RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

GIUSEPPE ZAMPIERI

Sistemi del tipo $(Pu = f, Qu = g)$ **non globalmente risolubili**

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 61 (1979), p. 325-329

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1979__61__325_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 61 (1979)

Sistemi del tipo $(Pu = f,\ Qu = g)$ non globalmente risolubili.

GIUSEPPE ZAMPIERI (*)

SUMMARY - In the following we present a class of systems of P.D.E. with constant coefficients which are not globally solvable for some compatible data (f, g). We'll make use of this result to give a theoric explanation for a M. Nacinovich's fine example.

1. Introduzione.

Nel seguito si userà il seguente teorema:

siano E ed F spazi di Fréchet e sia $f\colon E \to F$ un'applicazione lineare e continua; ${}^tf\colon F' \to E'$ sia la trasposta di f fra i duali forti.

TEOREMA. Le seguenti proposizioni a), b) e c) sono equivalenti:

a) f è suriettiva;

b) ${}^tf$ è iniettiva e ${}^tf(F')$ è chiuso in E';

c) per ogni seminorma continua p su E esiste una seminorma continua q su F tale che:

c_1) per ogni y in F esiste x in E tale che: $q(f(x) - y) = 0$;

c_2) se $y' \in F'$ e se ${}^tf(y') \in E'_p$, allora $y' \subset F'_q$.

(*) Indirizzo dell'A.: Seminario Matematico dell'Università - Via Belzon 7 - I-35100 Padova.

Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei Gruppi di Ricerca Matematica del C.N.R.

(E'_p è lo spazio dei funzionali lineari e continui su E rispetto alla seminorma continua p; analogamente per F'_q.)

SIMBOLI. $E(A)$ indicherà lo spazio delle funzioni indefinitamente differenziabili sull'aperto A di R^n; $E'(A)$ il suo duale.

2. In R^{n+1} la variabile si indicherà con (x, t), $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Sia A_0 un aperto in R^n e sia $A = A_0 \times R_t$ il cilindro aperto di R^{n+1} di base A_0. Sia $P = P(D_x)$ un operatore differenziale, a coefficienti costanti, in n variabili; sia $Q = Q(D) = D_t^k + P(D)$ un secondo operatore.

Si indicherà con D il sottospazio chiuso di $E(A)^2$ dei dati compatibili per P e Q, i.e. $D = \big((f, g)\colon Qf = Pg\big)$; D abbia la topologia di spazio di Fréchet ereditata da $E(A)^2$.

Si supponga che A_0 non sia P-convesso; i.e. esiste un aperto relativamente compatto, K, in A_0 tale che l'insieme delle h in $C_c^\infty(A_0)$ tali che ${}^tP(h)$ ha il supporto in K, non abbia supporto in un medesimo aperto relativamente compatto K' di A_0 $\big($qui ${}^tP = P(-D)\big)$.

TEOREMA 1. Esiste (f, g) in D tale che il sistema: $(Pu = f, Qu = g)$ non ha soluzione in $E(A)$.

DIMOSTRAZIONE. Si consideri l'applicazione: $(P, Q)\colon E(A) \to D$, definita da: $(P, Q)(u) = (Pu, Qu)$. L'applicazione è lineare e continua; poichè gli spazi in oggetto sono spazi di Fréchet, se essa fosse suriettiva $\big($ovvero se il sistema: $Pu = f$, $Qu = g$ fosse risolubile in $E(A)$ per ogni dato ammissibile$\big)$, applicando il teorema nell'introduzione si dovrebbe aver soddisfatta la condizione c_2).

Dimostriamo che ciò è impossibile.

Se $(h, h') \in E'(A)^2$ ed è ortogonale a D, deve essere: ${}^tPh + {}^tQh' = 0$, ovvero: ${}^tP(h + h') = -(-1)^k D_t^k h'$. Per il fatto che P e D_t sono primi fra di loro risulta:

$$h + h' = -(-1)^k D_t^k h_0$$

con h_0 distribuzione a supporto compatto in A, visto che una soluzione fondamentale dell'operatore D_t può esser scelta del tipo: $\delta \otimes h''$ con $D_t h'' = \delta_t$, e visto che A è un cilindro.

Allora è:

$$-(-1)^k\big({}^tP(D_t^k h_0)\big) + (-1)^k D_t^k h' + {}^tPh' = 0\,,$$

che dà: $h' = {}^tPh_0$, e quindi: $h = -{}^tQh_0$.

La proposizione in c_2) dimostra che: per ogni compatto K in A e per ogni n, numero naturale, esiste K_n, compatto in A, tale che: se $(h, h') \in E'(A)^2$, se ${}^tPh + {}^tQh'$ ha il suo supporto in K e se l'ordine di ${}^tPh + {}^tQh' \leqslant n$, allora esiste r in $E'(A)$ tale che:

$$\operatorname{supp}\big((h - {}^tQr), (h' + {}^tPr)\big) \subseteq K_n \times K_n ,$$

sempre che (P, Q) sia suriettiva su D.

Sia allora K_0 un compatto di A_0 e si consideri l'insieme delle funzioni g in $C_c^\infty(A_0)$ tali che:

$$\operatorname{supp}({}^tPg) \subseteq K_0 .$$

Se $z \in C_c^\infty(R_t)$ e se $\int z(t)\,dt = 1$, ovviamente:

$$\operatorname{supp}\big({}^tP(g \otimes z)\big) \subseteq K_0 \times L , \qquad \text{con } L = \operatorname{supp}(z) .$$

Allora: per ognuna delle g di sopra, dovrebbe esistere r in $E'(A)$, tale che:

$$\operatorname{supp}(g \otimes z - {}^tQr) \subseteq K_0' \quad \text{e} \quad \operatorname{supp}({}^tPr) \subseteq K_0' ,$$

con K_0' compatto in A dipendente esclusivamente da $K_0 \times L$.

Per ogni $h \in E'(R^{n+1})$ si consideri la distribuzione $\bar{h} \in E'(R^n)$ così definita:

$$\langle \bar{h}, f \rangle = \langle h, f \rangle .$$

È facile dimostrare che: $\bar{h} = 0$ se e solo se $h = D_t h'$ per qualche h' in $E'(R^{n+1})$. Si ha inoltre:

$$\overline{{}^tPh} = {}^tP\bar{h} \quad \text{e} \quad \overline{{}^tQh} = {}^tP\bar{h} ,$$

di facile verifica; come è facile verificare che:

$$\overline{g \otimes z} = g ,$$

per la particolare scelta di z.

Se $\bar{K}$ indica la proiezione di K_0' in R^n, per il fatto che supp $(\bar{h})$ è contenuto nella proiezione in R^n del supporto di h, la suriettività dell'applicazione (P, Q) implicherebbe che: per ogni g come sopra, i.e. tale che: supp $({}^tPg) \subseteq K_0$, esiste un compatto $\bar{K}$ in A_0, indipendente da g, tale che: $g - {}^tP(\bar{r})$ e ${}^tP(\bar{r})$ hanno il loro supporto in $\bar{K}$ con $\bar{r}$ in $E'(A_0)$; e questo per ogni compatto $K_0 \subset A_0$.

Ciò è assurdo poichè A_0 non è P-convesso.

Il teorema è concluso.

Viceversa è immediato dimostrare il seguente teorema:

Teorema 2. Se A è un cilindro a base P-convessa allora i sistemi del tipo $\big(Pu = f,\ (D_t^k + P)u = g\big)$ sono risolubili in $E(A)$ per ogni coppia di dati compatibili.

Osservazione. Comunque siano scelti gli operatori P e Q e l'aperto A, se il sistema $(Pu = f,\ Qu = g)$ non ha soluzioni in $E(A)$ per qualche dato compatibile, allora il medesimo sistema non è «*quasi mai*» risolubile, nel senso che l'insieme dei dati compatibili per il sistema per i quali il sistema non è risolubile costituisce, in D, un insieme di seconda categoria; ciò è conseguenza immediata del teorema della «mappa aperta», [2], pag. 99.

Sia A un aperto di R^n; siano P e Q operatori differenziali a coefficienti costanti.

Definizione. La quaterna (A, A, P, Q) si dice compatibile se e solo se per ogni $f \in \operatorname{Ker} Q/A$ $\big(= \{f \in E(A) : Qf = 0\}\big)$ il sistema $(Pu = f,\ Qu = 0)$ ammette soluzione in $E(A)$.

Lemma. Se l'aperto A è Q-convesso, allora la compatibilità della quaterna (A, A, P, Q) è equivalente alla risolubilità del sistema $(Pu = f$ $Qu = g)$ per ogni dato compatibile.

Dimostrazione. Si supponga $P\colon \operatorname{Ker} Q/A \to \operatorname{Ker} Q/A$ suriettiva; allora se $(h, h') \in E'(A) \times E'(A)$ con ${}^tPh + {}^tQh' = 0$ ne segue che

$$h \in (\operatorname{Ker} Q/A)^{\perp} \qquad \text{(polare)}\,.$$

Perciò, osservato che $(\operatorname{Ker} Q/A)^{\perp} = {}^tQE'(A)$ per la Q-convessità di A, esiste $h_0 \in E'(A)$ tale che $h = {}^tQh_0$, $h' = -\,{}^tPh_0$. Inoltre ${}^tPE'(A) + (\operatorname{Ker} Q/A)^{\perp}$ $\big($e cioè ${}^tPE'(A) + {}^tQE'(A)\big)$ è chiuso in $E'(A)$. Da ciò segue evidentemente che la mappa $(P, Q)\colon E(A) \to D$ è suriettiva.

Il lemma è concluso.

3. Applicazione all'esempio di M. Nacinovich [4].

Sia $A_0 = \{(x, y) \in R^2 : y < 8x^2\}$; $A = A_0 \times R_t$.
Siano: $P = P(D) = D_x^4 + D_y^2$ e $Q = Q(D) = -D_t^6 - P(D)$.

a) A_0 *non è* P-convesso: immediata conseguenza del Teorema 3.7.2 di [3], pag. 89.

Il teorema in 2. dimostra allora che esiste un dato ammissibile, (f, g), per il sistema: $(Pu = f, Qu = g)$ per il quale il sistema non ha soluzione in $E(A)$.

Per dimostrare che la quaterna (A, A, P, Q) non è compatibile, basta dimostrare, secondo il lemma, che A *é* Q-*convesso*.

Sia K un compatto di A e sia $g \in C_c^\infty(A)$ con ${}^tPg \in C_c^\infty(K)$; sia $\bar{K}$ la proiezione, in A_0, di K e sia L un segmento, in R_t, contenente la proiezione, in R_t, di K.

Dimostriamo che $\operatorname{supp}(g) \subseteq \bar{K} \times L$, ovvero la Q-convessità di A. Sia p un punto di R^3 tale che $p \notin \bar{K} \times L$; esiste un cono aperto e convesso D, di vertice p ed asse verticale, tale che: $D \cap \bar{K} \times L = \emptyset$. Sia $D_1 = D \cap S$ dove S è, a seconda del caso: $S = \{(x, y, t) : t > t_0$, o $t < t_0\}$, con t_0 determinato in modo che $g|_S = 0$.

Poichè ${}^tPg = 0$ in D e $g = 0$ in D_1, e poichè i piani caratteristici di Q sono paralleli all'asse t, e quindi, se intersecano D intersecano anche D_1, il fatto che g sia nulla in D discende dal Teorema 5.3.3 dell'inevitabile [3], pag. 129.

COMMENTO. Essenzialmente in questo lavoro le conclusioni sono raggiunte in virtù del teorema citato nell'introduzione: J. DIEUDONNÉ - L. SCHWARTZ, *La dualité entre les éspaces F e LF*, Ann. de l'Inst. Fourier, 1949.

BIBLIOGRAFIA

[1] G. BRATTI, *Un'applicazione del teorema del grafico chiuso alla risolubilità dei sistemi del tipo*: ($Pu = f$, $Qu = g$), in stampa.

[2] J. L. KELLEY - I. NAMIOKA, *Linear Topological Spaces*, D. Van Nostrand, (1963).

[3] L. HÖRMANDER, *Linear partial differential operators*, Springer (1963).

[4] M. NACINOVICH, *Una osservazione su una congettura di De Giorgi*, Boll. U.M.I., (4), **12** (1975), pp. 9-14.

Manoscritto pervenuto in redazione il 12 gennaio 1979.