

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

GIULIANO BRATTI

**Un'applicazione del teorema del grafico chiuso
alla risolubilità di sistemi differenziali del
tipo : $Pu = f, Qu = 0$**

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 61 (1979), p. 125-132

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1979__61__125_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**Un'applicazione del teorema del grafico chiuso
alla risolubilità di sistemi differenziali
del tipo: $Pu = f, Qu = 0$.**

GIULIANO BRATTI (*)

0. In ciò che segue è contenuto un criterio per la risolubilità, « in grande » del sistema differenziale:

$$Pu = f, \quad Qu = 0,$$

f e u di classe $C^\infty(A)$, A un aperto di R^n ; P e Q operatori differenziali lineari, a coefficienti costanti, primi tra di loro, con Q ellittico, (il caso in cui P e Q non sono primi tra di loro, ovviamente con P non multiplo di Q , è trattabile in modo analogo).

In [1] è presente un criterio algebrico-topologico per la risolubilità del sistema di sopra; il criterio qui esposto, (Teorema 7), è, (probabilmente), più facile di quello ed ha il pregio di essere la naturale estensione del Teorema 4, Cap. I, di [4].

I. Al fine di questo articolo sono interessanti i seguenti teoremi:

TEOREMA 1. Sia E uno spazio vettoriale topologico localmente convesso; sia F un suo sottospazio lineare e sia A un aperto convesso in E tale che: $A \cap F = \emptyset$. Allora: esiste un iperpiano chiuso, H , in E tale che:

$$A \cap H = \emptyset \quad \text{e} \quad F \subseteq H.$$

(*) Indirizzo dell'A.: Seminario Matematico dell'Università - Via Belzoni 7 - I-35100 Padova.

(Il teorema di sopra è conosciuto come « la forma geometrica » del teorema di Hahn-Banach.)

TEOREMA 2. Siano E ed F spazi di Fréchet e sia f un'applicazione lineare e continua di E in F . Siano E' ed F' i duali di E ed F rispettivamente; ${}^t f$ sia la trasposta di f .

Le seguenti proposizioni, $a)$ e $b)$, sono equivalenti:

- $a)$ f è suriettiva;
- $b)$ ${}^t f$ è iniettiva e ${}^t f(F')$ è debolmente chiuso in E' .

TEOREMA 3. Siano E ed F spazi di Fréchet o duali forti di spazi di Fréchet riflessivi.

Se f è un'applicazione lineare di E in F , f è continua se e solo se il grafico di f è chiuso in $E \times F$.

(Il teorema di sopra, e altro, va sotto il nome di teorema del grafico chiuso.)

2. Sia A un aperto di R^n e sia Z_A la riunione delle componenti connesse e compatte del complementare di A : R^n/A .

Sia $L = A \cup Z_A$; L è un aperto, [5]; sia K un compatto di L .

DEFINIZIONE 1. Se $Z_A \neq \emptyset$, K separa Z_A se e solo se: esiste una partizione di Z_A del tipo $Z_A = Z_{1,A} \cup Z_{2,A}$, con $Z_{1,A} \neq \emptyset$, ed esiste un aperto $B \subseteq L$, tale che:

$$Z_{1,A} \subseteq K \subset B \quad \text{e} \quad Z_{2,A} \cap B = \emptyset.$$

DEFINIZIONE 2. A soddisfa la b -proprietà se e solo se: o $Z_A = \emptyset$, oppure: non esiste alcun compatto K in L che separi Z_A .

L'ultima definizione nasce da un teorema « di densità » per sistemi del tipo:

$$Pu = f, \quad Qu = 0,$$

f ed u di classe $C^\infty(A)$.

Si ha, infatti, [1]:

TEOREMA 4. Le seguenti proposizioni, $a)$ e $b)$, sono equivalenti:

- $a)$ A soddisfa la b -proprietà;

b) per ogni coppia, (P, Q) , di operatori differenziali lineari, a coefficienti costanti, primi tra di loro, con Q ellittico, si ha:

se $\text{Ker } Q/A = \{f \in C^\infty(A) : Qf = 0\}$,

$P(\text{Ker } Q/A)$ è $C^\infty(A)$ denso in $\text{Ker } Q/A$.

Dal punto di vista topologico la *b*-proprietà enunciata nella Definizione 2 è piuttosto complicata; eccone una caratterizzazione, in termini di operatori differenziali, che la pone in miglior luce.

TEOREMA 5. Le seguenti proposizioni, *a)* e *b)*, sono equivalenti:

a) A soddisfa la *b*-proprietà;

b) per ogni operatore ellittico Q si ha: se $m \in E'(R^n)$ e $Qm \in E'(A)$ allora: $m \in E'(A)$.

Il Teorema 5 ha essenzialmente la stessa dimostrazione del Teorema 4.

Si osservi come la proposizione in *b)* dell'ultimo teorema dimostri facilmente che $\text{Ker } Q/R^n$ è $C^\infty(A)$ denso in $\text{Ker } Q/A$. Infatti: se $m \in E'(A)$ ed m è ortogonale a $\text{Ker } Q/R^n$, in base ai Lemmi 3.4.1 e 3.4.2 di [3], pagg. 77-78, si ha: $m = {}^tQn$, con n in $E'(R^n)$ e dunque n in $E'(A)$.

In base alla Prop. 8, Cap. III di [4], si ricava allora che: A soddisfa la *b*-proprietà se e solo se: $Z_A = \emptyset$.

3. Si consideri il sistema:

$$Pu = f, \quad Qu = 0,$$

f in $C^\infty(A)$.

Ovvio che la condizione di compatibilità del sistema è che: Qf sia zero. Se si vuol studiare la risolubilità, in $C^\infty(A)$, del sistema di sopra, per ogni f in $\text{Ker } Q/A$, è, in base al Teorema 4, in generale necessario che: Z_A sia vuoto, (l'A. ignora se tale condizione sia necessaria in ogni caso per avere: $P(\text{Ker } Q/A) = \text{Ker } Q/A$).

Sia tP il trasposto dell'operatore P ; $E'(A)$ lo spazio delle distribuzioni a supporto compatto in A .

TEOREMA 6. Sia A un aperto di R^n con $Z_A = \emptyset$.

Le seguenti proposizioni, *a)* e *b)*, sono equivalenti:

a) $P(\text{Ker } Q/A) = \text{Ker } Q/A$;

b) ${}^tP(E'(A)) + {}^tQ(E'(A))$ è chiuso in $E'(A)$

DIMOSTRAZIONE. ${}^tP: (\text{Ker } Q/A)' \rightarrow (\text{Ker } Q/A)'$ è evidentemente iniettiva, visto che: se $m \in (\text{Ker } Q/A)'$, (m è la restrizione a $\text{Ker } Q/A$ di una distribuzione a supporto compatto in A), e se ${}^tPm = 0$ su $\text{Ker } Q/A$, allora deve essere: ${}^tPm = {}^tQn$, con n in $E'(R^n)$. Poichè P e Q sono primi tra di loro si ha: $m = {}^tQn_1$ e deve essere n_1 in $E'(A)$.

Sia m_j una rete di distribuzioni in $E'(A)$ tale che: tPm_j converge, per ogni f in $\text{Ker } Q/A$, verso $m_0 \in E'(A)$. Ovvio che m_0 risulta ortogonale a $\text{Ker } P/A \wedge \text{Ker } Q/A$. Dimostriamo che m_0 è in ${}^tP(E'(A)) + {}^tQ(E'(A))$.

Infatti: in base al citato teorema di Hahn-Banach, se $m_0 \notin {}^tP(E'(A)) + {}^tQ(E'(A))$ esiste f in $C^\infty(A)$ tale che:

$$\langle m_0 \cdot f \rangle \neq 0 \quad \text{e} \quad \langle {}^tPm + {}^tQn \cdot f \rangle = 0,$$

per ogni m e n in $E'(A)$. Assurdo.

Allora: è

$$m_0 = {}^tPm_1 + {}^tQn_1$$

e, quindi, $m_0 = {}^tPm$ su $\text{Ker } Q/A$.

Il Teorema 2 dimostra allora che è:

$$P(\text{Ker } Q/A) = \text{Ker } Q/A.$$

L'implicazione: $b)$ verso $a)$ è conclusa.

$a)$ implica $b)$.

Sia: ${}^tPm_j + {}^tQn_j$ una rete in $E'(A)$ convergente verso m_0 in $E'(A)$. Allora: se $f \in \text{Ker } Q/A$, $\langle {}^tPm_j \cdot f \rangle$ converge verso $\langle m_0 \cdot f \rangle$. Il solito Teorema dà: $m_0 = {}^tPm_1$, con m_1 in $E'(A)$, per ogni f in $\text{Ker } Q/A$.

Poichè: $m_0 - {}^tPm_1$ è ortogonale a $\text{Ker } Q/A$, per il fatto che Q è ellittico e Z_A è vuoto, risulta: $m_0 - {}^tPm_1 = {}^tQn_1$, con n_1 in $E'(A)$.

Il Teorema 6 è completamente dimostrato.

OSSERVAZIONE 1. Per avere: $P(C^\infty(A)) = C^\infty(A)$, è necessario e sufficiente che: ${}^tP(E'(A))$ sia chiuso in $E'(A)$, (Teor. 4, Cap. I, [4]).

La proposizione in $b)$ del Teorema 6 è essenzialmente dello stesso tipo.

Sia B un sottoinsieme aperto di A .

DEFINIZIONE 3. La quaterna: (A, B, P, Q) si dice C^∞ -compatibile se e solo se: per ogni f in $C^\infty(A)$ tale che il sistema:

$$Pu = f, \quad Qu = 0$$

è C^∞ -localmente risolubile in A , (i.e.: per ogni punto p in A esiste un suo intorno, V_p , ed esiste u_p in $C^\infty(V_p)$ tale che in V_p : $Pu_p = f$ e $Qu_p = 0$), per quelle stesse f il sistema di sopra è C^∞ -risolubile in B , (i.e.: esiste u in $C^\infty(B)$ che soddisfa il sistema).

OSSERVAZIONE 2. In base ad un teorema di Lojasiewicz-Malgrange, [6], per il fatto che P e Q sono primi tra di loro, le f in $C^\infty(A)$ per cui il sistema $Pu = f$, $Qu = 0$ è C^∞ -localmente risolubile, sono tutte e solo quelle di $\text{Ker } Q/A$; in breve: la quaterna: (A, B, P, Q) è C^∞ -compatibile se e solo se: $P(\text{Ker } Q/B) \supseteq \text{Ker } Q/A$.

Si ponga: $G(B) = {}^tP(E'(B)) + {}^tQ(E'(B))$; analogamente per $G(A)$. $G(B)^-$ indica la chiusura, in $E'(B)$, di $G(B)$; $(G(B)^-)^0$ indica l'ortogonale, in $C^\infty(B)$, di $G(B)^-$.

È noto, (n. 3, Préliminaires di [4]), che $G(B)^-$ è il duale forte dello spazio: $C^\infty(B)/(G(B)^-)^0$, e che quest'ultimo spazio è uno spazio di Fréchet riflessivo.

Il seguente teorema è una generalizzazione del Teorema 6.

TEOREMA 7. Sia A un aperto di R^n con $Z_A = \emptyset$; B sia un sottoinsieme aperto di A .

Le seguenti proposizioni, $a)$ e $b)$, sono equivalenti:

- $a)$ la quaterna: (A, B, P, Q) è C^∞ -compatibile;
- $b)$ $G(B)^-$ è contenuta in $G(A)$.

DIMOSTRAZIONE.

$a)$ implica $b)$.

Sia: $G(B)'_s$ il duale debole di $G(B)$; su $\text{Ker } Q/A$ vi sia la topologia indotta da $C^\infty(A)$.

Si indichi con L la mappa: $L: \text{Ker } Q/A \rightarrow G(B)'_s$ così definita: se $f \in \text{Ker } Q/A$,

$$L(f): G(B) \rightarrow \mathbb{C}, \quad \langle L(f) \cdot {}^tPm + {}^tQn \rangle = \langle m \cdot f \rangle.$$

L è ben definita; infatti: se: ${}^tPm_1 + {}^tQn_1 = {}^tPm_2 + {}^tQn_2$, per il fatto

che P e Q sono primi tra di loro, risulta: $m_2 = m_1 + {}^tQn_3$, sempre con n_3 in $E'(A)$.

Ovvio che L è lineare e che: $L(f) \in G(B)'$. Infatti: se la rete ${}^tPm_j + {}^tQn_j$ converge a zero in $G(B)$, tenuto conto dell'ipotesi, i.e.: esiste g in $\text{Ker } Q/B$ tale che: $Pg = f$ in B , si ha:

$$\begin{aligned} \lim_j \langle L(f) \cdot {}^tPm_j + {}^tQn_j \rangle &= \langle \lim_j m_j \cdot f \rangle = \\ &= \lim_j \langle {}^tPm_j \cdot g \rangle = \lim_j \langle {}^tFm_j + {}^tQn_j \cdot g \rangle = 0. \end{aligned}$$

L è continua.

Infatti: se f_n converge a zero in $\text{Ker } Q/A$,

$$\lim_n \langle L(f_n) \cdot {}^tPm + {}^tQn \rangle = \lim_n \langle m \cdot f_n \rangle = 0.$$

Si indichi con M la mappa: $M: \text{Ker } Q/A \rightarrow (G(B)^-)'$, così definita: $M(f)$ è l'estensione per continuità a $G(B)^-$ di $L(f)$.

Su $(G(B)^-)'$ si ponga la topologia del duale forte di $G(B)^-$. Per quanto osservato prima del teorema: $(G(B)^-)'$ è $C^\infty(B)/(G(B)^-)^0$. Allora: se si prova che il grafico di M è chiuso, per il Teorema 3 M risulta continua.

Infatti: se $(f_n, M(f_n))$ converge, in $\text{Ker } Q/A \times (G(B)^-)$, verso (f_0, m_0) $L(f_n)$ che è la restrizione a $G(B)$ di $M(f_n)$ converge, su $G(B)$ ovviamente, verso $L(f_0)$ che risulta così la restrizione a $G(B)$ di m_0 . Allora:

$$M(f_0) = m_0; \quad \text{ovvero:} \quad M \text{ è continua.}$$

Sia: ${}^tM: G(B)^- \rightarrow (\text{Ker } Q/A)'_f$, la trasposta di M tra i duali forti. tM è continua; allora: se ${}^tPm_j + {}^tQn_j$ converge a m_0 in $G(B)^-$,

$$\lim_j {}^tM({}^tPm_j + {}^tQn_j) = \lim_j m_j = {}^tM(m_0)$$

che è la restrizione a $\text{Ker } Q/A$ di una distribuzione a supporto compatto in A .

Ciò dimostra: tPm_j converge su $\text{Ker } Q/A$ verso m_0 e verso ${}^tP({}^tM(m_0))$. Con il solito ragionamento: $m_0 = {}^tP({}^tM(m_0) + {}^tQn_0)$ e n_0 è in $E'(A)$. L'implicazione da a) verso b) è provata.

b) implica a).

Per l'ipotesi, la mappa $M: (G(B)^-) \rightarrow (\text{Ker } Q/A)'$ così definita: se $m_0 = {}^tPm_1 + {}^tQn_1 \in G(B)^-$, $\langle M(m_0) \cdot f \rangle = \langle m_1 \cdot f \rangle$, per ogni f in $\text{Ker } Q/A$,

è ben definita ed è continua non appena gli spazi hanno la topologia dei duali forti.

Infatti: se: $(({}^t P m_j + {}^t Q n_j), m_j)$ converge a (m, h) in $G(B)^- \times (\text{Ker } Q/A)'$ risulta: ${}^t P m_j$ converge a ${}^t P h$ su ogni f di $\text{Ker } Q/A$ e converge a ${}^t P m_0$ in $C^\infty(B)$ se è: $m = {}^t P m_0 + {}^t Q n_0$.

Allora: ${}^t P m_0 + {}^t Q n_0 = {}^t P h + {}^t Q(n_0 + n_1)$, con il solito ragionamento, mostra che il grafico di M è chiuso.

Sia:

$$\begin{aligned} {}^t M: \text{Ker } Q/A &\rightarrow (G(B)^-)'_f = \\ &= C^\infty(B)/(G(B)^-)^0 = C^\infty(B)/(\text{Ker } P/B \wedge \text{Ker } Q/B) \end{aligned}$$

la trasposta di M .

Se $f \in \text{Ker } Q/A$, ${}^t M(f)$ è soluzione del problema: $Pu = f$, $Qu = 0$ in $C^\infty(B)$. Il teorema è concluso.

OSSERVAZIONE 3. Si consideri la mappa: $(P, Q): C^\infty(A) \rightarrow C^\infty(A) \times C^\infty(A)$, $(P, Q)(u) = (Pu, Qu)$; ovvio che tale mappa è continua e che: se ${}^t P(E'(A)) + {}^t Q(E'(A))$ è debolmente chiuso in $E'(A)$, l'immagine di quella mappa è chiusa in $C^\infty(A) \times C^\infty(A)$.

Infatti: la mappa (P, Q) è aperta sull'immagine così che l'immagine della (P, Q) è topologicamente ed algebricamente isomorfa a $C^\infty(A)/(\text{Ker } P/A \wedge \text{Ker } Q/A)$.

Nelle ipotesi del Teorema 6 è facile dimostrare che: $(P, Q)C^\infty(A)$ è denso in $H = ((f, g) \in C^\infty(A) \times C^\infty(A): Qf = Pg)$. Infatti: se $(m, n) \in E'(A) \times E'(A)$ è ortogonale a $(P, Q)C^\infty(A)$, risulta che: ${}^t P m + {}^t Q n = 0$; per il fatto che P e Q sono primi tra di loro, risulta: $m = {}^t Q n_1$, e al solito: $n_1 \in E'(A)$. Allora: $n = -{}^t P n_1$; così che:

$$(m, n)(f, g) = (n_1 \cdot Qf) - (n_1 \cdot Pg) = 0, \quad \text{se } (f, g) \in H.$$

Quanto sopra viene a dire che: il sistema: $Pu = f$, $Qu = g$, con $Pg = Qf$, è risolubile in A se e solo se lo è il sistema: $Pu = f$, $Qu = 0$, con $Qf = 0$.

BIBLIOGRAFIA

- [1] G. BRATTI, *A density theorem about some system*, in pubblicazione in Rendiconti del Seminario Matematico di Padova.
- [2] A. GROTHENDIECK, *Sur les espaces (F) et (DF)* , Summa Brasiliensis Math., **3**, 6 (1954), pp. 57-121.

- [3] L. HÖRMANDER, *Linear Partial Differential Operators*, Springer-Verlag (1969).
- [4] B. MALGRANGE, *Existence et approximation des solutions des équations aux dérivées partielles et des équations de convolution*, Annales de l'Institut Fourier, tome VI (1955 et 1956).
- [5] R. NARASIMHAN, *Analysis on real and complex manifolds*, Masson e Cie, Paris, North-Holland, Amsterdam.
- [6] A. ANDREOTTI - M. NACINOVICH, *Complexes of partial differential operators*, Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa (1976).

Manoscritto pervenuto in redazione il 27 maggio 1978.