

RENDICONTI  
*del*  
SEMINARIO MATEMATICO  
*della*  
UNIVERSITÀ DI PADOVA

MARIO ROSATI

**Su una generazione del gruppo simplettico  
modulare di Siegel-Conforto  $\Gamma(n, \Delta)$**

*Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,*  
tome 60 (1978), p. 229-236

[http://www.numdam.org/item?id=RSMUP\\_1978\\_\\_60\\_\\_229\\_0](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1978__60__229_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1978, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques*  
<http://www.numdam.org/>

## Su una generazione del gruppo simplettico modulare di Siegel-Conforto $\Gamma(n, \Delta)$ .

MARIO ROSATI (\*)

SUNTO - In questo lavoro si dimostra che il gruppo simplettico modulare  $\Gamma(n, \Delta)$  di Siegel-Conforto è generato da tre suoi sottogruppi notevoli:  $\mathfrak{D}(n)$ ,  $\mathfrak{R}(n, \Delta)$ ,  $\mathfrak{S}(n, \Delta)$ .

SUMMARY - In this paper we show that the Siegel-Conforto's symplectic modular group  $\Gamma(n, \Delta)$  is generated by three subgroups:  $\mathfrak{D}(n)$ ,  $\mathfrak{R}(n, \Delta)$ ,  $\mathfrak{S}(n, \Delta)$ .

**1.** Sia  $n \geq 1$  un intero ed  $\mathcal{M}_n(\mathbf{Z})$  l'anello delle matrici quadrate di ordine  $n$  su  $\mathbf{Z}$ . Sia inoltre  $M$  una matrice emisimmetrica di ordine  $2n$ , nella forma normale

$$(1) \quad M = \begin{bmatrix} O & \Delta \\ -\Delta & O \end{bmatrix}$$

dove  $\Delta = \text{diag} \langle \delta_1, \dots, \delta_n \rangle$  e  $\delta_1, \dots, \delta_n$  sono i divisori elementari di  $M$ , soddisfacenti le condizioni di divisibilità:

$$(2) \quad \delta_1 | \delta_2 | \dots | \delta_n .$$

Con riferimento alla matrice  $M$ , consideriamo il gruppo multipli-

(\*) Indirizzo dell'A.: Istituto di Matematica Applicata dell'Università di Padova.

cativo  $\Gamma(n, \Delta)$  delle matrici  $T \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{Z})$  che soddisfano la condizione (cfr. [2], [5]):

$$(3) \quad TMT_{-1} = M$$

( $T_{-1}$  indica la trasposta di  $T$ ). Tale gruppo è denominato da altri autori *gruppo paramodulare* (cfr. [1]). Posto:

$$(4) \quad T = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

con  $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ , ricordiamo (\*) che la (3) equivale alle:

$$(5) \quad \begin{cases} A\Delta B_{-1} - B\Delta A_{-1} = O \\ C\Delta D_{-1} - D\Delta C_{-1} = O \\ A\Delta D_{-1} - B\Delta C_{-1} = \Delta \end{cases}$$

e che, sempre in forza della (3), risulta:

$$(6) \quad \Delta^{-1}A\Delta, \quad \Delta^{-1}B\Delta, \quad \Delta^{-1}C\Delta, \quad \Delta^{-1}D\Delta \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}).$$

Nel gruppo  $\Gamma(n, \Delta)$  consideriamo i tre sottogruppi seguenti:

$$\text{I) } \mathfrak{D}(n) = \{T \in \Gamma(n, \Delta) \mid A, B, C, D \text{ diagonali}\}.$$

In  $\mathfrak{D}(n)$ , che è indipendente da  $\Delta$ , le (5) si riducono alla:

$$AD - BC = I.$$

$$\text{II) } \mathfrak{R}(n, \Delta) = \{T \in \Gamma(n, \Delta) \mid B = C = O\}$$

costituito dalle  $T$  della forma:

$$T = \begin{bmatrix} U & O \\ O & \Delta U_{-1}^{-1} \Delta^{-1} \end{bmatrix}$$

con  $U \in \Omega(n, \Delta)$ . Qui  $\Omega(n, \Delta)$  è il sottogruppo del gruppo lineare generale  $GL(n, \mathbb{Z})$ , costituito dalle matrici  $U$  tali che:

$$\Delta^{-1}U\Delta \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}).$$

(\*) Per le generalità qui occorrenti, rimandiamo a [2].

$$(III) \quad \mathfrak{C}(n, \Delta) = \{T \in \Gamma(n, \Delta) \mid A = D = I; C = O\}$$

costituito dalle  $T$  della forma:

$$T = \begin{bmatrix} I & B \\ O & I \end{bmatrix}$$

con  $\Delta B_{-1} = B\Delta$ .

Scopo principale di questo lavoro è quello di mostrare che il gruppo  $\Gamma(n, \Delta)$  è generato dai tre sottogruppi  $\mathfrak{D}(n)$ ,  $\mathfrak{R}(n, \Delta)$ ,  $\mathfrak{C}(n, \Delta)$ .

Si tratta di un contributo alla generalizzazione dei risultati del lavoro [3], dal caso  $\Delta = I$  dei divisori elementari unitari, al caso di divisori qualunque.

**2. Dimostriamo innanzitutto due lemmi.**

Poniamo:  $\theta_i = \delta_i/\delta_1$  e  $\Theta = \text{diag} \langle \theta_1, \dots, \theta_n \rangle$ .

LEMMA I. *Se la colonna  $H = \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix}$  è tale che:*

$$(7) \quad \begin{cases} H, \Theta^{-1}H \text{ sono intere} \\ (h_1, \dots, h_n) = \left( \frac{h_1}{\theta_1}, \frac{h_2}{\theta_2}, \dots, \frac{h_n}{\theta_n} \right) = h \end{cases}$$

esiste una  $U \in \Omega(n, \Delta)$  tale che:

$$(8) \quad UH = \begin{bmatrix} h \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Per  $n = 1, 2$  il lemma si verifica facilmente.

Per  $n \geq 3$  procediamo per induzione rispetto ad  $n$ . Osserviamo in primo luogo che, posto:

$$H' = \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \Theta' = \text{diag} \langle \theta_1, \dots, \theta_{n-1} \rangle$$

le  $H'$ ,  $\Theta'$  soddisfano le (7) in dimensione  $n - 1$ . Ciò si vede subito tenendo anche conto delle condizioni (2) sui divisori elementari,

cosicchè se

$$(h_1, \dots, h_{n-1}) = \left( \frac{h_1}{\theta_1}, \dots, \frac{h_{n-1}}{\theta_{n-1}} \right) = h'$$

esiste una  $U' \in \Omega(n-1, \Delta')$ , e quindi una

$$U_1 = \begin{bmatrix} U' & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \Omega(n, \Delta)$$

tale che:

$$U_1 H = \begin{bmatrix} h' \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ h_n \end{bmatrix} = H_1.$$

Poichè ovviamente  $(h', h_n) = (h', h_n/\theta_n) = h$ , si può applicare ancora l'induzione su  $n$ . Posto:

$$\Delta'' = \begin{bmatrix} \delta_1 & 0 \\ 0 & \delta_n \end{bmatrix}$$

esiste una  $U'' = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \Omega(2, \Delta'')$  tale che:

$$U'' \begin{bmatrix} h' \\ h'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h \\ 0 \end{bmatrix}.$$

In tal modo la

$$U_2 = \begin{bmatrix} a & 0 & b \\ 0 & I & 0 \\ c & 0 & d \end{bmatrix} \in \Omega(n, \Delta)$$

è tale che:

$$U_2 H_1 = \begin{bmatrix} h \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

La matrice  $U = U_2 U_1 \in \Omega(n, \Delta)$  rende soddisfatto il lemma per il valore prefissato di  $n$ .

Dal lemma I ora dimostrato discende il seguente:

LEMMA II. *La*

$$H = \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix}$$

è prima colonna di una matrice  $U \in \Omega(n, \Delta)$  se e soltanto se:

$$(9) \quad \begin{cases} H, \Theta^{-1}H \text{ sono intere} \\ (h_1, \dots, h_n) = 1. \end{cases}$$

La necessità è conseguenza della definizione di  $\Omega(n, \Delta)$ . La sufficienza segue dal lemma I; infatti una  $H$  soddisfacente le (9) risulta essere prima colonna della  $U^{-1}$ , inversa della  $U$  di cui al lemma I.

Il lemma II, insieme al lemma I, fornisce tra l'altro, una semplificazione della dimostrazione di un teorema di U. Christian (cfr. [1]).

**3.** Veniamo ora alla parte essenziale del presente lavoro e dimostriamo il seguente:

**TEOREMA.** *Il gruppo  $\Gamma(n, \Delta)$  è generato dai sottogruppi  $\mathfrak{D}(n)$ ,  $\mathfrak{R}(n, \Delta)$ ,  $\mathfrak{T}(n, \Delta)$ .*

Del teorema daremo una dimostrazione diretta, facendo vedere che il prodotto di un prefissato elemento di  $\Gamma(n, \Delta)$  per un numero finito di opportuni elementi dei tre sottogruppi è l'elemento identico. La dimostrazione è suddivisa in due parti.

a) Data una qualunque

$$T = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \in \Gamma(n, \Delta)$$

è chiaro che è possibile moltiplicarla a sinistra per un conveniente elemento di  $\mathfrak{D}(n)$  in modo da ottenere una

$$T' = \begin{bmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{bmatrix}$$

nella quale è nulla la prima colonna di  $C'$ .

Detta  $A = \begin{bmatrix} a'_{11} \\ \vdots \\ a'_{n1} \end{bmatrix}$  la prima colonna di  $A'$ , e tenuto conto che  $T' \in \Gamma(n, \Delta)$ , risulta:

$$\begin{cases} \Theta^{-1}A \text{ intera per le (6)} \\ (a'_{11}, \dots, a'_{n1}) = 1 \quad \text{perchè } T \text{ è unimodulare.} \end{cases}$$

Applicando ora alla  $A$  il lemma I, si potrà trovare una  $U \in \Omega(n, \Delta)$  tale che

$$UA = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

e in conseguenza una

$$R = \begin{bmatrix} U & O \\ O & \Delta U^{-1} \Delta^{-1} \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}(n, \Delta)$$

tale che la

$$(10) \quad T'' = RT' \in \Gamma(n, \Delta)$$

abbia come prima colonna  $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ .

A questo punto il teorema risulta dimostrato se  $n = 1$ , perchè perchè la  $T'' \in \mathfrak{C}(1, \Delta)$ .

b) Se  $n \geq 2$  procediamo per induzione rispetto ad  $n$ . Supponiamo la  $T$  già ridotta alla forma (10), e ripartiamola al modo seguente (il significato dei simboli è chiaro):

$$(11) \quad T = \begin{bmatrix} 1 & a' & b & b' \\ 0 & \bar{A} & b'' & \bar{B} \\ 0 & c' & d & d' \\ 0 & \bar{C} & d'' & \bar{D} \end{bmatrix}$$

Ponendo

$$\Delta = \begin{bmatrix} \delta_1 & \mathbf{0} \\ 0 & \bar{\Delta} \end{bmatrix}, \quad \text{con } \bar{\Delta} = \text{diag} \langle \delta_2, \dots, \delta_n \rangle$$

risulta che

$$(12) \quad \bar{T} = \begin{bmatrix} \bar{A} & \bar{B} \\ \bar{C} & \bar{D} \end{bmatrix} \in \Gamma(n-1, \bar{\Delta}).$$

Si consideri ora l'inversa di  $\bar{T}$ :

$$\bar{T}^{-1} = \begin{bmatrix} \bar{A} & \bar{B} \\ \bar{C} & \bar{D} \end{bmatrix} \in \Gamma(n-1, \bar{\Delta}).$$

e si costruisca la

$$(13) \quad S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{A} & 0 & \bar{B} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \bar{C} & 0 & \bar{D} \end{bmatrix} \in \Gamma(n, \Delta).$$

Il prodotto  $ST$  appare nella forma:

$$(14) \quad ST = \begin{bmatrix} 1 & a' & b & b' \\ 0 & I & * & 0 \\ 0 & c' & d & d' \\ 0 & 0 & * & I \end{bmatrix} \in \Gamma(n, \Delta)$$

e la sua appartenenza a  $\Gamma(n, \Delta)$  implica (si tenga conto delle (5)):

$$c' = 0, \quad d = 1, \quad d' = 0$$

cosicchè di fatto la (14) si può scrivere nella forma:

$$(15) \quad ST = \begin{bmatrix} 1 & a' & b & b' \\ 0 & I & * & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & * & I \end{bmatrix}.$$



A questo punto si osservi che la  $S$  è prodotto di elementi di

$$\mathfrak{D}(n), \quad \mathfrak{R}(n, \Delta), \quad \mathfrak{S}(n, \Delta).$$

Infatti, per l'induzione ammessa, la  $\bar{T}$  si può esprimere mediante elementi di

$$(16) \quad \mathfrak{D}(n-1), \quad \mathfrak{R}(n-1, \bar{\Delta}), \quad \mathfrak{S}(n-1, \bar{\Delta}).$$

elementi che possono pensarsi immersi in  $\Gamma(n, \Delta)$ , anzi rispettivamente in  $\mathfrak{D}(n)$ ,  $\mathfrak{R}(n, \Delta)$ ,  $\mathfrak{S}(n, \Delta)$  mediante l'immersione naturale di  $\Gamma(n-1, \bar{\Delta})$  in  $\Gamma(n, \Delta)$ .

Moltiplicando ora a sinistra la (15) per

$$\begin{bmatrix} U & O \\ O & \Delta U_{-1}^{-1} \Delta^{-1} \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}(n, \Delta) \quad \text{con} \quad U = \begin{bmatrix} 1 & -a' \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

si ottiene un elemento del tipo:

$$\begin{bmatrix} I & B \\ O & I \end{bmatrix} \in \mathfrak{S}(n, \Delta).$$

Ciò dimostra il teorema.

#### BIBLIOGRAFIA

- [1] U. CHRISTIAN, *Einführung in die Theorie der paramodularen Gruppen*, Mathem. Annalen **168** (1967), pp. 59-104.
- [2] F. CONFORTO, *Funzioni abeliane modulari*, vol. I, Ist. Naz. di Alta Matematica, Ediz. Docet, Roma (1951), pp. 434.
- [3] L. HUA - J. REINER, *On the generators of the symplectic modular group*, Transactions of the A.M.S., **65** (1949), pp. 415-426.
- [4] M. NEWMAN, *Integral Matrices*, Academic Press, New York (1972), pp. 224.
- [5] C. L. SIEGEL, *Einführung in die Theorie der Modulfunktionen n-ten Grades*, Mathem. Annalen, **116** (1939), pp. 617-657.

Manoscritto pervenuto in redazione il 9 marzo 1979.