RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

GIUSEPPE ZAMPIERI

Un'estensione del teorema sulle suriezioni fra spazi di Fréchet. Qualche sua applicazione

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 61 (1979), p. 145-153

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1979__61__145_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 61 (1979)

Un'estensione del teorema sulle suriezioni fra spazi di Fréchet. Qualche sua applicazione.

GIUSEPPE ZAMPIERI (*)

0. Introduzione.

In questo articolo si stabilisce una condizione necessaria e sufficiente perchè, assegnata una applicazione lineare e continua fra spazi vettoriali topologici $f\colon E \to F$ e un sottospazio lineare G di F, si abbia, sotto certe ipotesi, $f(E) \supset G$. Da ciò si faranno derivare criteri per la risolubilità « in grande » di equazioni e di sistemi differenziali alle derivate parziali con coefficienti costanti.

1. TEOREMA 1.

Siano E, F spazi metrizzabili con E completo. Si indichino con E'_s e F'_s i loro duali muniti delle topologie deboli.

Data un'applicazione lineare f di E'_s in F'_s, f è continua se e solo se il suo grafico è un chiuso di $E'_s \times F'_s$.

DIMOSTRAZIONE. La necessità è ovvia.

Viceversa si osservi che $E'_s \times F'_s$ è canonicamente isomorfo a $(E \times F)'_s$. Perciò $\mathrm{Gr}\, f$ (grafico di f) pensato come sottospazio di $(E \times F)'_s$ è isomorfo a $((E \times F)/\mathrm{Gr}\, f^0)'_s$ ove $\mathrm{Gr}\, f^0$ indica la polare di $\mathrm{Gr}\, f$; ne segue che esso è il duale debole di uno spazio metrizzabile.

(*) Indirizzo dell'A.: Seminario Matematico dell'Università - Via Belzoni 7 - I-35100 Padova.

Siano p_1, p_2 le restrizioni a Gr f rispettivamente della prima e seconda proiezione canonica di $E'_s \times F'_s$; è chiaro che p_1 è una bigezione continua di Gr f su E'_s. Si osservi allora che dati X, Y metrizzabili con Y completo e f bigezione lineare continua di X'_s su Y'_s essa è un isomorfismo. Infatti poichè f è suriettiva, la sua trasposta

$$^t f\colon\ Y_s \to X_s$$

è un omomorfismo (cfr. [3], Prop. 35.7). Poichè Y e X sono metrizzabili $^t f$ è omomorfismo anche per le topologie iniziali ([3], Prop. 37.5). Perciò dato che Y è completo $^t f(Y)$ è chiuso in X da cui

$$f\colon\ X'_s \to Y'_s$$

risulta isomorfismo.

In base a ciò p_1 è un isomorfismo onde f è continua dato che $f = p_2 \circ p_1^{-1}$. q.e.d.

Teorema 2. Si consideri il seguente diagramma

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "u"] & F \\ H \arrow[u, "i_1"] \arrow[r, "q"] & G \arrow[u, "i_2"'] \end{tikzcd}$$

ove

a) i_1, i_2, u, q sono applicazioni lineari e continue ed inoltre $i_2 \circ q = u \circ i_1$ (cioè il diagramma è commutativo);

b) E, G sono spazi di Fréchet; H, F sono localmente convessi e di Hausdorff;

c) la trasposta di q è iniettiva.

Allora le seguenti proposizioni sono equivalenti

i) $u(E) \supset i_2(G)$,

ii) $^t i_1(\overline{^t u F'}^{\,s}) \subset {}^t q(G')$ ove con $\overline{^t u F'}^{\,s}$ si è indicata la chiusura di $^t u(F')$ in E'_s.

DIMOSTRAZIONE. ii) implica i).

Si consideri la mappa $M\colon {}^tuF'^{-s} \to G'_s$ così definita: se $e' \in {}^tuF'^{-s}$ e ${}^ti_1(e') = {}^tq(g')$, $M(e') = g'$. M è ben definita perchè ${}^tq$ è iniettiva ed è lineare.

Osservato che ${}^tuF'^{-s} = \operatorname{Ker} u^0$ e che $\operatorname{Ker} u^0$, munito della topologia indotta da E'_s, è isomorfo algebricamente e topologicamente a $(E/\operatorname{Ker} u)'_s$, l'isomorfismo essendo la trasposta della proiezione canonica da E su $E/\operatorname{Ker} u$, si conclude che ${}^tuF'^{-s}$, con la topologia indotta da E'_s, è il duale debole di uno spazio di Fréchet. Pertanto se si prova che $\operatorname{Gr} M$ è un chiuso di ${}^tuF'^{-s} \times G'_s$, M risulta continua per il Teorema 1.

Infatti: $(e'_j, M(e'_j))$ converga verso (e'_0, g'_0) ove $M(e'_j) = g'_j$ se ${}^tq(g'_j) = {}^ti_1(e'_j)$. Allora, per la continuità di ${}^tq$ da G'_s in H'_s, ${}^tq(g'_j)$ converge in H'_s verso ${}^tq(g'_0)$ e, per quella di ${}^ti_1$, verso ${}^ti_1(e'_0)$.

Allora ${}^ti_1(e'_0) = {}^tq(g'_0)$ cioè $g'_0 = M(e'_0)$.

Sia

$$ {}^tM\colon G \to ({}^tuF'^{-s})' = \frac{E}{\operatorname{Ker} u} $$

la trasposta di M.

È immediato dimostrare che per ogni $g \in G$ $i_2(g) = u({}^tM(g))$. Infatti per ogni $f' \in F'$ si ha

$$ \langle f', u({}^tM(g))\rangle = \langle {}^tu(f'), {}^tM(g)\rangle = $$
$$ = \langle M({}^tu(f')), g\rangle = \langle {}^ti_2(f'), g\rangle = \langle f', i_2(g)\rangle $$

ove con lo stesso crochet si sono indicate le varie dualità in questione.

i) implica ii).

Su ${}^tu(F')$ vi sia la topologia indotta da E'_s. Si consideri la mappa $L\colon G \to ({}^tu(F'))'_s$ così definita:

$$ \text{se } g \in G \ \ L(g)\colon {}^tu(F') \to C\,,\ \ L(g)[{}^tu(f')] = \langle f', i_2(g)\rangle\,. $$

$L(g)$ è ben definita perchè se ${}^tu(f'_1) = {}^tu(f'_2)$ allora $f'_2 - f'_1$ è nulla su $u(E) \supset i_2(G)$. $L(g)$ è lineare (ovvio) e $L(g) \in ({}^tu(F'))'$. Infatti sia ${}^tu(f'_j)$ una rete convergente a zero. Preso $e \in E$ tale che $u(e) = i_2(g)$ si ha

$$ \lim_j L(g)[{}^tu(f'_j)] = \lim_j \langle f'_j, i_2(g)\rangle = \lim_j \langle f'_j, u(e)\rangle = \lim_j \langle {}^tu(f'_j), e\rangle = 0\,, $$

Ovvio che L è lineare e continua. Sia

$$M\colon G \to ({}^t u F'^{-s})'$$

così definita: $M(g)$ è l'estensione per continuità di $L(g)$ a ${}^t u F'^{-s}$.

Si indichi ora con $(E'_s)'_b$ il duale forte del duale debole di E. $(E'_s)'_b$ è E con la topologia dell'uniforme convergenza sui limitati di E'_s o equivalentemente sugli equicontinui di E' (E è F-spazio e quindi barrellato) che è là topologia iniziale di ogni spazio localmente convesso e di Hausdorff.

Da ciò segue che E'_s è semiriflessivo e tenuto conto che ${}^t u F'^{-s}$ è un suo sottospazio chiuso e quindi semiriflessivo, si ha:

$$({}^t u F'^{-s})'_b = \frac{E}{\operatorname{Ker} u}\,.$$

Infatti

$$\big(({}^t u F'^{-s})'_b\big)' = {}^t u F'^{-s} = \left(\frac{E}{\operatorname{Ker} u}\right)'.$$

Per cui $E/\operatorname{Ker} u$ ha la topologia della convergenza uniforme sugli elementi di un ricoprimento di ${}^t u F^{-s}$ costituito di convessi bilanciati e debolmente compatti (¹) che risultano anche limitati per la topologia indotta da E'_s.

Utilizziamo ora il noto teorema del grafico chiuso per applicazioni lineari fra F-spazi per dimostrare che

$$M\colon G \to ({}^t u F'^{-s})'_b = \frac{E}{\operatorname{Ker} u}$$

è continua.

Sia $(g_n, M(g_n))$ una successione convergente a (g_0, m_0) in $G \times ({}^t u F'^{-s})'_b$; $L(g_n)$ che è restrizione di $M(g_n)$ a ${}^t u(F')$ converge su ogni punto di ${}^t u(F')$ a $L(g_0)$ che è pertanto la restrizione di m_0 a ${}^t u(F')$; in definitiva $m_0 = M(g_0)$ dal che M è continua.

Sia ${}^t M$ la trasposta di M, continua da $\big(({}^t u F'^{-s})'_b\big)'_s = {}^t u F'^{-s}$ in G'_s. Sia $e' \in {}^t u F'^{-s}$ e sia ${}^t u(f'_j)$ una rete convergente debolmente verso e'. Allora $\lim_j {}^t M({}^t u(f'_j)) = \lim_j {}^t i_2(f'_j) = {}^t M(e')$. Allora ${}^t q({}^t i_2(f'_j))$ converge

(¹) In base al noto teorema di Mackey (cfr. [3]).

sui punti di H verso ${}^tq({}^tM(e'))$ e verso ${}^ti_1(e')$. Da cui:

$${}^ti_1(e') = {}^tq({}^tM(e')) \,.$$

q.e.d.

Per ogni p, seminorma continua su E, si indichi con E'_p lo spazio dei funzionali lineari su E che sono continui per la topologia individuata dalla seminorma p.

COROLLARIO. Se $u(E) \supset i_2(G)$, per ogni p, seminorma continua su E, esiste h, seminorma continua su G tale che:

$$\text{se } g' \in G' \text{ e } {}^tq(g') \in {}^ti_1(\operatorname{Ker} u^0 \cap E'_p) \text{ allora } g' \in G'_h \,.$$

DIMOSTRAZIONE. Sia $M\colon {}^tuF'^{-s} \to G'_s$, $M(e') = g'$ se ${}^ti_1(e') = {}^tq(g')$. Si è dimostrato nel Teorema 2 che M è continua. Ricordato che $(G'_s)'_b = G$ e che $({}^tuF'^{-s})'_b = E/\operatorname{Ker} u$, allora la trasposta di M risulta continua da G in $E/\operatorname{Ker} u$. Pertanto per ogni p su E esiste h su G tale che:

$${}^tM\colon\; G_h \to \frac{E_p}{\operatorname{Ker} u}$$

è continua e la sua trasposta

$${}^{tt}M\colon \left(\frac{E_p}{\operatorname{Ker} u}\right)' = \operatorname{Ker} u^0 \cap E'_p \to G'_h$$

è chiaramente la restrizione di M a $\operatorname{Ker} u^0 \cap E'_p$. q.e.d.

2. Applicazioni.

Si considerino due aperti di R^n A e B con $A \supset B$.

I) Sia P un polinomio differenziale a coefficienti costanti. *Per ogni $f \in C^\infty(A)$ l'equazione $Pu = f$ è $C^\infty(B)$-risolubile (cioè esiste una soluzione u in $C^\infty(B)$) se e solo se* $({}^tPE'(B))^{-s} \subset {}^tPE'(A)$ ove $E'(A)$ è lo spazio delle distribuzioni a supporto compatto in A. Si noti che per ogni aperto B relativamente compatto in A si ha $({}^tPE'(B))^{-s} \subset {}^tPE'(A)$ dato che ogni polinomio differenziale a coefficienti costanti è semiglobalmente risolubile in A (cioè l'equazione $Pu = f$ con f in $C^\infty(A)$ è risolubile sugli aperti relativamente compatti di A).

II) Sia Z_A la riunione delle componenti connesse e compatte del complementare di A. Si supponga $Z_A = \emptyset$ [2] e siano P, Q polinomi differenziali a coefficienti costanti primi tra di loro con Q ellittico. Allora per ogni (f, g) in $C^\infty(A) \times C^\infty(A)$ per cui il sistema: $Pu = f$, $Qu = g$ è $C^\infty(A)$-localmente risolubile (cioè per ogni punto p di A esiste un intorno V_p e una soluzione $u_p \in C^\infty(V_p)$), *per ogni tale* (f, g) *il sistema è* $C^\infty(A)$*-risolubile se e solo se*:

$$
{}^tPE'(A) + {}^tQE'(A) \qquad \textit{è chiuso in } E'(A)\,.
$$

È indifferente specificare se è chiuso per la topologia debole o forte di $E'(A)$ dato che $C^\infty(A)$ è riflessivo.

III) Nelle stesse ipotesi di II) *i sistemi* $C^\infty(A)$*-localmente risolubili sono* $C^\infty(B)$*-risolubili se e solo se*:

$$
\left({}^tPE'(B) + {}^tQE'(B)\right)^{-s} \subset {}^tPE'(A) + {}^tQE'(A)\,.
$$

IV) Condizione necessaria per la $C^\infty(B)$-risolubilità dell'equazione $Pu = f$ quale che sia f in $C^\infty(A)$ è che per ogni K compatto di B esista K_1 compatto di A tale che, se $u \in C_c^\infty(A)$ e ${}^tPu \in \left({}^tPE'(B)\right)^{-s}$ con $\operatorname{supp} {}^tPu \subset K$, allora $\operatorname{supp} u \subset K_1$: Nel caso dei sistemi di cui ai punti II) e III) la condizione necessaria è la seguente: se $u, v \in C_c^\infty(A)$ e ${}^tPu + {}^tQv \in \left({}^tPE'(B) + {}^tQE'(B)\right)^{-s}$ con $\operatorname{supp}({}^tPu + {}^tQv) \subset K$, allora $\operatorname{supp} u \cap \operatorname{supp} v \subset K_1$.

Dimostrazione. Per l'enunciato I) si osservi il diagramma:

$$
\begin{array}{ccc}
C^\infty(B) & \xrightarrow{P} & C^\infty(B) \\
{\scriptstyle i}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle i} \\
C^\infty(A) & \xrightarrow{P} & C^\infty(A)
\end{array}
$$

ove per ogni f in $C^\infty(A)$ $i(f)$ è la restrizione di f a B.

Gli spazi in questione soddisfano tutte le ipotesi del Teorema 2. Inoltre ${}^tP$ è iniettiva perchè se ${}^tPu = 0$ allora (applicando la trasfor-

[2] Si vedrà che questa condizione assicura che $\{(Pf, Qf) : f \in C^\infty(A)\}$ è $C^\infty(A) \times C^\infty(A)$-denso nello spazio dei dati per cui il sistema è localmente risolubile.

mata di Fourier) $P(-\xi)\hat{u}(\xi) = 0$ e perciò $\hat{u}(\xi) = 0$ per ogni $\xi \in R^n$ perchè $\hat{u}(\xi)$ è una funzione analitica nulla sul complementare in R^n della varietà algebrica $P(-\xi) = 0$.

Per gli enunciati II) e III) si osservi innanzitutto che il sistema $Pu = f$, $Qu = g$ è $C^\infty(A)$-localmente risolubile se e solo se $Qf = Pg$. (Cfr. teorema di Lojasiewicz-Malgrange [1].) Si osservi poi che:

$$\begin{aligned}\{(f, g) \in C^\infty(A) \times C^\infty(A) : Qf = Pg\}^0 = \\ &= \{(u, v) \in E'(A) \times E'(A) : {}^tPu + {}^tQv = 0\} = \\ &= \{({}^tQu, -{}^tPu) \text{ con } u \in E'(A)\}\,.\end{aligned}$$

Sia infatti (u, v) nel primo insieme e sia f in $C^\infty(A)$;

$$\langle {}^tPu + {}^tQv, f\rangle = \langle u, Pf\rangle + \langle v, Qf\rangle = 0$$

perchè $QPf = PQf$.

Sia (u, v): ${}^tPu + {}^tQv = 0$; allora in C^n si ha

$$P(-z)\hat{u}(z) + Q(-z)\hat{v}(z) = 0$$

e poichè $(P, Q) = 1$ deve essere $u = {}^tQn_1$ con $n_1 \in E'(R^n)$ (³). Poichè $Z_A = \emptyset$ e Q è ellittico deve essere $n_1 \in E'(A)$ (Prop. 4, Cap. III di [2]); perciò $(u, v) = ({}^tQn_1, -{}^tPn_1)$.

Si consideri ora il diagramma

$$\begin{array}{ccc} C^\infty(B) & \xrightarrow{P\times Q} & C^\infty(B) \times C^\infty(B) \\ {\scriptstyle i}\uparrow & & {\scriptstyle i}\uparrow \\ C^\infty(A) & \xrightarrow{P\times Q} & \{(f, g) \in C^\infty(A) \times C^\infty(A) : Qf = Pg\} \end{array}$$

${}^tP \times Q$ è iniettiva. Infatti

$$\{(f, g) \in C^\infty(A) \times C^\infty(A) : Qf = Pg\}' = \frac{E'(A) \times E'(A)}{\operatorname{Ker} {}^tP \times Q}\,.$$

(³) $(\hat{u}, \hat{v})$ è una relazione fra ${}^tP$ e ${}^tQ$ e poichè le funzioni olomorfe sono un modulo piatto sui polinomi tale relazione è generata dalle relazioni polinomiali (tutte proporzionali a $({}^tQ, -{}^tP)$ dato che $(P, Q) = 1$). Perciò $\check{u}/{}^tQ$ e $\hat{v}/{}^tP$ sono intere e si conclude col teorema 3.4.2 di [4].

Il punto IV) è immediata conseguenza del corollario.

Osservazione. Ricordo la seguente

Definizione. La quaterna (A, B, P, Q) è C^∞-compatibile se e solo se per ogni $f \in C^\infty(A)$ per cui il sistema $Pu = f$. $Qu = 0$ è $C^\infty(A)$-localmente risolubile per ogni tale f il sistema è $C^\infty(B)$-risolubile. Sia $(P, Q) = 1$, Q ellittico e $Z_A = \emptyset$. Ovvio che il sistema è C^∞-localmente risolubile se e solo se $Qf = 0$ (ancora teorema di Lojasiewicz-Malgrange). Si consideri allora:

$$\begin{array}{ccc} C^\infty(B) & \xrightarrow{P\times Q} & C^\infty(B)\times C^\infty(B) \\ {\scriptstyle i}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle i} \\ \operatorname{Ker} Q/_A & \xrightarrow{P\times Q} & \operatorname{Ker} Q/_A \times \{0\} \end{array}$$

ove $\operatorname{Ker} Q/_A = \{f \in C^\infty(A)\colon Qf = 0\}$. Ovvio che

$$(\operatorname{Ker} Q/_A \times \{0\})' = \frac{E'(A)\times E'(A)}{\{(Qu, v);\ u, v \in E'(A)\}}$$

e che

$$(\operatorname{Ker} Q/_A)' = \frac{E'(A)}{{}^tQE'(A)}\,.$$

Se allora ${}^tPu + {}^tQv \in {}^tQE'(A)$ ne segue che $u = {}^tQn_1$ con $n_1 \in E'(A)$ (4). Pertanto ${}^t\,P\times Q$ è iniettiva (cioè $P(\operatorname{Ker} Q/_A)$ è denso in $\operatorname{Ker} Q/_A$). Quindi per il Teorema 2 (A, B, P, Q) *è* C^∞*-compatibile se e solo se*

$$({}^tPE'(B) + {}^tQE'(B))^{-s} \subset {}^tPE'(A) + {}^tQE'(A)$$

cioè se e solo se il sistema $Pu = f$, $Qu = g$ *è risolubile in* $C^\infty(B)$ *per ogni* (f, g) *in* $C^\infty(A)\times C^\infty(A)$ *con* $Qf = Pg$.

(4) Si ragioni analogamente alla nota a piè della pagina precedente e si applichino ancora il teorema 3.4.2 di [4] e la prop. 4, cap. 3 di [2].

BIBLIOGRAFIA

[1] A. ANDREOTTI - M. NACINOVICH, *Complexes of partial differential operators*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, serie IV, **3** (1976).

[2] B. MALGRANGE, *Existence et approximation des solutions des équations aux dérivées partielles et des équations de convolution,* Annales de l'Institut Fourier, t. 6 (1955-56).

[3] F. TREVES, *Topological vector spaces distributions and kernels,* Academic Press, New York (1967).

[4] L. HÖRMANDER, *Linear partial differential operators,* Springer-Verlag, Berlino (1963).

Manoscritto pervenuto in redazione il 21 luglio 1978.