Rendiconti
del
Seminario Matematico
della
Università di Padova

Alessio Volčič

Sulla differenziazione degli integrali di Daniell-Stone

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 61 (1979), p. 251-258

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1979__61__251_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 61 (1979)

Sulla differenziazione degli integrali di Daniell-Stone.

ALESSIO VOLČIČ (*)

SUMMARY - Without using the Stone's hypothesis we compare for a Daniell-Stone integral the definitions of derivative, dense derivative, positive derivative and regular derivative. In this setting a Kölzow's problem is solved.

1. In [3] si è introdotto per l'integrale di Daniell-Stone il concetto di localizzabilità e si sono introdotti alcuni strumenti, che ora brevemente richiameremo, che consentono di parlare, anche in questo ambito, dei vari tipi di derivate alla Radon-Nikodym già studiati, per le misure e per gli integrali associati a delle misure, in [1] e [2].

Se $\mathcal{L}_1(I)$ è la collezione delle funzioni definite su X ed a valori nella retta reale estesa, integrabili rispetto all'integrale (positivo) di Daniell-Stone I, indicheremo con $\mathcal{L}_\infty(I)$ la seguente collezione di funzioni:

$$k \in \mathcal{L}_\infty \Leftrightarrow fk \in \mathcal{L}_1 , \qquad \forall f \in \mathcal{L}_1 . \tag{1}$$

Si dimostra ([3], Teorema 1.1) che $\mathcal{L}_\infty$ è uno spazio lineare reticolato, un'algebra e che contiene le costanti.

Si indica con $\mathcal{A}_\infty$ la collezione (che risulta una σ-algebra) di quei sottoinsiemi di X, la cui funzione caratteristica appartiene ad $\mathcal{L}_\infty$ e con $\mathcal{C}$ la sottocollezione (che è un σ-ideale ereditario) formata dagli

(*) Indirizzo dell'A.: Istituto di Matematica Applicata dell'Università - Trieste.

Lavoro eseguito nell'ambito dei gruppi di Ricerca Matematica del C.N.R.

insiemi per cui risulta

$$I(\chi_T f) = 0 \,, \qquad \forall f \in \mathfrak{L}_1 \,. \tag{2}$$

Gli insiemi di $\mathcal{T}$ si diranno trascurabili, mentre chiameremo nulli gli insiemi di $\mathcal{N}$:

$$N \in \mathcal{N} \Leftrightarrow \chi_N \in \mathfrak{L}_1 \quad \text{e} \quad I(\chi_N) = 0 \,. \tag{3}$$

Risulta $\mathcal{N} \subset \mathcal{T}$ ([3], Teorema 2.1). Indichiamo infine con $\mathcal{M}_\infty$ la collezione delle funzioni $\mathcal{A}_\infty$-misurabili e con $\mathcal{M}_1$ la collezione delle funzioni misurabili secondo Stone rispetto ad $\mathfrak{L}_1$. Ricordiamo ([3], Teorema 1.15) che $\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_\infty$ se e solo se è verificata la condizione di Stone, ovvero se e solo se le costanti appartengono a $\mathcal{M}_1$.

2. Nel seguito avremo a che fare con due integrali di Daniell-Stone I e J sopra uno stesso insieme sostegno e dei due uno sarà assolutamente continuo rispetto all'altro. Naturalmente essi non avranno le stesse funzioni integrabili (questo fatto ha come conseguenza che esistono c_1 e c_2 tali che $I \leqslant c_1 J$ e $J \leqslant c_2 I$, vedi [4]). D'altro canto i due integrali debbono pur avere in comune un insieme di definizione sufficientemente significativo. L'ipotesi meno restrittiva che si possa fare in proposito è che i due integrali siano entrambi ottenibili per prolungamento a partire dalle loro restrizioni a $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_1(I) \cap \mathfrak{L}_1(J)$.

Scriveremo $J \ll I$ per indicare che J è assolutamente continuo rispetto ad I, cioè che

$$\forall f \in \mathfrak{L}_1^+(I) \colon I(f) = 0 \Rightarrow f \in \mathfrak{L}_1^+(J) \quad \text{e} \quad J(f) = 0 \,. \tag{4}$$

Si è supposto nello scrivere la (4) che I e J sono degli integrali positivi e ciò non è restrittivo, in quanto in caso contrario si può ragionare sulle loro decomposizioni di Jordan, come in [3].

Vale il seguente teorema di Kölzow ([1], Lemma 18), che estende un teorema di Zaanen ([6], § 31, Teorema 1).

TEOREMA 1.1. *Se I e J sono degli integrali di Daniell-Stone, tali che $J \ll I$, allora $\mathcal{M}_1(I) \subset \mathcal{M}_1(J)$.*

Analoga è la relazione tra $\mathcal{M}_\infty(I)$ e $\mathcal{M}_\infty(J)$; per dimostrarlo occorre premettere il seguente lemma.

LEMMA 1.2. *Se $\mathfrak{R}$ è un sottoinsieme denso di $\mathfrak{L}_1(J)$ e se k è una funzione limitata tale che $kr \in \mathfrak{L}_1(J)$ per ogni $r \in \mathfrak{R}$, allora $k \in \mathfrak{L}_\infty(J)$.*

Sia f una qualunque funzione J-integrabile. Per ipotesi, esiste una successione $\{r_n\}$ di funzioni di $\mathfrak{R}$, che convergono ad f nella norma dedotta da J:

$$\lim_{n\to\infty} J(|f-r_n|) = 0 .$$

Ricorrendo, se occorre, ad una sottosuccessione, si può sempre supporre che ci sia anche convergenza puntuale J quasi ovunque. Se c è una limitazione superiore per $|k|$, si ha

$$J(|kr_n - kr_m|) \leqslant cJ(|r_n - r_m|) ,$$

quindi la successione $\{kr_n\}$ è di Cauchy nella norma di $\mathfrak{L}_1(J)$ e inoltre converge J quasi ovunque alla funzione kf. Ma allora $kf \in \mathfrak{L}_1(J)$. Si è verificata così la (1) e quindi $k \in \mathfrak{L}_\infty(J)$.

TEOREMA 1.3. *Se $J \ll I$, allora $\mathcal{M}_\infty(I) \subset \mathcal{M}_\infty(J)$.*

(Occorre e) basta provare che $\mathcal{A}_\infty(I) \subset \mathcal{A}_\infty(J)$. Sia $A \in \mathcal{A}_\infty(I)$; risulta allora

$$\chi_A f \in \mathfrak{L}_1(I) , \qquad \forall f \in \mathfrak{L}_1(I) ;$$

in particolare si può prendere $f \in \mathfrak{L} = \mathfrak{L}_1(I) \cap \mathfrak{L}_1(J)$. Per il Teorema 1.1 $\chi_A f \in \mathcal{M}_1(J)$ ed essendo $|\chi_A f| \leqslant |f|$ e $|f| \in \mathfrak{L}_1(J)$, si deduce che $\chi_A f \in \mathfrak{L}_1(J)$ (anzi, si tratta di una funzione di $\mathfrak{L}$). Restano così verificate per $k = \chi_A$ le ipotesi del lemma precedente, quindi $\chi_A \in \mathfrak{L}_\infty(J)$ e cioè la tesi.

Merita ricordare ancora il fatto che se $f \in \mathcal{M}_1(I)$ e $k \in \mathcal{M}_\infty(I)$, allora $fk \in \mathcal{M}_1(I)$ ([3], Teorema 1.14).

3. Vediamo ora di definire nell'ambito della teoria dell'integrale di Daniell-Stone i concetti di derivata, derivata regolare, derivata densa e derivata positiva.

Sia $J \ll I$.

DEFINIZIONE 1. Una funzione $g \in \mathcal{M}_\infty^+(I)$ si dice una *derivata* di J rispetto ad I (scriveremo $g = dJ/dI$), se per ogni $f \in \mathfrak{L}$ risulta

$$fg \in \mathfrak{L}_1(I) \Leftrightarrow f \in \mathfrak{L}_1(J) ,$$

e in questo caso $J(f) = I(fg)$.

Definizione 2. Una derivata si dice *regolare*, se per ogni $f \in \mathcal{M}_1(I)$ risulta $fg \in \mathcal{L}_1(I) \Leftrightarrow f \in \mathcal{L}_1(J)$, e in questo caso $J(f) = I(fg)$.

È banale osservare che g è regolare se e solo se si verificano contemporaneamente le due condizioni (analoghe alle (75) e (76) di [1])

$$(5) \qquad f \in \mathcal{M}_1(I) \cap \mathcal{L}_1(J) \Rightarrow gf \in \mathcal{L}_1(I) \quad \text{e} \quad J(f) = I(fg) ;$$

$$(6) \qquad f \in \mathcal{M}_1(I) \quad \text{e} \quad fg \in \mathcal{L}_1(I) \Rightarrow f \in \mathcal{L}_1(J) \quad \text{e} \quad J(f) = I(fg) .$$

In analogia a quanto fatto in [1], diremo quindi che una derivata è *positiva*, se verifica la (6) e la diremo *densa*, se verifica la (5). In [2] è stato mostrato, risolvendo un problema posto in [1], che le quattro definizioni sono effettivamente diverse se I è dedotto da una misura. In [1], (Teorema 27) è stato provato sotto l'ipotesi di Stone che ogni derivata di un integrale di Daniell-Stone è densa. Anche nel caso più generale il risultato resta vero. Per dimostrarlo occorre premettere il seguente teorema, che caratterizza la derivata densa.

Teorema 3.1. *Una derivata $g = dJ/dI$ è densa se e solo se per ogni $f \in \mathcal{L}_1^+(J) \cap \mathcal{M}_1(I)$ esiste un insieme J-nullo N, sul quale la g si annulla ed esiste una successione $\{f_n\}$ di funzioni di $\mathcal{L}^+$ tale che $f_n \uparrow f$ fuori di N.*

Se g è una derivata e se $f \in \mathcal{L}_1^+(J) \cap \mathcal{M}_1(I)$, allora esiste una successione $\{h_n\}$ di funzioni di $\mathcal{L}^+$, tale che $f \leqslant \sup h_n$. Si può supporre che la successione sia non decrescente. Allora la successione $f_n = f \wedge h_n$ (con $N = \emptyset$) verifica la condizione del teorema.

Viceversa, supponiamo che sia verificata la condizione e che $f \in \mathcal{L}_1^+(J) \cap \mathcal{M}_1(I)$. Sia $\{f_n\}$ la successione non decrescente che converge ad f fuori di N, insieme J-nullo. La successione $\{f_n\}$ converge verso l'alto a fg ovunque, infatti la g si annulla proprio dove la successione $\{f_n\}$ si comporta male. Essendo poi g una derivata, risulta $J(f_n) = I(f_n g)$ per ogni intero n. Ne consegue che la successione non decrescente $\{I(f_n g)\}$ converge a $J(f)$ e quindi per il teorema di Beppo Levi, $fg \in \mathcal{L}_1(I)$ e $J(f) = I(fg)$. Con ovvi ragionamenti si prova la stessa tesi anche per le funzioni f a segno variabile

Osservazione. Si noti che nella prima parte della dimostrazione, quella che ha come tesi la condizione citata nel teorema, non si sfrutta l'ipotesi della densità della derivata, ma solo il fatto che la g è una derivata.

TEOREMA 3.2. *Ogni derivata è densa.*

La dimostrazione segue dal teorema precedente e dall'osservazione appena fatta. Infatti ogni derivata verifica (per l'osservazione) la condizione del teorema, la quale poi è sufficiente per la densità.

Nella teoria della differenziazione delle misure (vedi [1] e [2]), la derivata positiva è caratterizzata dalla proprietà, da cui deriva il suo nome,

$$\{x\colon g(x) = 0\} \qquad \text{è } J\text{-nullo}\,. \tag{7}$$

Nell'ambito in cui ci siamo messi, ciò non è più vero. La relazione tra la positività e la condizione (7) è chiarita dai seguenti tre teoremi.

TEOREMA 3.3. *Se la derivata g verifica la* (7), *allora g è positiva.*

Sia $f \in \mathcal{M}_1^+(I)$, tale che $fg \in \mathcal{L}_1(I)$. Sia $\{f_n\}$ una successione crescente di funzioni di $\mathcal{L}^+$, tale che $f_n \uparrow fg$. Una tale successione esiste, poichè presa una successione non decrescente $\{h_n\}$ di funzioni di $\mathcal{L}^+$, tale che $fg \leqslant \sup h_n$, risulta $fg \wedge h_n \in \mathcal{L}_1(I)$ ed anche $fg \wedge h_n \in \mathcal{L}_1(J)$, poichè $fg \in \mathcal{M}_1(I) \subset \mathcal{M}_1(J)$. Consideriamo ancora la funzione di $\mathcal{M}_\infty(I)$

$$\bar{g}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } g(x) = 0\,, \\ 1/g(x) & \text{se } g(x) \neq 0\,. \end{cases}$$

Risulta $f_n = f_n \bar{g} g$, tranne che nei punti dove la g si annulla, che per ipotesi è J-nullo. Posto $\bar{g}_n = \bar{g} \wedge n$, risulta $\bar{g}_n \in \mathcal{L}_\infty(I) \subset \mathcal{M}_\infty(J)$ ([3], Teorema 1.10) e perciò $f_n \bar{g}_n \in \mathcal{L}_1(J)$. Siccome poi g è una derivata, è $f_n \bar{g}_n g \in \mathcal{L}_1(I)$ e $J(f_n \bar{g}_n) = I(f_n \bar{g}_n g)$.

Poichè inoltre $f_n \bar{g}_n g_n \uparrow fg$, si ha che, tranne che sull'insieme J-nullo su cui si annulla la g, $f_n \bar{g}_n \uparrow f$. Applicando perciò due volte il teorema di Beppo Levi, si ha che $\lim\limits_{n\to\infty} I(f_n \bar{g}_n g) = I(fg)$ e inoltre che $f \in \mathcal{L}_1(J)$ e $J(f) = \lim J(f_n \bar{g}_n)$ e quindi la tesi.

DEFINIZIONE. Diremo che $u \in \mathcal{M}_1^+(I)$ è un'unità debole per $\mathcal{M}_1(I)$, se è a valori reali e se risulta, per ogni $f \in \mathcal{M}_1^+(I)$,

$$\lim_{n\to\infty} (nu) \wedge f = f\,. \tag{8}$$

In [5] si è studiata questa proprietà in relazione ad una analisi approfondita della struttura dell'integrale di Daniell-Stone. Si è costruito un esempio di integrale, che non ammette unità debole. Si sono anche indicate diverse condizioni sufficienti per l'esistenza dell'unità debole, che suggeriscono l'idea che la non esistenza di una funzione misurabile che soddisfi alla (8) è un fatto estremamente patologico e raro.

TEOREMA 3.4. *Se g è una derivata positiva di J rispetto ad I e se $\mathcal{M}_1(I)$ ha unità debole, allora l'insieme $\{x\colon g(x) = 0\}$ è J-nullo.*

Posto $G = \{x\colon g(x) = 0\}$, se u è un'unità debole di $\mathcal{M}_1(I)$, la funzione $f = u\chi_G$ è tale che $fg \equiv 0$, quindi $fg \in \mathfrak{L}_1(I)$ e, per la positività, $f \in \mathfrak{L}_1(J)$ e $J(f) = 0$. Ma essendo $\chi_G \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} nu\chi_G$, χ_G è una funzione J-nulla.

L'ipotesi che appare nel teorema precedente è anche, in un certo senso, necessaria. Vale infatti il seguente teorema.

TEOREMA 3.5. *Se $\mathcal{M}_1(I)$ non ammette unità debole, allora esiste un integrale J che ammette derivata positiva rispetto ad I, ma tale che l'insieme $\{x\colon g(x) = 0\}$ non è J-nullo.*

Sia $\bar{f}$ una qualunque funzione I-integrabile e non negativa e sia, per ogni $f \in \mathcal{M}_1^+(I)$, $J(f)$ definito nel modo seguente (tutte le volte che il limite esiste finito)

$$J(f) = \lim_{n\to\infty} I(f \wedge (n\bar{f}))\,.$$

Si prolunghi poi per linearità J alle funzioni a segno variabile. Per costruzione la funzione caratteristica di $\{x\colon \bar{f}(x) \neq 0\}$ è la derivata positiva di J rispetto ad I. Se l'insieme G su cui si annulla dJ/dI (che è l'insieme su cui si annulla $\bar{f}$) fosse J-nullo, esisterebbe una successione $\{f_n\}$ di funzioni J-integrabili non negative, tali che $\chi_G \leqslant \sup f_n$. Ma allora la funzione $u = \bar{f} + \sup f_n$ è una funzione misurabile che non si annulla in alcun punto di X. Ma questa condizione (vedi [5]) è necessaria e sufficiente per l'esistenza dell'unità debole.

Dai risultati visti finora si deduce che ogni derivata è densa, che ovviamente ogni derivata che è densa e positiva è regolare e, viceversa, che ogni derivata regolare è positiva e densa. In [1], Problema 13, è stata fatta la congettura che ogni derivata di un integrale di Daniell-Stone è positiva (e perciò anche regolare) e che quindi per l'integrale di Daniell-Stone le quattro definizioni coincidono. Il seguente controesempio smentisce la congettura.

Esempio. Sia X un insieme non numerabile, $\mathfrak{L}_1(I) = \mathfrak{L}_1(J)$ formato dalle funzioni che si annullano ovunque tranne che su un insieme al più numerabile, I e J siano identicamente nulli. La funzione $g \equiv 0$ è una derivata (densa) di J rispetto ad I, ma non è positiva, in quanto l'insieme X non è J-nullo.

Si noti che $\mathcal{M}_1(I)$ possiede unità debole e quindi la positività della derivata si caratterizza appunto con la proprietà (7).

Vediamo ora in analogia con quanto fatto in [2] quale « minimo » requisito aggiungere affinchè una derivata di J rispetto ad I sia sempre positiva.

Definizione. Diremo che l'integrale J è semifinito, se ogni insieme J-trascurabile è J-nullo.

Teorema 3.6. *Se J è semifinito e se g è una derivata di J rispetto ad I, allora g è positiva.*

La tesi del teorema si ottiene immediatamente dal teorema seguente.

Teorema 3.7. *Se g è una derivata di J rispetto ad I, allora l'insieme $G = \{x\colon g(x) = 0\}$ è J-trascurabile.*

Se G non fosse trascurabile, allora esisterebbe una funzione $f \in \mathfrak{L}_1^+(J)$ tale che $J(f\chi_G) > 0$. Per la densità di $\mathfrak{L}$ in $\mathfrak{L}_1(J)$, ci sarebbe allora anche una funzione $f_1 \in \mathfrak{L}^+$, tale che $J(f_1\chi_G) > 0$. Ma allora l'identità $J(f_1\chi_G) = I(f_1\chi_G g)$ è in contrasto con il fatto che $f_1\chi_G g$ è identicamente nulla.

Osservazione. Se l'integrale J è associato ad una misura (anche eventualmente nel senso visto in [5]), allora T è trascurabile se e solo se $T \cap A$ è J-nullo per ogni A di misura finita, ovvero se e solo se T è localmente nullo. Ma è ben noto (vedi, ad esempio, [6]) che gli insiemi localmente nulli sono nulli se e solo se la misura è semifinita. Alla luce di questo fatto si giustifica il nome di « integrale semifinito ».

Il teorema appena provato è l'analogo, per l'integrale di Daniell-Stone, del Teorema 4.2 di [2].

BIBLIOGRAFIA

[1] D. KÖLZOW, *Differentiation von Massen*, L.N.M., **65** (1968).

[2] A. VOLČIČ, *Sulla differenziazione delle misure*, Rend. Ist. Matem. Univ. Trieste, **4**, fasc. II (1974), pp. 156-177.

[3] A. VOLČIČ, *Localizzabilità e decomposizione di Hahn per l'integrale di Daniell-Stone*, Quaderni di Matematica dell'Università di Trieste a.a. 1974-75.

[4] A. VOLČIČ, *Sull'insieme di definizione delle misure*, B.U.M.I., Ser. V, **16**-A, no. 1 (1979), pp. 186-189.

[5] A. VOLČIČ, *Un confronto tra l'integrale di Daniell-Stone e quello di Lebesgue*, in corso di pubblicazione.

[6] A. C. ZAANEN, *Integration*, North-Holland (1967).

Manoscritto pervenuto in redazione il 24 novembre 1978.