

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

MARIA ERMINIA MARINA BORGHESANI

**Sulla convergenza di una successione di
operatori non lineari e sulla perturbazione
di disequazioni variazionali**

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 61 (1979), p. 155-175

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1979__61__155_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*

<http://www.numdam.org/>

**Sulla convergenza di una successione
di operatori non lineari
e sulla perturbazione di disequazioni variazionali.**

MARIA ERMINIA MARINA BORGHESANI (*)

SUMMARY - In this paper we discuss relations between some kinds of « convergence » of sequences $\{A_n\}$ of non linear operators from a reflexive Banach space V to its dual space V' . Next we investigate convergence properties of solutions u_n of variational inequalities

$$u_n \in K_n: \langle A_n u_n, u_n - v \rangle \leq \langle T_n, u_n - v \rangle \quad \forall v \in K_n$$

where $\{T_n\} \subset V'$ is such that $T_n \rightarrow T$ in V' and $\{K_n\}$ is a sequence of closed convex subsets of V , K_n contained in the domain of A_n , $K_n \xrightarrow{\mathcal{M}} K \subset V$ ([12]).

Introduzione.

Nel presente lavoro vogliamo confrontare taluni « tipi di convergenza » di operatori. Più precisamente sia V uno spazio di Banach riflessivo e V' il suo duale. Consideriamo una successione $\{A_n\}$ di operatori definiti in $D(A_n) \subset V$ e a valori in V' ; sia $A: D(A) \subset V \rightarrow V'$.

(*) Indirizzo dell'A.: Istituto Matematico dell'Università - Via L. B. Alberti 4 - 16132 Genova.

Lavoro eseguito nell'ambito del Laboratorio per la Matematica Applicata del C.N.R.

Diciamo che la successione $\{A_n\}$ P -converge ad A e poniamo $A = P\text{-lim } A_n$ se:

$$(0.1) \left\{ \begin{array}{l} (a) \text{ la successione } A_n \text{ è uniformemente limitata, cioè per ogni } \\ M \in \mathbf{R}_+, \exists N \in \mathbf{R}_+ \text{ tale che } \forall v \in D(A_n), \|v\|_V \leq M, \text{ si ha} \\ \|A_n(v)\|_{V'} \leq N. \\ (b) \text{ Per ogni estratta } \{A_{n_k}\} \text{ della successione } \{A_n\}, \text{ se } \{x_k\} \\ \text{è una successione tale che } x_k \in D(A_{n_k}), x_k \rightarrow x \text{ in } V \text{ e} \\ \underline{\lim} \langle A_{n_k}(x_k), x_k - x \rangle < 0, \text{ allora } x \in D(A) \text{ e} \\ \\ \underline{\lim} \langle A_{n_k}(x_k), x_k - v \rangle \geq \langle A(x), x - v \rangle, \quad \forall v \in D(A). \end{array} \right.$$

Nel § 1 supponiamo $D(A_n) = D(A) = V$. Dapprima confrontiamo la P -convergenza definita in (0.1) sia con un tipo di convergenza definita in [7], pag. 259, sia con la M -convergenza (vedi la definizione (1.3)).

Supponiamo poi che gli operatori A e $\{A_n\}$ siano lineari e uniformemente coercivi (vedi (1.9)). In tali ipotesi deduciamo la relazione tra la P -convergenza e la $G(w, s)$ convergenza (vedi [1], pag. 356); inoltre dimostriamo che se gli operatori A e $\{A_n\}$ sono simmetrici, allora $A = M\text{-lim } A_n$ (nel senso della definizione (1.3)) se e solo se $A_n v \rightarrow Av, \forall v \in V$ (convergenza forte della successione $\{A_n\}$).

Nel § 2 diamo un esempio significativo di una successione di operatori non lineari P -convergente ad un operatore A .

Nel § 3 utilizziamo la P -convergenza per esaminare la « convergenza » delle soluzioni di perturbazioni di disequazioni variazionali. Più precisamente consideriamo una successione $\{K_n\}$ di convessi contenuti in V tali che $K_n \xrightarrow{\mathcal{A}} K$ (vedi [12]); data una successione A_n di operatori tali che $A_n: K_n \rightarrow V'$, e dato un operatore $A: K \rightarrow V'$ tale che $A = P\text{-lim } A_n$, studiamo la « convergenza » delle soluzioni $u_n \in K_n$ delle disequazioni:

$$\langle A_n(u_n), u_n - v \rangle \leq \langle T_n, u_n - v \rangle, \quad \forall v \in K_n,$$

essendo $\{T_n\} \subset V'$ tale che $T_n \rightarrow T$ in V' (vedi Teorema 3.1).

Applichiamo infine i risultati ottenuti per studiare l'esistenza e la regolarità delle soluzioni di talune disequazioni variazionali ellittiche non lineari.

Segnaliamo che la problematica della « convergenza » delle soluzioni di disequazioni variazionali è stata affrontata in [12] nel caso

in cui $\{A_n\}$ sia una successione di operatori monotoni, e in [2], [3] nel caso in cui $\{A_n\}$ sia una successione di operatori simmetrici lineari o quasi lineari (si veda anche la bibliografia ivi citata). Osserviamo anche che in [8] sono dati esempi di operatori P -convergenti ad un operatore A ed è affrontato il problema della « convergenza » delle soluzioni di talune disequazioni variazionali.

Segnaliamo infine che il problema della « convergenza » delle soluzioni di una successione di equazioni variazionali associate a operatori lineari e simmetrici è stato ampiamente affrontato da parecchi autori (vedi [1], [2], [3], [13] e la bibliografia ivi citata).

1. Sia dunque V uno spazio di Banach riflessivo e V' il suo duale. Siano $A_n, A: V \rightarrow V', \forall n \in \mathbb{N}$. Ci è utile il seguente lemma.

LEMMA 1.1. Se $A = P\text{-lim } A_n$ nel senso della definizione (0.1) si ha:

$$(1.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{per ogni estratta } \{A_{n_k}\} \text{ della successione } \{A_n\}, \text{ se } \{x_k\} \text{ è una} \\ \text{successione tale che } x_k \rightarrow x \text{ in } V \text{ e } \overline{\lim} \langle A_{n_k}(x_k), x_k - x \rangle \leq 0, \\ \text{allora } A_{n_k}(x_k) \rightarrow A(x) \text{ in } V' \text{ e } \lim \langle A_{n_k}(x_k), x_k \rangle = \langle A(x), x \rangle. \end{array} \right.$$

In particolare $\forall x \in V, A_n(x) \rightarrow A(x)$ in V' .

DIMOSTRAZIONE. Sia $A = P\text{-lim } A_n$ e sia $x_k \rightarrow x$ tale che

$$\overline{\lim} \langle A_{n_k}(x_k), x_k - x \rangle \leq 0.$$

Poichè, per ipotesi, la successione $\{A_n\}$ è uniformemente limitata, esiste una estratta della sottosuccessione $\{A_{n_k}(x_k)\}$ (che per semplicità continuiamo ad indicare con $\{A_{n_k}(x_k)\}$) tale che $A_{n_k}(x_k) \rightarrow f$ in V' . Allora dalla (0.1) si ha $\forall v \in V$:

$$\begin{aligned} \langle A(x), x - v \rangle &\leq \underline{\lim} \langle A_{n_k}(x_k), x_k - v \rangle \leq \\ &\leq \overline{\lim} \langle A_{n_k}(x_k), x_k - x \rangle + \overline{\lim} \langle A_{n_k}(x_k), x - v \rangle \leq \langle f, x - v \rangle \end{aligned}$$

e quindi

$$A_{n_k}(x_k) \rightarrow A(x).$$

Ne segue che $\forall v \in V$:

$$\langle A(x), x - v \rangle \leq \underline{\lim} \langle A_{n_k}(x_k), x_k - v \rangle \leq \overline{\lim} \langle A_{n_k}(x_k), x_k - v \rangle \leq \langle A(x), x - v \rangle$$

e quindi:

$$\lim \langle A_{n_k}(x_k), x_k - v \rangle = \langle A(x), x - v \rangle, \quad \forall v \in V. \quad \blacksquare$$

Il Lemma 1.1 ci permette di confrontare la definizione (0.1) di P -convergenza con la seguente (vedi [7], pag. 259):

$$(1.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} (a) \text{ la successione } \{A_n\} \text{ è uniformemente limitata,} \\ (b) \text{ per ogni estratta } \{A_{n_k}\} \text{ della successione } \{A_n\} \text{ se } \{x_k\} \text{ è} \\ \text{una successione tale che } x_k \rightarrow x \text{ in } V, A_{n_k}(x_k) \rightarrow y \text{ in } V, \\ \text{e } \overline{\lim} \langle A_{n_k}(x_k), x_k \rangle \leq \langle y, x \rangle, \text{ allora } y = A(x) \text{ e } \lim \langle A_{n_k}(x_k), \\ x_k \rangle = \langle A(x), x \rangle. \end{array} \right.$$

Più precisamente si ha

TEOREMA 1.2. $A = P\text{-lim } A_n$ se e soltanto se la successione $\{A_n\}$ verifica le ipotesi (1.2).

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo che $A = P\text{-lim } A_n$ e sia $x_k \rightarrow x$ in V , $A_{n_k}(x_k) \rightarrow y$ in V' e $\overline{\lim} \langle A_{n_k}(x_k), x_k \rangle \leq \langle y, x \rangle$. Allora:

$$\overline{\lim} \langle A_{n_k}(x_k), x_k - x \rangle \leq \overline{\lim} \langle A_{n_k}(x_k), x_k \rangle + \overline{\lim} \langle A_{n_k}(x_k), -x \rangle \leq 0$$

e quindi le (1.2) seguono dal Lemma 1.1.

Viceversa supponiamo che siano verificate le (1.2) e sia $x_k \rightarrow x$ in V , tale che $\overline{\lim} \langle A_{n_k}(x_k), x_k - x \rangle \leq 0$. Poichè la successione $\{A_n\}$ è uniformemente limitata, esiste una estratta (che continuiamo ad indicare con $\{A_{n_k}(x_k)\}$) tale che $A_{n_k}(x_k) \rightarrow y$ in V' . Si ha inoltre

$$\overline{\lim} \langle A_{n_k}(x_k), x_k \rangle \leq \overline{\lim} \langle A_{n_k}(x_k), x_k - x \rangle + \overline{\lim} \langle A_{n_k}(x_k), x \rangle \leq \langle y, x \rangle$$

e quindi dalla (1.2) segue

$$\lim \langle A_{n_k}(x_k), x_k - v \rangle = \langle A(x), x - v \rangle, \quad \forall v \in V. \quad \blacksquare$$

È ovvia conseguenza del Teorema 1.2 il seguente

COROLLARIO 1.3. Sia $A = P\text{-lim } A_n$. Allora $A = M\text{-lim } A_n$ cioè:

$$(1.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} (a) \text{ la successione } \{A_n\} \text{ è uniformemente limitata,} \\ (b) \text{ per ogni estratta } \{A_{n_k}\} \text{ della successione } \{A_n\}, \text{ se } \{x_k\} \text{ è} \\ \text{una successione tale che } x_k \rightharpoonup x \text{ in } V, A_{n_k}(x_k) \rightharpoonup y \text{ in } V' \\ \text{e } \overline{\lim} \langle A_{n_k}(x_k), x_k \rangle \leq \langle y, x \rangle, \text{ allora } y = A(x). \end{array} \right.$$

Osserviamo inoltre che dalla definizione (1.3) segue facilmente il seguente:

COROLLARIO 1.4. Sia $A = M\text{-lim } A_n$. Allora $\forall v \in V$ si ha $A_n v \rightharpoonup Av$ in V' (convergenza debole della successione $\{A_n\}$). ■

Supponiamo ora che $\{A_n\}$ sia una successione di operatori monotoni cioè $\forall n \in \mathbb{N}$

$$(1.4) \quad \langle A_n(u) - A_n(v), u - v \rangle \geq 0, \quad \forall u, v \in V,$$

e supponiamo che $A: V \rightarrow V'$ sia emicontinuo, cioè

$$(1.5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall u, v, w \in V \text{ la funzione} \\ \lambda \rightarrow \langle A(u + \lambda v), w \rangle \\ \text{è continua da } \mathbb{R} \text{ in } \mathbb{R}. \end{array} \right.$$

Risulta allora:

TEOREMA 1.5. Supponiamo che $\{A_n\}$ e A verifichino le ipotesi (1.4) e (1.5) e supponiamo che la successione $\{A_n\}$ sia uniformemente limitata. Allora se $A_n v \rightarrow Av, \forall v \in V$ si ha $A = P\text{-lim } A_n$ (1).

DIMOSTRAZIONE. Osserviamo dapprima che se $\{x_k\}$ è una successione tale che $x_k \rightharpoonup x$ in V allora dalle ipotesi (1.4) risulta

$$(1.6) \quad \underline{\lim} \langle A_{n_k}(x_k), x_k - x \rangle \geq \underline{\lim} \langle A_{n_k}(x), x_k - x \rangle = 0.$$

Sia ora $x_k \rightharpoonup x$ in V e tale che $\overline{\lim} \langle A_{n_k}(x_k), x_k - x \rangle \leq 0$. Dalle (1.6) si ha allora:

$$(1.7) \quad \lim \langle A_{n_k}(x_k), x_k - x \rangle = 0.$$

(1) Il teorema (1.4) è una generalizzazione del seguente ben noto teorema: Sia $A: V \rightarrow V'$ un operatore monotono emicontinuo e limitato; allora A è pseudomonotono (vedi Proposizione 2.5 di [9]).

Per ogni $v \in V$, poniamo $w = (1 - \theta)x + \theta v$, $0 < \theta < 1$; risulta allora dalla (1.4)

$$\langle A_{n_k}(x_k), x_k - w \rangle \geq \langle A_{n_k}(w), x_k - w \rangle,$$

e quindi:

$$\begin{aligned} \theta \underline{\lim} \langle A_{n_k}(x_k), x - v \rangle &\geq \underline{\lim} \langle A_{n_k}(x_k), x - x_k \rangle + \theta \underline{\lim} \langle A_{n_k}(w), x - v \rangle \\ &\quad + \underline{\lim} \langle A_{n_k}(w), x_k - x \rangle. \end{aligned}$$

Tenuti presenti la (1.7) e le ipotesi del Teorema 1.5 risulta che:

$$\theta \underline{\lim} \langle A_{n_k}(x_k), x - v \rangle \geq \theta \langle A(w), x - v \rangle;$$

e dunque facendo $\theta \rightarrow 0$ si perviene alla dimostrazione del teorema. ■

È noto (vedi [4], § 2, pag. 128) che un operatore $A: V \rightarrow V'$ di tipo M , in generale non è pseudomonotono. Segue allora facilmente che in generale è falso l'inverso del Corollario 1.3. Però osserviamo che risulta:

TEOREMA 1.6. Sia $\{A_n\}$ una successione di operatori monotoni e simmetrici cioè

$$(1.8) \quad \langle A_n(u), v \rangle = \langle A_n(v), u \rangle, \quad \forall u, v \in V (\Rightarrow \text{lineari}).$$

Allora se $A = M\text{-lim } A_n$, si ha $A = P\text{-lim } A_n$.

DIMOSTRAZIONE. Sia $\{A_{n_k}\}$ una estratta della successione $\{A_n\}$ e $x_k \rightarrow x$ in V tale che $A_{n_k}(x_k) \rightarrow y$ in V' e $\underline{\lim} \langle A_{n_k}(x_k), x_k \rangle \leq \langle y, x \rangle$.

Allora dal Corollario 1.4 si ha: $A_{n_k}(x) \rightarrow A(x)$ in V' . Tenuto conto anche di (1.8) segue:

$$\begin{aligned} \underline{\lim} \langle A_{n_k}(x_k), x_k \rangle &\geq \underline{\lim} \langle A_{n_k}(x_k), x_k - x \rangle + \underline{\lim} \langle A_{n_k}(x_k), x \rangle \geq \\ &\geq \underline{\lim} \langle A_{n_k}(x), x_k - x \rangle + \langle A(x), x \rangle \geq \underline{\lim} \langle A_{n_k}(x_k), x \rangle + \\ &\quad + \underline{\lim} \langle A_{n_k}(x), -x \rangle + \langle A(x), x \rangle = \langle A(x), x \rangle. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Indichiamo ora con $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}(\lambda_0, A_0, V)$ la classe degli operatori lineari A tali che:

$$(1.9) \quad \lambda_0 \|x\|_V^2 \leq \langle A(x), x \rangle \leq A_0 \|x\|_V^2, \quad \forall x \in V, \quad 0 < \lambda_0 \leq A_0$$

Si ha:

TEOREMA 1.7. Supponiamo che $A, A_n \in \mathcal{L}, \forall n \in \mathbb{N}$ e $A = M\text{-lim } A_n$. Allora $A = G(w, s) \lim A_n$, cioè (vedi [1], Proposizione 2.3)

$$(1.10) \quad \begin{cases} (a) \quad \forall x \in V, \exists x_n \rightarrow x \text{ in } V \text{ tale che } A_n(x_n) \rightarrow A(x) \text{ in } V'; \\ (b) \quad \forall \text{ estratta } \{A_{n_k}\} \text{ della successione } \{A_n\}, \text{ se } x_k \rightarrow x \text{ e } \\ A_{n_k}(x_k) \rightarrow y, \text{ allora } y = A(x). \end{cases}$$

DIMOSTRAZIONE. Sia $x \in V$ e poniamo $x_n = A_n^{-1}(A(x))$.

Dalla ipotesi (1.9) segue che la successione $\|x_n\|_V$ è limitata e quindi esiste un'estratta $\{x_{n_k}\}$ tale che $x_{n_k} \rightarrow z \in V$,

$$A_{n_k}(x_{n_k}) = A(x) \rightarrow A(x), \quad \text{e} \quad \lim \langle A_{n_k}(x_{n_k}), x_{n_k} \rangle = \langle A(x), z \rangle.$$

Dalla (1.3) segue allora che $A(z) = A(x)$ cioè $z = x$.

Per dimostrare la (b) di (1.10) basta osservare che se $x_k \rightarrow x$ e $A_{n_k}(x_k) \rightarrow y$, allora $\lim \langle A_{n_k}(x_k), x_k \rangle = \langle y, x \rangle$ e quindi dalla (1.3) segue che $y = A(x)$. ■

Indichiamo infine con $\varepsilon = \varepsilon(\lambda_0, A_0, V)$ la classe degli operatori lineari verificanti (1.9) e (1.8). Risulta:

LEMMA 1.8. Se $A_n \in \varepsilon, \forall n \in \mathbb{N}$ allora:

$$A = G(w, s) \lim A_n \text{ se e soltanto se } A_n^{-1}(y) \rightarrow A^{-1}(y), \quad \forall y \in V'$$

(G convergenza).

Inoltre:

$$A_n v \rightarrow A v, \quad \forall v \in V \text{ se e soltanto se } A_n v \rightarrow A v, \quad \forall v \in V$$

e

$$A_n^{-1}(y) \rightarrow A^{-1}(y), \quad \forall y \in V'.$$

DIMOSTRAZIONE. Vedi Proposizione 2.3 di [1] e l'Osservazione 6, pag. 472 di [13]. ■

È ora ovvia conseguenza dei Corollari 1.3 e 1.4, dei Teoremi 1.5 e 1.7 e del Lemma 1.8 il seguente

COROLLARIO 1.9. Se $A_n \in \varepsilon$, $\forall n$, allora $A = M\text{-lim } A_n$ se e soltanto se

$$A_n v \rightarrow A v, \quad \forall v \in V.$$

2. In questo paragrafo vogliamo dare un esempio di una successione $\{A_n\}$ di operatori non lineari P -convergente ad un operatore A . Sia Ω un aperto di \mathbb{R}^N a frontiera uniformemente lipschitziana che goda della proprietà di cono. Siano A_i^n, B^n, C_i^n, D^n ($i = 1, \dots, N$) successioni di funzioni definite in $\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ e supponiamo che per $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$ risulti:

$$(2.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_i^n, B^n, C_i^n, D^n \text{ verificano le condizioni di Caratheodory (cioè} \\ \text{sono misurabili in } x \text{ per ogni fissato } (t, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \text{ e continue} \\ \text{in } (t, \xi) \text{ per q.o. fissato } x \in \Omega); \end{array} \right.$$

$$(2.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} |A_i^n(x, t, \xi)| \leq a_i |\xi| + a_{N+1}(x)|t| + a_{N+2}(x), \\ |B^n(x, t, \xi)| \leq \sum_{j=1}^N b_j(x) |\xi_j| + b_{N+1}(x)|t| + b_{N+2}(x), \\ |C_i^n(x, t, \xi)| \leq c_i |\xi| + c_{N+1}(x)|t| + c_{N+2}(x), \\ |D^n(x, t, \xi)| \leq \sum_{j=1}^N d_j(x) |\xi_j| + d_{N+1}(x)|t| + d_{N+2}(x), \\ \text{essendo } a_i, c_i \in \mathbb{R}_+, d_j(x), b_j(x) \in \mathbb{R}_+, i, j = 1, \dots, N+2, \\ b_j, a_{N+1} \in L^N(\Omega) \quad (j = 1, \dots, N), a_{N+2}, b_{N+2}, c_{N+2}, d_{N+2} \in L^2(\Omega), \\ b_{N+1} \in L^{N/2}(\Omega), c_{N+1} \in L^N(\Omega) + L^\infty(\Omega), d_j \in L^N(\Omega) + L^\infty(\Omega) \\ (j = 1, \dots, N), d_{N+1} \in L^{N/2}(\Omega) + L^\infty(\Omega); \end{array} \right.$$

$$(2.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^N (A_i^n(x, t, \xi) - A_i^n(x, t, \xi'_i)) (\xi_i - \xi'_i) > 0 \text{ per q.o. } x \in \Omega, \\ \forall t \in \mathbb{R}, \forall \xi, \xi' \in \mathbb{R}^N, \xi \neq \xi'; \end{array} \right.$$

$$(2.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^N A_i^n(x, t, \xi) \xi_i \geq \nu |\xi|^2, \nu \in \mathbb{R}_+, \text{ per q.o. } x \in \Omega, \\ \forall (t, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N. \end{array} \right.$$

Poniamo $\forall u, v, w \in H^1(\Omega)$:

$$(2.5) \quad \left\{ \begin{aligned} \alpha_n(u, w, v) &= \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} A_i^n(\cdot, u, \nabla w) v_{x_i} dx, \\ \beta_n(u, v) &= \int_{\Omega} B^n(\cdot, u, \nabla u) v dx, \\ \gamma_n(u, v) &= \int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^N C_i^n(\cdot, u, \nabla u) v_{x_i} + D^n(\cdot, u, \nabla u) v \right) dx \end{aligned} \right.$$

e supponiamo che $\forall u, v \in H^1(\Omega)$ si abbia:

$$(2.6) \quad \gamma_n(u, u-v) - \gamma_n(v, u-v) \geq 0.$$

Sia V un sottospazio chiuso di $H^1(\Omega)$ tale che $H_0^1(\Omega) \subset V \subset H^1(\Omega)$ e sia $L_n: V \rightarrow V'$ l'operatore così definito: se $u \in V$

$$(2.7) \quad \langle L_n u, v \rangle = \alpha_n(u, u, v) + \beta_n(u, v) + \gamma_n(u, v), \quad \forall v \in V.$$

Allora (vedi [11]) si ha che, $\forall n \geq 0$, l'operatore L_n è pseudomonotono. Supponiamo inoltre che per ogni $(t, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ si abbia:

$$(2.8) \quad \left\{ \begin{aligned} A_i^n(x, t, \xi) &\rightarrow A_i^0(x, t, \xi), \\ B^n(x, t, \xi) &\rightarrow B^0(x, t, \xi), \\ C_i^n(x, t, \xi) &\rightarrow C_i^0(x, t, \xi), \\ D^n(x, t, \xi) &\rightarrow D^0(x, t, \xi), \\ \forall x \notin I, \text{ mis } I &= 0, \end{aligned} \right.$$

e

$$(2.9) \quad \left\{ \begin{aligned} A_i^n, B^n, C_i^n, D^n, n \geq 1, &\text{ siano equicontinue in } (t, \xi) \text{ per q.o.} \\ x \in \Omega. & \end{aligned} \right.$$

TEOREMA 2.1. Nelle ipotesi fatte risulta $L_0 = P\text{-lim } L_n$. Inoltre se risulta $\forall n \geq 1$

$$(2.10) \quad \gamma_n(u, u-v) - \gamma_n(v, u-v) \geq \alpha \|u-v\|_{L^2(\Omega)}^2, \quad \forall u, v \in V, \quad \alpha \in \mathbb{R}_+,$$

allora

$$(2.11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{per ogni estratta } \{n_k\} \text{ degli interi positivi, se } \{u_k\} \text{ è una} \\ \text{successione tale che } u_k \rightarrow u \text{ in } V \text{ e } \lim \langle L_{n_k}(u_k), u_k - u \rangle \leq 0, \\ \text{si ha } u_k \rightarrow u \text{ in } V. \end{array} \right.$$

La dimostrazione del Teorema 2.1 è conseguenza dei seguenti lemmi.

LEMMA 2.2. Sia $\{n_k\}$ una estratta degli interi positivi, e $\{u_k\}$ una successione tale che $u_k \rightarrow u$ in V . Allora:

$$(2.12) \quad \lim \beta_{n_k}(u_k, u_k - u) = 0,$$

$$(2.13) \quad \lim \alpha_{n_k}(u_k, u, u_k - u) = 0,$$

$$(2.14) \quad \lim \gamma_{n_k}(u, u_k - u) = 0.$$

DIMOSTRAZIONE. Possiamo utilizzare in parte un ragionamento svolto in [11]. Più precisamente la (2.12) si dimostra (salvo ovvie modifiche) come la (1.4) di [11]. Al fine di provare la (2.13) osserviamo dapprima che dalle (2.5) risulta:

$$(2.15) \quad \begin{aligned} |\alpha_{n_k}(u_k, u, u_k - u)| &\leq \\ &\leq \left| \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} (A_i^{n_k}(\cdot, u_k, \nabla u) - A_i^{n_k}(\cdot, u, \nabla u))(u_k - u)_{x_i} dx \right| + \\ &+ \left| \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} (A_i^{n_k}(\cdot, u, \nabla u) - A_i^0(\cdot, u, \nabla u))(u_k - u)_{x_i} dx \right| + \\ &+ \left| \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} A_i^0(\cdot, u, \nabla u)(u_k - u)_{x_i} dx \right|. \end{aligned}$$

Poichè se $u_k \rightarrow u$ in $H^1(\Omega)$ allora esiste un'estratta ⁽²⁾: $u_k(x) \rightarrow u(x)$ q.o. in Ω , tenuta presente l'ipotesi (2.9) risulta:

$$(2.16) \quad \lim \left\{ A_i^{n_k}(x, u_k(x), \nabla u(x)) - A_i^{n_k}(x, u(x), \nabla u(x)) \right\} = 0 \text{ q.o. in } \Omega;$$

⁽²⁾ Che seguitiamo ad indicare con $\{u_k\}$.

dalla (2.16) segue allora facilmente (vedi Lemma (1.3) di [11]) che

$$(2.17) \quad \|A_i^{n_k}(\cdot, u_k, \nabla u) - A_i^{n_k}(\cdot, u, \nabla u)\|_{L^1(\Omega)} \rightarrow 0 .$$

Osserviamo ora che dalle (2.8), dal teorema di convergenza dominata di Lebesgue e dal fatto che $u_k \rightarrow u$ segue:

$$(2.18) \quad \left\{ \begin{array}{l} \|A_i^{n_k}(\cdot, u, \nabla u) - A_i^0(\cdot, u, \nabla u)\|_{L^1(\Omega)} \rightarrow 0 , \\ \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} A_i^0(\cdot, u, \nabla u)(u_k - u) \, dx \rightarrow 0 ; \end{array} \right.$$

si perviene alla dimostrazione di (2.13) passando al limite in (2.15) e tenendo presente le (2.17) e (2.18).

Per dimostrare la (2.14) basta osservare che:

$$\begin{aligned} \gamma_{n_k}(u, u_k - u) &= \int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^N (C_i^{n_k}(\cdot, u, \nabla u) - C_i^0(\cdot, u, \nabla u))(u_k - u)_{x_i} \right) dx + \\ &+ \int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^N C_i^0(\cdot, u, \nabla u)(u_k - u)_{x_i} \right) dx + \\ &+ \int_{\Omega} (D^{n_k}(\cdot, u, \nabla u) - D^0(\cdot, u, \nabla u))(u_k - u) \, dx + \int_{\Omega} D^0(\cdot, u, \nabla u)(u_k - u) \, dx , \end{aligned}$$

e quindi, se $u_k \rightarrow u$, dalla (2.8) segue facilmente:

$$\lim \gamma_{n_k}(u, u_k - u) = 0 . \quad \blacksquare$$

LEMMA 2.3. Sia $\{n_k\}$ una estratta degli interi positivi e sia $\{u_k\}$ una successione tale che $u_k \rightarrow u$ in $H^1(\Omega)$, e

$$(2.19) \quad \lim \{ \alpha_{n_k}(u_k, u_k, u_k - u) - \alpha_{n_k}(u_k, u, u_k - u) \} = 0 .$$

Allora

a) esiste una estratta $\{u_{k_n}\}$ tale che $u_{k_n}(x) \rightarrow u(x)$ q.o. in Ω e $\nabla u_{k_n}(x) \rightarrow \nabla u(x)$ q.o. in Ω ,

b) la successione $\left\{ \sum_{i=1}^N (u_k)_{x_i}^2 \right\}$ è equiassolutamente integrabile ⁽³⁾.

DIMOSTRAZIONE. Il Lemma 2.2 (a) si dimostra (salvo ovvie modifiche) come il Lemma 1.4 di [11].

Al fine di dimostrare la (b), osserviamo che dalle (2.3), (2.4) si ha per ogni sottoinsieme misurabile E di Ω :

$$\begin{aligned}
 (2.20) \quad & \nu \int_E \sum_{i=1}^N (u_k)_{x_i}^2 dx \leq \int_E \sum_{i=1}^N A_i^{n_k}(\cdot, u_k, \nabla u_k)(u_k)_{x_i} dx = \\
 & = \int_E \sum_{i=1}^N (A_i^{n_k}(\cdot, u_k, \nabla u_k) - A_i^{n_k}(\cdot, u_k, \nabla u)(u_k - u)_{x_i}) dx + \\
 & + \int_E \sum_{i=1}^N A_i^{n_k}(\cdot, u_k, \nabla u)(u_k - u)_{x_i} dx + \\
 & + \int_E \sum_{i=1}^N A_i^{n_k}(\cdot, u_k, \nabla u_k) u_{x_i} dx \leq \alpha_{n_k}(u_k, u_k, u_k - u) - \alpha_{n_k}(u_k, u, u_k - u) + \\
 & + \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N |A_i^{n_k}(\cdot, u_k, \nabla u) - A_i^0(\cdot, u, \nabla u)| |(u_k - u)_{x_i}| dx + \\
 & \quad + \int_E \sum_{i=1}^N (A_i^0(\cdot, u, \nabla u)(u_k - u)_{x_i} + A_i^{n_k}(\cdot, u_k, \nabla u_k) u_{x_i}) dx.
 \end{aligned}$$

Tenuto conto delle ipotesi (2.2) e (2.19), delle (2.17) e (2.18), dalla (2.20) si perviene alla dimostrazione del Lemma. ■

Siamo ora in grado di dimostrare il Teorema 2.1.

⁽³⁾ Una successione $\{f_n\}$, $f_n \in L^1(\Omega)$ si dice equiassolutamente integrabile se $\forall \varepsilon > 0$ esistono δ_ε e $A_\varepsilon \subset \Omega$ con $\text{mis } A_\varepsilon < \infty$ tale che per ogni $E \subset \Omega$, $\text{mis } E < \delta_\varepsilon$ si abbia $\int_E |f_n| dx < \varepsilon$, $\int_{\Omega \setminus A_\varepsilon} |f_n| dx < \varepsilon$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 2.1. Osserviamo innanzitutto che la (0.1) (a) segue immediatamente dalle ipotesi (2.2). Al fine di dimostrare la (0.1) (b) osserviamo dapprima che se $\{n_k\}$ è una estratta degli interi positivi, se $u_k \rightarrow u$ e $\overline{\lim} \langle L_{n_k}(u_k), u_k - u \rangle \leq 0$ risulta (tenuto conto di (2.3), (2.6) e del Lemma 2.2) che:

$$\begin{aligned} 0 &\geq \overline{\lim} \langle L_{n_k}(u_k), u_k - u \rangle - \lim \beta_{n_k}(u_k, u_k - u) \geq \\ &\geq \overline{\lim} (\alpha_{n_k}(u_k, u_k, u_k - u) + \gamma_{n_k}(u_k, u_k - u)) \geq \\ &\geq \underline{\lim} (\alpha_{n_k}(u_k, u, u_k - u) + \gamma_{n_k}(u, u_k - u)) = 0; \end{aligned}$$

e quindi:

$$(2.21) \quad \lim [\alpha_{n_k}(u_k, u_k, u_k - u) + \gamma_{n_k}(u_k, u_k - u)] = 0$$

e quindi $\lim \langle L_{n_k}(u_k), u_k - u \rangle = 0$.

Inoltre, si ha dalle (2.3) e (2.6), (2.13), (2.14), (2.19):

$$\begin{aligned} 0 = \lim \alpha_{n_k}(u_k, u, u_k - u) &\leq \underline{\lim} \alpha_{n_k}(u_k, u_k, u_k - u) \leq \\ &\leq \overline{\lim} (\alpha_{n_k}(u_k, u_k, u_k - u) + \gamma_{n_k}(u_k, u_k - u) - \gamma_{n_k}(u, u_k - u)) = 0 : \end{aligned}$$

otteniamo quindi che

$$(2.22) \quad \lim \alpha_{n_k}(u_k, u_k, u_k - u) = 0 .$$

Tenuto presente le ipotesi (2.2) e (2.9) e il Lemma 2.3, si deduce facilmente (vedi [11], Teorema 1.5) che $\langle L_{n_k}(u_k), \varphi \rangle \rightarrow \langle L_0(u), \varphi \rangle, \forall \varphi \in V$, e quindi $L_0 = P\text{-}\lim L_n$.

Supponiamo infine che sussista la (2.10); si ha dalle (2.14), (2.21) e (2.22)

$$\underline{\lim} \alpha \|u_k - u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \underline{\lim} (\gamma_{n_k}(u_k, u_k - u) - \gamma_{n_k}(u, u_k - u)) = 0$$

e quindi $u_k \rightarrow u$ in $L^2(\Omega)$. Inoltre, poichè dal Lemma 2.3 segue che $\nabla u_k \rightarrow \nabla u$ in $L^2(\Omega)$, si ha $u_k \rightarrow u$ in $H^1(\Omega)$.

3. Disequazioni variazionali.

Sia data una successione $\{K_n\}$ di convessi chiusi contenuti in V ; sia $\{A_n\}$ una successione di operatori, $A_n: K_n \rightarrow V'$. Vogliamo stu-

diare la « convergenza » delle soluzioni $u_n \in K_n$ delle disequazioni:

$$(3.1) \quad \langle A_n(u_n), u_n - v \rangle \leq \langle T_n, u_n - v \rangle, \quad \forall v \in K_n,$$

essendo $\{T_n\}$ una successione tale che $\{T_n\} \subset V'$.

A tale scopo richiamiamo la seguente definizione (vedi [12]). $K_n \xrightarrow{\mathcal{M}} K$ se e solo se $K \subset s\text{-lim inf } K_n, w\text{-lim sup } K_n \subset K$, essendo

$$(3.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} s\text{-lim inf } K_n = \{v \in V: \exists v_n \in K_n, v_n \rightarrow v \text{ in } V\}, \\ w\text{-lim sup } K_n = \{v \in V: \exists v_k \in K_{n_k}, v_k \rightarrow v \text{ in } V, \\ \text{ove } \{K_{n_k}\} \text{ è una estratta di } \{K_n\}\}. \end{array} \right.$$

Sia $A: K \rightarrow V'$. Risulta

TEOREMA 3.1. Supponiamo che $A = P\text{-lim } A_n$ nel senso della definizione (0.1); sia $\{T_n\} \subset V'$ tale che $T_n \rightarrow T \in V'$, $K_n \xrightarrow{\mathcal{M}} K$. Se $\forall n \in \mathbb{N}$ la disequazione (3.1) ha una soluzione $u_n \in K_n$ e se esiste $M \in \mathbb{R}_+$ tale che

$$(3.3) \quad \|u_n\|_V \leq M$$

allora da ogni successione $\{u_n\}$ è possibile estrarre una sottosuccessione $\{u_{n_k}\}$ tale che $u_{n_k} \rightarrow u \in K$, $\lim \langle A_{n_k}(u_{n_k}), u_{n_k} - u \rangle \leq 0$; inoltre si ha:

$$(3.4) \quad \langle A(u), u - v \rangle \leq \langle T, u - v \rangle, \quad \forall v \in K.$$

DIMOSTRAZIONE (vedi anche [7], Teorema 4.2). Osserviamo che dalla (3.3) segue che esiste una estratta $\{u_{n_k}\}$ della successione $\{u_n\}$ tale che $u_{n_k} \rightarrow u \in K$. Inoltre poichè $K_n \xrightarrow{\mathcal{M}} K$, esiste $\{v_n\} \subset V$, $v_n \in K_n$, $v_n \rightarrow u$ in V . Ne segue:

$$(3.5) \quad \begin{aligned} \overline{\lim} \langle A_{n_k}(u_{n_k}), u_{n_k} - u \rangle &\leq \overline{\lim} \langle A_{n_k}(u_{n_k}), u_{n_k} - v_{n_k} \rangle + \\ &+ \overline{\lim} \langle A_{n_k}(u_{n_k}), v_{n_k} - u \rangle \leq \overline{\lim} \langle T_{n_k}, u_{n_k} - v_{n_k} \rangle + \\ &+ \overline{\lim} \langle A_{n_k}(u_{n_k}), v_{n_k} - u \rangle = 0. \end{aligned}$$

Sia $v \in K$ e $K_n \ni v_n \rightarrow v$. Poichè $A = P\text{-lim } A_n$, dalla (3.1) e (3.5) si ha:

$$\begin{aligned} \langle T, u - v \rangle &= \lim \langle T_{n_k}, u_{n_k} - v_{n_k} \rangle \geq \underline{\lim} \langle A_{n_k}(u_{n_k}), u_{n_k} - v_{n_k} \rangle \geq \\ &\geq \underline{\lim} \langle A_{n_k}(u_{n_k}), u_{n_k} - v \rangle + \underline{\lim} \langle A_{n_k}(u_{n_k}), v - v_{n_k} \rangle \geq \langle A(u), u - v \rangle. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

OSSERVAZIONE 3.2. Sia $\{T_n\} \subset V'$ una successione tale che $T_n \rightarrow T \in V'$; sia $\{K_n\}$ una successione di convessi chiusi contenuti in V tali che $K_n \xrightarrow{\mathcal{M}} V$. Se $\{A_n\}$ è una successione di operatori definiti in V tali che $A = M\text{-lim } A_n$, essendo $A: V \rightarrow V'$, e se $\forall n \in \mathbf{N}$ esiste $u_n \in K_n$ tale che

$$\langle A_n(u_n), v \rangle = \langle T_n, v \rangle, \quad \forall v \in V,$$

allora, ragionando come nel Teorema 3.1, si dimostra che, se è verificata l'ipotesi (3.3), esiste $u \in V$ tale che:

$$\langle A(u), v \rangle = \langle T, v \rangle, \quad \forall v \in V.$$

OSSERVAZIONE 3.3. Siano $A, A_n: V \rightarrow V'$ tali che

$$A, A_n \in \mathcal{L}(\lambda_0, A_0, V), \quad \forall n \in \mathbf{N},$$

(vedi (1.9)). Allora è noto (vedi [14]) che $\forall n \in \mathbf{N}$ esiste una funzione $u_n \in K_n$ verificante la (3.1); inoltre sussiste la (3.3). Se supponiamo che $A_n v \rightarrow A v, \forall v \in V$, allora dai Teoremi 1.5 e 3.1 segue che esiste una funzione $u \in K$ soluzione di (3.4). Inoltre dalla (3.5) e dalla (1.9) segue facilmente che $u_n \rightarrow u$ in V . (Segnaliamo che nel caso in cui $A, A_n \in \varepsilon(\lambda_0, A_0, V)$ — vedi (1.8), (1.9) — ritroviamo i risultati di [2]).

OSSERVAZIONE 3.4. Siano $L_0, \{L_n\}: V \rightarrow V'$ definiti come in (2.7) e consideriamo una successione K_n di convessi chiusi tali che $K_n \xrightarrow{\mathcal{M}} K$. Il ragionamento fatto in [11], Teorema 2.3, permette di dimostrare che sotto opportune ipotesi sulle successioni $\{K_n\}, \{\alpha_n\}, \{\beta_n\}, \{\gamma_n\}$ (vedi le definizioni (2.5)), $\forall n \in \mathbf{N}$ esiste una funzione $u_n \in K_n$ soluzione della seguente disequazione (non coerciva):

$$\langle L_n(u_n), u_n - v \rangle \leq \langle T_n, u_n - v \rangle, \quad \forall v \in K_n$$

essendo $\{T_n\} \subset V'$. Inoltre se $T_n \rightarrow T_0$ in V' , sempre nelle ipotesi del Teorema 2.3 di [11], esiste $C \in \mathbf{R}_+$ tale che $\|u_n\|_V \leq C, \forall n \in \mathbf{N}$.

Allora dai Teoremi 2.1 e 3.1 possiamo dedurre che esiste $u \in K$ soluzione della seguente disequazione (non coerciva)

$$\langle L_0(u), u - v \rangle \leq \langle T_0, u - v \rangle, \quad \forall v \in K.$$

Inoltre segue facilmente (vedi la dimostrazione del Teorema 2.1) che se vale l'ipotesi (2.10), esiste una estratta $\{u_{n_k}\}$ della successione $\{u_n\}$ tale che $u_{n_k} \rightarrow u$ in V . ■

Vogliamo ora applicare il Teorema 3.1 per studiare la « regolarità » delle soluzioni di talune disequazioni variazionali. In quanto segue useremo dei procedimenti in parte simili a quelli già usati in [6], [10] e [14].

Sia ora Ω un sottoinsieme aperto limitato di \mathbf{R}^N con frontiera $\partial\Omega$ regolare e siano $A_i: \Omega \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^N \rightarrow \mathbf{R}$ ($i = 1, \dots, N$) funzioni soddisfacenti alle condizioni di Caratheodory (vedi (2.1)) e tali che:

$$(3.6) \quad \left\{ \begin{array}{l} a) \text{ esiste } q: 1 < q < \infty, c_0 \in \mathbf{R}_+ \text{ e una funzione } R_0 \in L^q(\Omega) \\ \quad (q' = q(q-1)) \text{ tale che} \\ \quad |A_i(x, t, \xi)| \leq R_0(x) + c_0(|t|^{q-1} + |\xi|^{q-1}), \quad i = 1, \dots, N \\ \quad \text{per q.o. } x \in \Omega, \forall (t, \xi) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^N, \\ b) \sum_{i=1}^N (A_i(x, t, \xi) - A_i(x, t, \xi'))(\xi_i - \xi'_i) > 0, \text{ per q.o. } x \in \Omega, \\ \quad \forall t \in \mathbf{R}, \forall \xi, \xi' \in \mathbf{R}^N, \xi \neq \xi', \\ c) \sum_{i=1}^N A_i(x, t, \xi) \xi_i \geq \nu |\xi|^q, \\ \quad \nu \in \mathbf{R}_+, \text{ per q.o. } x \in \Omega, \forall (t, \xi) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^N. \end{array} \right.$$

Siano $\phi, \psi \in H^{1,q}(\Omega)$, t.c. $\phi \leq \psi$ in Ω , $\phi \leq 0 \leq \psi$ su $\partial\Omega$ nel senso di $H^{1,q}(\Omega)$ (vedi [14]).

Sia $p: \Omega \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^N \rightarrow \mathbf{R}$ una funzione soddisfacente alle condizioni di Caratheodory, tale che

$$(3.7) \quad \left\{ \begin{array}{l} |p(x, t, \xi)| \leq R_1(x) + c_1 |\xi|^{q-1} \quad \text{per q.o. } x \in \Omega, \\ \forall t: \phi(x) \leq t \leq \psi(x), \text{ essendo } R_1 \in L^q(\Omega) \text{ e } c_1 \in \mathbf{R}_+. \end{array} \right.$$

Per ogni $u, v \in H^{1,q}(\Omega)$ indichiamo con

$$(3.8) \quad a(u, v) = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} A_i(\cdot, u, \nabla u) v_{x_i} dx$$

e indichiamo con

$$(3.9) \quad (Pv)(x) = p(x, v(x), \nabla v(x)), \quad x \in \Omega.$$

Supponiamo che esistano $f, g \in L^q(\Omega)$ tali che

$$(3.10) \quad \begin{cases} a(\phi, v) + \int_{\Omega} (P\phi)v \, dx \leq \int_{\Omega} fv \, dx, & \forall v \in H_0^{1,q}(\Omega), v \geq 0, \\ a(\psi, v) + \int_{\Omega} (P\psi)v \, dx \geq \int_{\Omega} gv \, dx, & \forall v \in H_0^{1,q}(\Omega), v \geq 0. \end{cases}$$

Nelle ipotesi sopradette vogliamo dimostrare che esiste una soluzione $u \in K$ « regolare » della seguente disequazione

$$\begin{cases} a(u, u - v) + \int_{\Omega} (Pu)(u - v) \, dx \leq \langle T, u - v \rangle, & \forall v \in K \\ \text{essendo} \\ K = \{v \in H_0^{1,q}(\Omega) : \phi \leq v \leq \psi\}, & T \in L^q(\Omega). \end{cases}$$

A tale scopo poniamo $\forall i = 1, \dots, N$

$$\tilde{A}_i(x, t, \xi) = \begin{cases} A_i(x, \phi(x), \xi) & t < \phi(x), \\ A_i(x, t, \xi) & \phi(x) \leq t \leq \psi(x), \\ A_i(x, \psi(x), \xi) & \psi(x) < t. \end{cases}$$

Allora è noto che le funzioni \tilde{A}_i soddisfano le ipotesi (3.6). Indichiamo $\forall u, v \in H^{1,q}(\Omega)$

$$\tilde{a}(u, v) = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \tilde{A}_i(\cdot, u, \nabla u) v_{x_i} \, dx.$$

Sia $\mathfrak{C}: H^{1,q}(\Omega) \rightarrow H^{1,q}(\Omega)$ così definito:

$$\forall u \in H^{1,q}(\Omega): (\mathfrak{C}u)(x) = \begin{cases} \phi(x) & u(x) < \phi(x), \\ u(x) & \phi(x) \leq u(x) \leq \psi(x), \\ \psi(x) & \psi(x) < u(x), \end{cases}$$

per q.o. $x \in \Omega$.

È noto che $\mathfrak{C}: H^{1,q}(\Omega) \rightarrow H^{1,q}(\Omega)$ risulta limitata e continua

(vedi [6]). Indichiamo poi con $\gamma: \Omega \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ la funzione così definita:

$$\gamma(x, t) = \begin{cases} -(-t + \phi(x))^{q-1} & t < \phi(x), \\ 0 & \phi(x) \leq t \leq \psi(x), \\ (t - \psi(x))^{q-1} & \psi(x) < t. \end{cases}$$

Dalle posizioni precedenti segue (vedi [6]) che esiste $\beta > 0$ tale che la seguente forma

$$b(u, v) = \tilde{a}(u, v) + \int_{\Omega} (P(\mathcal{C}u))v \, dx + \beta \int_{\Omega} \gamma(\cdot, u)v \, dx$$

è definita su $H^{1,q}(\Omega) \times H^{1,q}(\Omega)$ ed è coerciva cioè

$$(3.11) \quad \frac{b(v, v)}{\|v\|_{H^{1,q}(\Omega)}} \xrightarrow{\|v\|_{H^{1,q}(\Omega)} \rightarrow +\infty} +\infty.$$

Per $\forall n \in \mathbf{N}$ siano $\theta_{1,n}, \theta_{2,n}: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ le funzioni così definite

$$\theta_{1,n}(t) = \begin{cases} 1 & t \leq -1/n, \\ -nt & -1/n < t \leq 0, \\ 0 & t > 0, \end{cases}$$

e

$$\theta_{2,n}(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0, \\ nt & 0 < t \leq 1/n, \\ 1 & t > 1/n. \end{cases}$$

Per $\forall n$, poniamo $\forall u, v \in H^{1,q}(\Omega)$

$$c_n(u, v) = - \int_{\Omega} (\text{Max}(f - T, 0)\theta_{1,n}(u - \phi) + \min(g - T, 0)\theta_{2,n}(u - \psi))v \, dx$$

e siano $C_n, A_n: H_0^{1,q}(\Omega) \rightarrow H^{-1,q}(\Omega)$ gli operatori così definiti: se $u \in H_0^{1,q}(\Omega)$

$$\langle C_n(u), v \rangle = c_n(u, v), \quad \forall v \in H_0^{1,q}(\Omega),$$

$$\langle A_n(u), v \rangle = b(u, v) + c_n(u, v), \quad \forall v \in H_0^{1,q}(\Omega).$$

Sia $A: K \rightarrow H^{-1,q}(\Omega)$ l'operatore così definito: $\forall u \in K$

$$\langle A(u), v \rangle = a(u, v) + \int_{\Omega} (Pu)v \, dx, \quad \forall v \in H_0^{1,q}(\Omega).$$

Posto $K_n = \{u \in H_0^{1,q}(\Omega) : \phi - 1/n \leq u \leq \psi + 1/n\}$ è chiaro che $K_n \xrightarrow{\mathcal{M}} K$. Inoltre considerati $A_n: K_n \rightarrow H^{-1,q}(\Omega)$, si ha:

TEOREMA 3.5. Nelle ipotesi fatte risulta $A = P\text{-lim } A_n$ nel senso della definizione (0.1). Inoltre, per ogni estratta $\{n_k\}$ degli interi positivi, se $\{u_k \in K_{n_k}\}$ è una successione tale che $u_k \rightarrow u \in K$ e $\overline{\lim} \langle A_{n_k}(u_k), u_k - u \rangle \leq 0$, allora $u_k \rightarrow u$.

DIMOSTRAZIONE. La (a) di (0.1) è di ovvia verifica. Sia $\{A_{n_k}\}$ una estratta della successione $\{A_n\}$ e sia $\{u_k \in K_{n_k}\}$, $u_k \rightarrow u$; dalla definizione di $\{K_n\}$ si ha $u \in K$. Sia inoltre $\overline{\lim} \langle A_{n_k}(u_k), u_k - u \rangle \leq 0$; poichè $u_k \rightarrow u$ in $L^q(\Omega)$, si ha

$$\begin{aligned} \lim \langle C_{n_k}(u_k), u_k - u \rangle &= 0, \\ \lim \left(\int_{\Omega} (P(\mathfrak{C}u_k))(u_k - u) \, dx + \beta \int_{\Omega} \gamma(\cdot, u_k)(u_k - u) \, dx \right) &= 0, \end{aligned}$$

e quindi $\overline{\lim} \tilde{a}(u_k, u_k - u) \leq 0$. Ne segue (vedi [5], pag. 28) che $u_k \rightarrow u$ in $H^{1,q}(\Omega)$ e (vedi [6]) $\lim b(u_k, u_k - v) = b(u, u - v)$, $\forall v \in H_0^{1,q}(\Omega)$.

Se si osserva inoltre che $\{C^n\}$ è una successione di operatori monotoni, si deduce che $\forall v \in K$:

$$\begin{aligned} \underline{\lim} \langle A_{n_k}(u_k), u_k - v \rangle &\geq \underline{\lim} b(u_k, u_k - v) + \underline{\lim} \langle C_{n_k}(u_k), u_k - v \rangle \geq \\ &\geq \langle A(u), u - v \rangle + \underline{\lim} \langle C_{n_k}(v), u_k - v \rangle = \langle A(u), u - v \rangle. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Osserviamo ora che dalle ipotesi fatte si ha (vedi [6], e [9], Teorema 2.8) che $\forall n \in \mathbb{N}$ esiste $u_n \in H_0^{1,q}(\Omega)$ tale che

$$(3.12) \quad \begin{cases} \langle A_n(u_n), v \rangle = \langle T, v \rangle, & \forall v \in H_0^{1,q}(\Omega); \\ \|u_n\|_{H_0^{1,q}(\Omega)} \leq M, & M \in \mathbb{R}_+. \end{cases}$$

Si ha inoltre:

LEMMA 3.6. Sia u_n , $n \in \mathbb{N}$, definita come in (3.12). Allora $u_n \in K_n$.

DIMOSTRAZIONE. Proviamo che $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_n \leq \psi + 1/n$; sia

$$v = \left(u_n - \psi - \frac{1}{n}\right)^+ = \max\left(u_n - \psi - \frac{1}{n}, 0\right) \in H_0^{1,q}(\Omega).$$

Dalle ipotesi fatte e da (3.12) si ha:

$$\begin{aligned} \langle T, v \rangle + \int_{\Omega} \min(g - T, 0) v \, dx &= \langle T, v \rangle - \langle C_n(u_n), v \rangle = \\ &= \tilde{a}(u_n, v) + \int_{\Omega} [(P(\mathcal{C}u_n))v + \beta(u_n - \psi)^{q-1}v] \, dx \geq a(\psi, v) + \\ &\quad + \int_{\Omega} (P\psi)v \, dx + \beta \|v\|_{L^q(\Omega)}^q \geq \int_{\Omega} gv \, dx + \beta \|v\|_{L^q(\Omega)}^q. \end{aligned}$$

Dalle disuguaglianze soprascritte segue allora che $v = 0$. In modo del tutto analogo si prova che $\forall n \in \mathbf{N}$ $u_n \geq \phi - 1/n$. ■

Dai Teoremi 3.1 e 3.5 e dal Lemma 3.6 si ha:

TEOREMA 3.7. Supponiamo che valgano le ipotesi sopraddette. Allora da ogni successione $\{u_n\}$, con u_n definita come in (3.12), è possibile estrarre una sottosuccessione $\{u_{n_k}\}$ tale che $u_{n_k} \rightarrow u$; si ha $u \in K$,

$$(3.13) \quad \langle A(u), u - v \rangle \leq \langle T, u - v \rangle, \quad \forall v \in K.$$

Risulta inoltre:

$$(3.14) \quad \langle A(u), v \rangle = \langle N, v \rangle + \langle T, v \rangle, \quad \forall v \in H_0^{1,q}(\Omega)$$

essendo $N \in L^q(\Omega)$:

$$\begin{aligned} \langle N, v \rangle &= \lim \int_{\Omega} (\text{Max}(f - T, 0)\theta_{1, n_k}(u_{n_k} - \phi)v + \\ &\quad + \min(g - T, 0)\theta_{2, n_k}(u_{n_k} - \psi)v) \, dx, \quad \forall v \in H_0^{1,q}(\Omega). \end{aligned}$$

DIMOSTRAZIONE. Basta osservare che dalle (3.12), dai Teoremi 3.1 e 3.5, e dal Lemma 3.6 esiste una estratta $\{u_{n_k}\}$ della successione $\{u_n\}$ (definita dalle (3.12)) tale che $u_{n_k} \rightarrow u$, u soluzione di (3.13). Passando al limite nella (3.12) si perviene alla (3.14).

BIBLIOGRAFIA

- [1] A. AMBROSETTI - C. SBORDONE, Γ^- convergenza e G convergenza per problemi non lineari di tipo ellittico, Bollettino U.M.I., **13** (1976), pp. 352-362.
- [2] L. BOCCARDO - I. CAPUZZO DOLCETTA, Stabilità delle soluzioni di disequazioni variazionali ellittiche e paraboliche quasi lineari, Pubbl. Ist. Mat. Università dell'Aquila, no. 10 (1977).
- [3] L. BOCCARDO - P. MARCELLINI, Sulla convergenza delle soluzioni di disequazioni variazionali, Ann. Mat. Pura Appl., (IV), **110** (1976), pp. 137-159.
- [4] H. BREZIS, Equations et inequations non linéaires dans les espaces vectoriels en dualité, Ann. Inst. Fourier Grenoble, **18**, 1 (1968), pp. 115-175.
- [5] F. E. BROWDER, Existence theorems for non linear partial differential equations, Proc. Sympos. Pure Math., **16**, American Math. Soc. (1970), pp. 1-60.
- [6] P. HESS, A criterion for the existence of solutions of non linear elliptic boundary value problems, Proc. R.S.E. (A), **74** (1974-75), pp. 49-54.
- [7] N. KENMUCHI, Non linear operators of monotone type in reflexive Banach spaces and non linear perturbations, Hiroshima Math. J., **4** (1974), pp. 229, 263.
- [8] N. KENMUCHI, Pseudomonotone operators and non linear elliptic boundary value problems, J. Math. Soc. Japan, **27** (1975), pp. 121-149.
- [9] J. L. LIONS, Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires, Dunod, Gauthier-Villars, Paris (1969).
- [10] M. E. MARINA BORGHESE, Esistenza e unicità della soluzione di una disuguaglianza variazionale associata a un operatore non coercivo, Boll. U.M.I., (4), **10** (1974), pp. 500-511.
- [11] M. E. MARINA BORGHESE, Su una estensione di un teorema di Leray-Lions agli insiemi non limitati, in corso di stampa su Ann. Mat. Pura Appl.
- [12] U. MOSCO, Convergence of convex sets and of solutions of variational inequalities, Adv. in Math., **3** (1969), pp. 510-585.
- [13] S. SPAGNOLO, Convergence in energy for elliptic operators, in Numerical Solutions of Partial Differential Equations III, Synspade 1975, Academic Press (1976).
- [14] G. STAMPACCHIA, Variational inequalities, Proc. Nato Advanced Study, Inst. Theory and Applications of monotone operators, Venice (1968), pp. 101-192.

Manoscritto pervenuto in redazione il 28 agosto 1978.