RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

L. C. MARTINS
P. PODIO GUIDUGLI

Una caratterizzazione variazionale della vorticità

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 61 (1979), p. 313-317
<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1979__61__313_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 61 (1979)

Una caratterizzazione variazionale della vorticità.

L. C. MARTINS (Rio de Janeiro) - P. PODIO GUIDUGLI (Pisa) (*)

SUMMARY - Inspired by a paper of G. Grioli, a variational characterization of the spin of the rigid deformation, which delivers the best approximation of a given homogeneous velocity field, is proposed. The spin depends on the vorticity of the homogeneous velocity field through a tensorial coefficient, which in turn depends on the region over which the field is defined (and reduces to the identity when this region is a ball).

1. Introduzione.

Vari anni fa, G. Grioli [1] stabilì una elegante caratterizzazione variazionale della deformazione rigida di minima distanza (in termini di norma L^2 degli spostamenti) da una deformazione omogenea assegnata. In particolare, Grioli dimostrò che la miglior rotazione rigida è determinata dal tensore ortogonale che si ottiene per decomposizione polare del gradiente della deformazione assegnata.

In questa nota, ispirata dal risultato di Grioli, proviamo che vale un'analoga caratterizzazione per la vorticità del campo di velocità rigido che meglio approssima (in termini di norma L^2 delle velocità) un campo di velocità omogeneo assegnato. Quando la regione che si considera è una palla, la miglior vorticità è quella del campo di velocità omogeneo assegnato: si riottiene così l'interpretazione della vorticità abituale in Meccanica dei Continui. Nel caso di una regione di forma arbitraria, la miglior vorticità dipende linearmente dal gradiente

(*) Indirizzo degli AA.: Istituto di Scienza delle Costruzioni, Facoltà di Ingegneria - Via Diotisalvi, 2 - 56100 Pisa.

del campo di velocità mentre dipende in modo complicato, ma che renderemo esplicito, dal tensore d'inerzia di Eulero associato con la regione.

2. Approssimazione rigida di un campo di velocità.

Sia $\mathcal{E}$ uno spazio euclideo, con spazio delle traslazioni tridimensionale $\mathcal{V}$ e misura di volume vol.

Se $a, b \in \mathcal{V}$, $a \cdot b$ ne indica il prodotto interno. Scriviamo Lin per lo spazio delle trasformazioni lineari di $\mathcal{V}$ in $\mathcal{V}$ (tensori); se $A, B \in \in \mathrm{Lin}$, il loro prodotto interno usuale è definito da

$$A \cdot B = \operatorname{tr}(AB^T)\,, \tag{2.1}$$

dove B^T è il trasposto di B e tr è la traccia. Inoltre, il prodotto tensoriale di $a, b \in \mathcal{V}$ è l'elemento $a \otimes b \in \mathrm{Lin}$ definito dalla sua azione su un generico elemento $v \in \mathcal{V}$:

$$(a \otimes b)v = (b \cdot v)\,a\,. \tag{2.2}$$

Infine indichiamo con Skw il sottospazio dei tensori antisimmetrici, con Sym il sottospazio dei tensori simmetrici, e con Sym^+ l'insieme degli elementi definiti positivi di Sym.

Sia $\mathfrak{R}$ la chiusura di un aperto limitato di $\mathcal{E}$, e x un punto qualsiasi di $\mathfrak{R}$. Il *tensore di Eulero* E di $\mathfrak{R}$ (rispetto a $c \in \mathcal{E}$) è definito da

$$E = \int_{\mathfrak{R}} (x - c) \otimes (x - c)\, d\,\mathrm{vol}\,. \tag{2.3}$$

In base alla definizione si osserva che $E \in \mathrm{Sym}^+$. Perciò, se $A, B \in \in \mathrm{Lin}$, ha senso introdurre il prodotto interno $\overset{\mathfrak{R}}{\cdot}$ tra A e B:

$$A \overset{\mathfrak{R}}{\cdot} B = (AB^T) \cdot E\,. \tag{2.4}$$

Utilizzeremo più avanti l'identità seguente:

$$A \overset{\mathfrak{R}}{\cdot} B = A^T \overset{\mathfrak{R}}{\cdot} B^T\,. \tag{2.5}$$

Un *campo di velocità* (omogeneo, intorno a c, per $\mathfrak{R}$) è un elemento dell'insieme

$$\text{(2.6)} \qquad \mathrm{Vel} = \{v\colon \mathfrak{R} \to \mathcal{V} \,|\, v(x) = L(x - c),\ L \in \mathrm{Lin}\}\,.$$

Nel caso in cui $L \in \mathrm{Skw}$, il campo di velocità r corrispondente è detto *rigido*; la collezione di tutti i campi rigidi si indica con Rig:

$$\text{(2.7)} \qquad \mathrm{Rig} = \{r \in \mathrm{Vel} \,|\, r(x) = W(x - c),\ W \in \mathrm{Skw}\}\,.$$

Si consideri il seguente problema:

$$\text{(2.8)} \qquad \text{Dato } v \in \mathrm{Vel}, \text{ trovare } \underset{\mathrm{Rig}}{\text{minimo}} \int_{\mathfrak{R}} (v - r)\cdot(v - r)\, d\,\mathrm{vol}\,.$$

Da (6) e (7) abbiamo che

$$\int_{\mathfrak{R}} (v - r)\cdot(v - r)\, d\,\mathrm{vol} = \int_{\mathfrak{R}} \big((L - W)(x - c)\cdot\big((L - W)(x - c)\big)\, d\,\mathrm{vol}\,.$$

Valendoci di (1), (2), (3), (5) e (4) otteniamo la seguente versione equivalente del problema (8):

$$\text{(2.9)} \qquad \text{Dato } L \in \mathrm{Lin}, \text{ trovare } \underset{\mathrm{Skw}}{\text{minimo}}\, (L - W) \overset{\mathfrak{R}}{\cdot} (L - W)\,.$$

Dal momento che Skw è un sottospazio di Lin, il problema (9) ha un'unica soluzione, che si trova imponendo che $L - W$ sia ortogonale a Skw (nel senso di $\overset{\mathfrak{R}}{\cdot}$):

$$\text{(2.10)} \qquad (L - W) \overset{\mathfrak{R}}{\cdot} H = 0\,, \text{ per ogni } H \in \mathrm{Skw}\,, \text{ i.e., } (L - W)\,E \in \mathrm{Sym}\ (^1).$$

Si noti che la soluzione di $(10)_2$ dipende dalla regione solo tramite il suo tensore di Eulero E. In particolare, se $\mathfrak{R}$ è una palla di centro c, E è un multiplo positivo del tensore identità I e $\overset{\mathfrak{R}}{\cdot}$ è un multiplo del

(1) Naturalmente la soluzione $(10)_2$ del problema di minimo (9) si può ottenere anche ricorrendo ai metodi usuali del calcolo differenziale.

prodotto interno definito da (1); perciò si conclude da $(10)_2$, come si poteva immaginare, che la miglior approssimazione rigida di un dato campo di velocità v si ottiene quando W è uguale alla parte antisimmetrica di L, cioè, alla *vorticità* di v.

3. Una formula esplicita per la miglior vorticità.

Dato $E \in \mathrm{Sym}^+$, l'equazione $(2.10)_2$ definisce implicitamente una applicazione lineare che associa ad ogni $L \in \mathrm{Lin}$ un unico $W \in \mathrm{Skw}$.

Determineremo W fornendo una formula esplicita per il vettore w associato con W, una volta scelti un'orientazione e un prodotto vettoriale $\times$ per $\mathcal{V}$.

Cominciamo scrivendo l'equazione $(2.10)_2$ come segue:

$$WE + EW = LE - EL^T \,. \tag{3.1}$$

L'azione del tensore al membro sinistro su $u \in \mathcal{V}$ si può scrivere come

$$(WE + EW)u = w \times Eu + E(w \times u) \,. \tag{3.2}$$

È facile d'altra parte mostrare che il vettore

$$w \times Eu + E(w \times u) + (Ew) \times u \tag{3.3}$$

è un multiplo scalare di $w \times u$. Esplicitamente,

$$w \times Eu + E(w \times u) + (Ew) \times u = (\mathrm{tr}\, E) w \times u \,. \tag{3.4}$$

Di conseguenza, (2) si può scrivere come

$$(WE + EW)u = \big((\mathrm{tr}\, E)w - Ew\big) \times u \,. \tag{3.5}$$

Sia l_E l'applicazione lineare di Lin in $\mathcal{V}$ che fornisce il vettore $l = l_E(L)$ associato con $LE - EL^T$. Da (1) e (5) otteniamo

$$\big((\mathrm{tr}\, E)I - E\big)w = l \,. \tag{3.6}$$

Poichè $E \in \mathrm{Sym}^+$, $WE + EW = 0$ se e solo se $W = 0$, ed ha senso scrivere

$$(3.7) \qquad w = \left((\operatorname{tr} E)I - E\right)^{-1} l_E(L) .$$

La formula (7) mostra che la dipendenza di W da E è piuttosto complicata.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

[1] G. GRIOLI, Boll. Un. Mat. Ital., (2), **2** (1940), p. 452.
Un resoconto di questo lavoro si trova nella sezione 42 di *The Classical Field Theories*, di C. TRUESDELL e R. A. TOUPIN, in PH III/1 (Ed. S. FLÜGGE), Berlin - Göttingen - Heidelberg: Springer, 1960.
Per il caso matematicamente equivalente di un campo di spostamenti linearizzati definito su una palla, Grioli attribuisce in [1] il risultato ritrovato qui alla fine della sezione 2 a L. Sobrero, e ne cita le Lezioni di Fisica Matematica, Roma, 1935-36. Ci è stato impossibile rintracciare questo volume, tuttavia il risultato si trova anche nella sezione 8, Cap. I di L. SOBRERO, *Elasticidade*, Rio de Janeiro, 1942.

Manoscritto pervenuto in redazione il 29 dicembre 1978.