che $Z_2(G)^\varphi = Z(G^\varphi)$, ed è facile ottenere tutte le conclusioni dell'enunciato.

Nel teorema 12 si otterrà la caratterizzazione dei p -gruppi di classe massimale che hanno immagini proiettive non di classe massimale. I risultati intermedi, contenuti nel lemma 8 e nelle proposizioni 10 e 11, preparano la strada all'effettuazione dei calcoli risolutivi, mostrando che un tale G è regolare, d'ordine al più p^2 , non eccezionale, ed ha un sottogruppo massimo d'esponente p .

8. **LEMMA.** *Sia G un p -gruppo di classe massimale, $\varphi: G \rightarrow G^\varphi$ una proiettività di G su G^φ , con $\text{cl}(G^\varphi) = \text{cl}(G) - 1$. Allora $\Omega_1(G)$ ha esponente p , ed è massimo in G .*

DIMOSTRAZIONE. Mostriamo intanto, mediante induzione su $|G|$, che l'asserto vale per $|G| < p^{p+1}$.

G è proiettivo a un p -gruppo regolare, ed è P_3 (secondo [4]). Se il lemma non vale, l'ipotesi induttiva ci dà $\Omega_1(G) = \Phi(G)$ e, per P_3 , $\bar{O}_1(G) = Z_2(G)$. Sia ora $u \in G$ per cui $u^p \in \bar{O}_1(G) \setminus Z(G)$, e $H = \langle u, \Phi(G) \rangle < G$. H è regolare, quindi

$$|\bar{O}_1(H)| = |H : \Omega_1(H)| = |H : \Omega_1(G)| = p,$$

e $\langle u^p \rangle = \bar{O}_1(H)$ è caratteristico in H , sicchè $\langle u^p \rangle < G$, un assurdo.

Adesso basta mostrare che non esiste un gruppo d'ordine p^{p+2} che soddisfi alle ipotesi del lemma. In tal caso il sottogruppo massimo G_1 , definito in [3], III.14.3, è regolare e $\Omega_1(G_1) = G_{(p+2)-p+1} = G_3$ ([3], III.14.16), mentre la prima parte della dimostrazione, applicata a un opportuno sottogruppo massimo di G , implica che G_2 ha esponeute p , un assurdo.

9. LEMMA. *Sia G un p -gruppo d'esponente p , $\varphi: G \rightarrow G^\varphi$ una proiettività di G sul p -gruppo G^φ . Allora*

- (i) G^φ è d'esponente p ,
- (ii) se $A, B \leq G$, allora $[A, B]^\varphi = [A^\varphi, B^\varphi]$, dunque
- (iii) φ conserva centralizzanti, normalizzanti, serie centrali ascendenti e discendenti.

DIMOSTRAZIONE. È in [1], § 1.

10. PROPOSIZIONE. *Sia G un p -gruppo di classe massimale, $\varphi: G \rightarrow G^\varphi$ una proiettività di G su G^φ , con $\text{cl}(G^\varphi) = \text{cl}(G) - 1$. Allora G non è eccezionale (Ausnahme, [3], III.14.5) e $G_1 = \Omega_1(G)$.*

DIMOSTRAZIONE. Procediamo per assurdo: sarà dunque $|G| = p^n > p^6$, per [3], III.14.6(b). $Z_2(G)$ è elementare abeliano, per il lemma 8; scriviamo $Z_2(G) = \langle m \rangle \times Z(G)$. Per la proposizione 7, $Z_2(G)^\varphi = Z(G^\varphi)$, dunque $\langle m \rangle$ è modulare in G . Per il lemma 9 $\Omega_1(G) = C_G(m) = C_G(Z_2(G))$. Per definizione di eccezionalità e per [3], III.14.6(b) $G_1 = C_G(Z_i(G)/Z_{i-2}(G))$, per $3 \leq i \leq n - 2$, è differente da $\Omega_1(G)$. Sia $e \in G$ per cui $\Omega_1(G) = \langle e, G_2 \rangle$. Per [3], III.14.6(a) $G/Z(G)$ è di classe massimale non eccezionale; dato che $(G/Z(G))_1 = G_1/Z(G)$, per [3], III.14.13 si ha

$$C_{G/Z(G)}(\langle e \rangle Z(G)/Z(G)) = \langle e \rangle Z_2(G)/Z(G),$$

sicchè $C_G(e) = \langle e \rangle Z_2(G)$. È chiaro che $C_{G^\varphi}(\langle e \rangle^\varphi) \leq \Omega_1(G)^\varphi$, e dunque per il lemma 9 $C_{G^\varphi}(\langle e \rangle^\varphi) = \langle e \rangle^\varphi Z(G)^\varphi$.

Ora la mappa

$$\gamma: Z_3(G) \rightarrow Z_2(G)$$

definita da

$$x \mapsto [e, x]$$

è un omomorfismo di nucleo $Z_2(G)$, sicchè $|\text{im } \gamma| = p$. Per l'eccezionalità di G , $\text{im } \gamma \neq Z(G)$. Possiamo inoltre precisare la scelta di m in modo che sia anche $\text{im } \gamma \neq \langle m \rangle$.

Affermo ora che $C_G(e) = N_G(\langle e, m \rangle)$. Intanto $N_G(\langle e, m \rangle) \leq \Omega_1(G)$, perchè se $y \in N_G(\langle e, m \rangle) \setminus \Omega_1(G)$ si ha $\langle e, y \rangle = G$, sicchè $G = \langle e, m \rangle \langle y \rangle$ ha ordine p^4 , un assurdo. Basta ora far vedere che $N_G(\langle e, m \rangle) \cap G_2 = Z_2(G)$. Altrimenti, sia $y \in Z_i(G) \setminus Z_{i-1}(G)$ per cui $1 \neq [e, y] \in \langle m \rangle$. Se $i > 3$, sarebbe $e \in C_G(Z_i(G)/Z_{i-2}(G))$, contro l'eccezionalità di G . Dunque $y \in Z_3(G)$, ma per la scelta di m è $[e, y] = \gamma(y) \notin \langle m \rangle$, un assurdo.

Anche in G^φ si vede che $N_{G^\varphi}(\langle e, m \rangle^\varphi) \leq \Omega_1(G)^\varphi$, e dunque per il lemma 9

$$N_{G^\varphi}(\langle e, m \rangle^\varphi) = C_{G^\varphi}(\langle e \rangle^\varphi) = \langle e \rangle^\varphi Z_2(G)^\varphi.$$

Nel quoziente $G^\varphi/\langle m \rangle^\varphi$ si ha che il sottogruppo, di ordine p , $\langle e, m \rangle^\varphi/\langle m \rangle^\varphi$ ha centralizzante

$$C_{G^\varphi/\langle m \rangle^\varphi}(\langle e, m \rangle^\varphi/\langle m \rangle^\varphi) = N_{G^\varphi/\langle m \rangle^\varphi}(\langle e, m \rangle^\varphi/\langle m \rangle^\varphi) = \langle e \rangle^\varphi Z_2(G)^\varphi/\langle m \rangle^\varphi$$

di ordine p^2 . Per il criterio già ricordato $G^\varphi/\langle m \rangle^\varphi$ è di classe massimale, e non eccezionale per [3], III.14.6(b). Esiste allora un $M^\varphi < \cdot G^\varphi$ definito da

$$\begin{aligned} M^\varphi/\langle m \rangle^\varphi &= (G^\varphi/\langle m \rangle^\varphi)_1 = C_{G^\varphi}(G_2^\varphi/G_4^\varphi)/\langle m \rangle^\varphi, \\ M^\varphi/Z(G)^\varphi &= (G^\varphi/Z(G)^\varphi)_1 = C_{G^\varphi}(G_2^\varphi/G_4^\varphi)/Z(G)^\varphi, \end{aligned}$$

per cui valgono le relazioni di non eccezionalità

$$\begin{aligned} [M^\varphi, Z_3(G)^\varphi] &\leq \langle m \rangle^\varphi, \\ [M^\varphi, Z_3(G)^\varphi] &\leq Z(G)^\varphi, \end{aligned}$$

che implicano $[M^\varphi, Z_3(G)^\varphi] = 1$. In particolare $[G_2^\varphi, Z_3(G)^\varphi] = 1$ e, per il lemma 9, $[G_2, Z_3(G)] = 1$. Ora si ha

$$Z(G) \neq \text{im } \gamma = [\langle e \rangle, Z_3(G)] = [\langle e \rangle G_2, Z_3(G)] = [\Omega_1(G), Z_3(G)] \triangleleft G,$$

e questo assurdo conclude la dimostrazione.

11. PROPOSIZIONE. *Sia G un p -gruppo di classe massimale, $\varphi: G \rightarrow G^\varphi$ una proiettività di G su G^φ , con $\text{cl}(G^\varphi) = \text{cl}(G) - 1$. Allora G è regolare e quindi ([3], III.14.21) $|G| \leq p^2$.*

DIMOSTRAZIONE. È chiaro dalla dimostrazione del lemma 8 che un controesempio G può avere solamente ordine p^{2+1} . Si tratta ora di rileggere i calcoli della dimostrazione di [3], III.14.21, alla luce del lemma 8 e della proposizione 10. Con le notazioni di [3],

$$s^p = s^p s_1^p = (ss_1)^p s_p^{-1} [s_1, s, \dots, s, s_1]^b.$$

L'ultimo commutatore è $[s_{p-1}, s_1] = 1$, poichè $s_1 \in G_1 = C_G(Z_2(G)) = C_G(s_{p-1})$, e dunque $(ss_1)^p = s^p s_p$. Sia ora $s_p = s^{2u}$, per qualche intero u , e v per cui $uv \equiv -1 \pmod{p}$. Come in [3] la sostituzione di s_1 con s_1^v ci da

$$(ss_1^v)^p = s^p [s_1^v, s, \dots, s] = s^p [s_1, s, \dots, s]^v = s^p s_p^v = s^p s^{2uv} = 1,$$

mentre $ss_1^v \notin G_1 = \Omega_1(G)$, un assurdo.

12. TEOREMA. *Sia G un p -gruppo di classe massimale, $|G| = p^n$, $\varphi: G \rightarrow G^\varphi$ una proiettività di G su G^φ , con $\text{cl}(G^\varphi) = \text{cl}(G) - 1$. Allora G è metabeliano e $\Omega_1(G)' \leq Z(G)$. Inoltre*

(i) se $\Omega_1(G)$ è abeliano, G ha la presentazione $\langle s, s_1, s_2, \dots, s_{n-1} / s^p = s_{n-1}; s_i^p = 1, \text{ per } 1 \leq i \leq n-1; [s_i, s] = s_{i+1}, \text{ per } 1 \leq i \leq n-2; [s_i, s_j] = 1, \text{ per } 1 \leq i, j \leq n-1 \rangle$, ove $3 \leq n < p$;

(ii) se $\Omega_1(G)' = Z(G)$, G ha la presentazione $\langle s, s_1, s_2, \dots, s_{n-1} / s^p = s_{n-1}; s_i^p = 1, \text{ per } 1 \leq i \leq n-1; [s_i, s] = s_{i+1}, \text{ per } 1 \leq i \leq n-2; [s_2, s_1] = s_{n-1}^a, \text{ e } [s_i, s_j] = 1 \text{ per } \{i, j\} \neq \{1, 2\} \rangle$, ove $5 \leq n \leq p$, $a \not\equiv 0 \pmod{p}$.

Per G^φ si hanno nei due casi le seguenti presentazioni:

(i') $\langle t, t_1, t_2, \dots, t_{n-1} / t^p = t_{n-1}; t_i^p = 1, \text{ per } 1 \leq i \leq n-1; [t_i, t] = t_{i+1}, \text{ per } 1 \leq i \leq n-3; [t_{n-2}, t] = 1; [t_i, t_j] = 1, \text{ per } 1 \leq i, j \leq n-1 \rangle$, ove $3 \leq n < p$;

(ii') $\langle t, t_1, t_2, \dots, t_{n-1}/t^p = t_{n-1}; t_i^p = 1, \text{ per } 1 \leq i \leq n-1; [t_i, t] = t_{i+1}, \text{ per } 1 \leq i \leq n-3; [t_{n-2}, t] = 1; [t_2, t_1] = t_{n-1}^b; [t_i, t_j] = 1 \text{ per } \{i, j\} \neq \{1, 2\} \rangle$, ove $5 < n \leq p, b \not\equiv 0 \pmod{p}$.

Viceversa, la mappa

$$s^i s_1^{i_1} \dots s_{n-2}^{i_{n-2}} \mapsto t^i t_1^{i_1} \dots t_{n-2}^{i_{n-2}}$$

induce una proiettività fra i gruppi in (i) e (i'); la mappa

$$s^i s_1^{i_1} \dots s_{n-2}^{i_{n-2}} \mapsto t^i t_1^{i_1 a^c} \dots t_{n-2}^{i_{n-2}},$$

ove $bc \equiv 1 \pmod{p}$, induce una proiettività fra i gruppi in (ii) e (ii').

DIMOSTRAZIONE. L'ultima parte si vede agevolmente, con l'aiuto di un adattamento al caso di proiettività qualsiasi del lemma 1 di [1].

Veniamo allora alla parte diretta della dimostrazione. Nel seguito adotteremo le notazioni di [3], III.14.8, tenendo conto della proposizione 10. Dalla proposizione 11 si ha $n \leq p$.

Per il lemma 8, $\Omega_1(G) < \cdot G$. Se $\Omega_1(G)$ è abeliano, la presentazione (i) discende allora facilmente da [3], III. 14.8. G è dunque estensione non spezzante del $GF(p)$ -spazio vettoriale $(n-1)$ -dimensionale $\Omega_1(G)$ mediante un automorfismo d'ordine p che ha per matrice \bar{s} nella base degli s_i un blocco di Jordan unipotente. Nella proposizione 7 si è visto che $G^\varphi/Z(G)^\varphi$ è di classe massimale, e dunque si presenta come (i). La considerazione della forma canonica di Jordan per la matrice \bar{t} di t su $\Omega_1(G)^\varphi$, ove $t \in \langle s \rangle^\varphi$, conduce alla (i').

Analizziamo il caso in cui G_2 è abeliano, ma $\Omega_1(G)$ non è abeliano. $\langle G_2, s \rangle < \cdot G$ ricade sotto (i), dunque s ha matrice \bar{s} come prima sul $GF(p)$ -spazio vettoriale G_2 , nella base degli s_i . Esaminiamo la rappresentazione fedele di G/G_2 su G_2 indotta dal coniugio. Per la proposizione 10, G non è eccezionale e $G_1 = \Omega_1(G)$, sicchè la matrice $\bar{s}_1 = [a_{ij}]$ di s_1 nella base degli s_i è sottotriangolare, unipotente e $a_{i+1,i} = 0$ per ogni i . Nell'eguaglianza $\bar{s}_1 \bar{s} = \bar{s} \bar{s}_1$ la prima matrice ha elemento di posto (i, j) .

$$a_{ij} + a_{i,j+1},$$

mentre la seconda ha

$$a_{i-1,j} + a_{ij},$$

sicchè $a_{i-1,j} = a_{i,j+1} = a_{i-j}$. Per quanto riguarda la rappresentazione fedele per coniugio di G^φ/G_2^φ su G_2^φ , c'è una base di G_2^φ il cui ultimo vettore genera $Z(G)^\varphi$ e rispetto a cui un fissato $t \in \langle s \rangle^\varphi$ ha matrice \bar{t} come prima. $G^\varphi/Z(G)^\varphi$ è di classe massimale e non eccezionale, per il lemma 9, dunque $t_1 \in \langle s_1 \rangle$ ha matrice $\bar{t}_1 = [\alpha_{ij}]$ analoga a \bar{s}_1 . Confrontando l'ultima riga delle matrici ai due lati dell'eguaglianza $\bar{t}_1 \bar{t} = \bar{t} \bar{t}_1$ si ha

$$\alpha_{n-2,j} + \alpha_{n-2,j+1} = \alpha_{n-2,j}, \quad 1 \leq j \leq n-5,$$

ovvero

$$\alpha_{n-2,2} = \alpha_{n-2,3} = \dots = \alpha_{n-2,n-4} = 0.$$

Osserviamo ora che il sottospazio di G_2^φ generato dagli ultimi $n-3$ vettori della base scelta è $(n-3)$ -dimensionale, G^φ -invariante e contiene $Z(G)^\varphi$: per il lemma 5 coincide con G_3^φ . Pertanto l'annullarsi degli $\alpha_{n-2,j}$ fornisce

$$Z(G)^\varphi \not\leq [\langle t_1 \rangle, G_3^\varphi]$$

che per il lemma 9 implica

$$Z(G) \not\leq [\langle s_1 \rangle, G_3]$$

e dunque $a_3 = a_4 = \dots = a_{n-3} = 0$. Ponendo $a_{n-2} = a$ si ottiene (ii) Per (ii') ci occorre un raffinamento dell'osservazione appena fatta, che ci sarà utile anche in seguito. Cominciamo col notare che se P è un p -gruppo di classe massimale, $s \in P$ per cui $|C_P(s)| = p^2$ e $H < P_2$, $|P:H| = p^i$, è normalizzato da s , allora $H = P_i$. Difatti, procediamo per induzione su $|H|$, il caso $|H| = p$ essendo ovvio. Sia allora $|H| \geq p^2$, e si prenda $K < H$ normalizzato da s : per ipotesi induttiva $K = P_{i+1}$, ed è chiaro che $H/P_{i+1} = Z(P/P_{i+1}) = P_i/P_{i+1}$ per il lemma 2. La forma sotto cui useremo questo argomento è quella di

OSSERVAZIONE. Sia P un p -gruppo di classe massimale, $\varphi: P \rightarrow P^\varphi$ una proiettività, $s \in P$ per cui $|C_P(s)| = p^2$ e $Z(P) < H < P_2$, $|P:H| = p^i$, con H^φ normalizzato da $\langle s \rangle^\varphi$; allora $H = P_i$. Ciò segue dall'argomento precedente poichè $\langle s \rangle Z(P)/Z(P)$ normalizza $H/Z(P)$.

Ora per ottenere (ii'), dal caso (i') si trae che $t \in \langle s \rangle^\varphi$ ha matrice \bar{t} su G_2^φ come prima, rispetto a una base opportuna il cui ultimo vettore generi $Z(G)^\varphi$. Per l'osservazione il sottospazio di G_2^φ generato dagli

ultimi $n - 3$ vettori coincide con G_3 : ma per il lemma 9 le relazioni

$$[\langle s_1 \rangle, G_3] = 1, \quad [\langle s_1 \rangle, G_2] = Z(G)$$

implicano

$$[\langle s_1 \rangle^\varphi, G_2^\varphi] = 1, \quad [\langle s_1 \rangle^\varphi, G_3^\varphi] = Z(G)^\varphi,$$

ottenendo (ii'), per $t_1 \in \langle s_1 \rangle^\varphi$.

Resta ora da mostrare che un gruppo come nelle ipotesi del teorema è sempre metabeliano: sia d'ora in poi G un minimo controesempio. Allora G_3 è elementare abeliano e G/G_3 , che è isomorfo per il lemma 1 al gruppo non abeliano d'ordine p^3 ed esponente p , agisce fedelmente per coniugio su G_3 . $\langle G_2, s \rangle$ ricade sotto (ii), dunque s ha matrice \bar{s} su G_3 come in quel caso, nella base degli s_i , e s_2 ha matrice $\bar{s}_2 = 1 + aE_{n-3,1}$, ove $E_{n-3,1}$ è la matrice che ha 0 ovunque, e 1 al posto $(n-3, 1)$. Per la non eccezionalità di G , s_1 ha matrice $\bar{s}_1 = [b_{ij}]$ sottotriangolare, unipotente e $b_{i+1,i} = 0$. Dalla relazione di definizione di s_2 si ha $\bar{s}_1 \bar{s} = \bar{s} \bar{s}_1 \bar{s}_2$; la prima matrice ha elemento di posto (i, j)

$$b_{ij} + b_{i,j+1},$$

la seconda

$$\begin{aligned} b_{i-1,j} + b_{ij}, & \quad \text{se } (i, j) \neq (n-3, 1) \\ b_{n-4,1} + b_{n-3,1} + a, & \quad \text{se } i = n-3, j = 1. \end{aligned}$$

Dal confronto si ottiene

$$\begin{aligned} b_{i-1,j} &= b_{i,j+1} = b_{i-j}, & \text{per } 3 \leq i-j \leq n-5, \\ b_{n-4,1} &= b_2, & b_{n-3,2} = b_2 + a, \\ b_{n-3,1} &= b_1. \end{aligned}$$

Ora $G^\varphi/G_3^\varphi \cong G/G_3$ agisce fedelmente per coniugio su G_3 . Posso scegliere

$$t \in \langle s \rangle^\varphi, \quad t_1 \in \langle s_1 \rangle^\varphi, \quad t_2 \in \langle s_2 \rangle^\varphi$$

in modo che si abbia ancora fra gli automorfismi di G_3^φ associati $\bar{t}_1 \bar{t} = \bar{t}_1 \bar{t}_2$. In una opportuna base di G_3^φ , il cui ultimo vettore generi $Z(G)^\varphi$, \bar{t} si può porre nella forma vista in (i'), e \bar{t}_2 nella forma $1 + \alpha E_{n-3,1}$.

Per il lemma 9 e l'osservazione, $t_1 = [\beta_{ij}]$ è sottotriangolare, unipotente e $\beta_{i+1,i} = 0$. Ora nell'eguaglianza $\bar{t}_1 \bar{t} = \bar{t}_1 \bar{t}_2$ la prima matrice ha elemento di posto $(n-3, j)$

$$\beta_{n-3,j} + \beta_{n-3,j+1},$$

la seconda

$$\begin{aligned} \beta_{n-3,j}, & \quad \text{se } j > 1, \\ \beta_{n-3,1} + \alpha, & \quad \text{se } j = 1. \end{aligned}$$

Confrontando si ha

$$\beta_{n-3,3} = \dots = \beta_{n-3,n-5} = 0$$

ovvero, per l'osservazione,

$$Z(G)^\varphi \not\cong [\langle t_1 \rangle, G_5^\varphi]$$

e per il lemma 9

$$Z(G) \not\cong [\langle s_1 \rangle, G_5],$$

sicchè

$$b_3 = b_4 = \dots = b_{n-5} = 0.$$

I calcoli precedenti ci hanno fornito le seguenti relazioni in G , in aggiunta a quelle di definizione degli s_i ,

$$\begin{aligned} [s_3, s_2] &= s_{n-1}^a \\ [s_3, s_1] &= s_{n-2}^{b_2} s_{n-1}^{b_1} \\ [s_4, s_1] &= s_{n-1}^{b_2+a}, \end{aligned}$$

e $[s_i, s_j] = 1$ per gli altri valori di i, j . Utilizzando queste relazioni è adesso facile ottenere dall'identità di Witt

$$\begin{aligned} 1 &= [s_3, s, s_1]^{s^{-1}} [s^{-1}, s_1^{-1}, s_3]^{s_1} [s_1, s_3^{-1}, s^{-1}]^{s_3} = \\ &= s_{n-1}^{b_2+a} \quad s_{n-1}^a \quad s_{n-1}^{-b_2} = \\ &= s_{n-1}^{2a}, \end{aligned}$$

sicchè $2a \equiv 0 \pmod{p}$, e poichè p è dispari $a \equiv 0 \pmod{p}$, un assurdo.

BIBLIOGRAFIA

- [1] D. W. BARNES - G. E. WALL, *On normaliser preserving lattice isomorphisms between nilpotent groups*, J. Australian Math. Soc., **4** (1964), pp. 454-469,
- [2] N. BLACKBURN, *On a special class of p -groups*, Acta Math., **100** (1958), pp. 45-92.
- [3] B. HUPPERT, *Endliche Gruppen I*, Springer, Berlin, 1967.
- [4] A. MANN, *The power structure of p -groups I*, J. Algebra, **42** (1976), pp. 121-135.
- [5] R. SCHMIDT, *Normal subgroups and lattice isomorphisms of finite groups*, Proc. London Math. Soc. (3), **30** (1975), pp. 287-300.
- [6] M. SUZUKI, *Structure of a Group and the Structure of its Lattice of Subgroups*, Springer, Berlin, 1956.

Manoscritto pervenuto in redazione il 17 novembre 1978
e in forma revisionata il 2 marzo 1979.