ETTORE BELLOMO
PIERGIORGIO VIANELLO

Concomitanza, conseguenti identità di struttura e leggi di conservazione

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 60 (1978), p. 201-228
<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1978__60__201_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 60 (1978)

Concomitanza, conseguenti identità di struttura e leggi di conservazione.

ETTORE BELLOMO - PIERGIORGIO VIANELLO (*)

Introduzione.

Le leggi di conservazione per la teoria dei campi sono ordinariamente associate a proprietà di invarianza dell'integrale di azione rispetto ad un certo gruppo di trasformazioni, secondo un procedimento che risale ad E. Noether nel 1918 [I].

In realtà i risultati del procedimento classico possono essere ottenuti da identità di invarianza (o « di struttura ») conseguenti alla concomitanza della dipendenza funzionale della lagrangiana rispetto ai campi. Queste identità sono state usate da J. C. du Plessis [II] per ricavare leggi di conservazione « forte » del tipo delle identità di Bianchi della relatività generale.

Dapprima discutiamo ed estendiamo il concetto di identità di struttura per gli oggetti geometrici differenziali, e più in generale per « realizzazioni geometriche » di gruppi continui.

Ricaviamo poi le leggi di conservazione « debole » del tipo delle identità di Noether, confrontandole coi risultati di J. S. Blakeslee and J. D. Logan [III]. Si ottengono poi le identità di Bianchi per questi enti generali.

Si è usata una duplice estensione del concetto di sistema di riferimento, sia in connessione con la derivazione « di posizione », che per la considerazione di gruppi continui.

(*) Indirizzo degli AA.: Seminario Matematico, Università di Padova, Padova.

1. Le identità di struttura per i tensori.

Ci occuperemo qui di enti a carattere tensoriale in più spazi vettoriali. Per essi useremo la notazione

$$T\,\overset{A,\,\lambda}{\overline{{}^{i\,\dots\,j}_{m\,\dots\,n}}}\;\square\;\overset{B,\,\mu}{\overline{{}^{r\,\dots\,s}_{t\,\dots\,u}}}\;\triangle\;\dots$$

A e B, ecc. indicando gli spazi a cui si riferiscono gli indici soprassegnati, e $\square$, $\triangle$, $\#$, ∇, e così $\otimes$ e $\oplus$ le basi in cui sono espresse le componenti dei tensori nei vari spazi, mentre λ e μ sono i rispettivi pesi di covarianza. Indicheremo altresì con $\overset{A\,\#\,\square}{\overline{\alpha^i_j}}$ ed $\overset{A\,\#\,\square}{\overline{\overset{-1}{\alpha}{}^i_j}}$ e simili, (o semplicemente con $\overset{\square\,\#}{\overline{\alpha^i_j}}$ o anche $\overset{A}{\overline{\alpha^i_j}}$) i coefficienti che realizzano in tali spazi i cambiamenti di base per gli indici rispettivamente covarianti e controvarianti. È

$$\overset{\#\,\square}{\overline{\alpha^i_k}}\;\overset{\#\,\square}{\overline{\overset{-1}{\alpha}{}^k_j}} = \delta^i_j$$

così:

$$T\,\overset{A,\,\lambda}{\overline{{}^{i\,\dots\,j}_{h\,\dots\,k}}}\;\#\;\overset{B,\,\mu}{\overline{{}^{q\,\dots\,r}_{s\,\dots\,t}}}\;\nabla =$$

$$= \left|\overset{\#\,\square}{\overline{\alpha}}\right|^{\lambda}\left|\overset{\nabla\,\triangle}{\overline{\alpha}}\right|^{\mu}\overset{\#\,\square}{\overline{\overset{-1}{\alpha}{}^i_m}}\;\dots\;\overset{\#\,\square}{\overline{\alpha^u_k}}\cdot\overset{\nabla\,\triangle}{\overline{\overset{-1}{\alpha}{}^q_v}}\;\dots\;\overset{\nabla\,\triangle}{\overline{\alpha^z_t}}\;T\,\overset{A,\,\lambda}{\overline{{}^{m\,\dots\,n}_{p\,\dots\,u}}}\;\square\;\overset{B,\,\mu}{\overline{{}^{v\,\dots\,w}_{l\,\dots\,z}}}\;\triangle$$

$\overset{\#\,\square}{\overline{|\alpha|}}$ indicando il modulo del determinante degli $\overset{\#\,\square}{\overline{\alpha^r_s}}$. (Trascuriamo l'eventuale effetto del segno di questo determinante nella legge di trasformazione, perchè non significativo ai fini di questo lavoro, e del resto facilmente introducibile).

Dato un tensore relativo ad un certo spazio, è sempre possibile pensare i suoi indici (ed il suo peso) come appartenenti a più spazi. Anzichè scrivere cioè $T\,\overset{A}{\overline{{}^{i\,k}_{\;j}}}$ (peso 0) scriveremo, ad es., $T\,\overset{A,\,1}{\overline{{}^{i}_{\;j}}}\;\overset{B,\,-1}{\overline{{}^{k}}}$ (dove B ha le stesse dimensioni di A), nel senso che potremo compiere trasformazioni di base indipendentemente nei due spazi; riotterremo allora il tensore originario come caso particolare. Questa operazione potrà essere utile in particolare per considerare separatamente gli indici di derivazione.

Quando un tensore è un concomitante, e cioè è funzione di altri (per i quali indichiamo un solo spazio C, o D, ecc. per semplicità, ma possono esservene più, compresi A e B):

$$T\overset{A}{\overline{{}^{i\ldots}_{j\ldots}}}\,\overset{B}{\overline{{}^{r\ldots}_{s\ldots}}} = T\overset{A}{\overline{{}^{i\ldots}_{j\ldots}}}\,\overset{B}{\overline{{}^{r\ldots}_{s\ldots}}}\Big(S\overset{C}{\overline{{}^{m\ldots}_{n\ldots}}}\,;\; R\overset{D}{\overline{{}^{k\ldots}_{h\ldots}}}\,;\ldots\Big) \tag{1.1}$$

mediante relazioni funzionali indipendenti dai sistemi di base scelti negli spazi, vale a dire senza limitazioni per i valori delle componenti di $S\overset{C}{\overline{{}^{n\ldots}_{m\ldots}}}$, $R\overset{D}{\overline{{}^{k\ldots}_{p\ldots}}}$, ..., le derivate

$$\frac{\partial T\overset{A}{\overline{{}^{i\ldots}_{j\ldots}}}\,\overset{B}{\overline{{}^{r\ldots}_{s\ldots}}}}{\partial S\overset{C}{\overline{{}^{m\ldots}_{n\ldots}}}} \equiv Q\overset{A}{\overline{{}^{i\ldots}_{j\ldots}}}\,\overset{B}{\overline{{}^{r\ldots}_{s\ldots}}}\,\overset{C}{\overline{{}^{n\ldots}_{m\ldots}}}$$

hanno carattere tensoriale relativamente a tutti gli indici che vi compaiono. Ciò è immediato pensando ad es. $S\overset{C}{\overline{{}^{m\ldots}_{n\ldots}}}$ come funzione di un parametro σ in modo che nella

$$dS\overset{C}{\overline{{}^{m\ldots}_{n\ldots}}} = R\overset{C}{\overline{{}^{m\ldots}_{n\ldots}}}\, d\sigma$$

$R\overset{C}{\overline{{}^{m\ldots}_{n\ldots}}}$ sia un tensore arbitrario; così si può scrivere

$$\frac{dT\overset{A}{\overline{{}^{i\ldots}_{j\ldots}}}\,\overset{B}{\overline{{}^{r\ldots}_{s\ldots}}}}{d\sigma} = \frac{\partial T\overset{A}{\overline{{}^{i\ldots}_{j\ldots}}}\,\overset{B}{\overline{{}^{r\ldots}_{s\ldots}}}}{\partial S\overset{C}{\overline{{}^{m\ldots}_{n\ldots}}}}\, R\overset{C}{\overline{{}^{m\ldots}_{n\ldots}}}$$

ove il primo membro è ovviamente un tensore e l'asserto segue dal teorema del quoziente.

Ora, per una trasformazione infinitesima di base in uno spazio A è:

$$\overset{A}{\overline{\alpha^i_j}} \cong \delta^i_j + a^i_j\,; \qquad \overset{A}{\overline{\overset{-1}{\alpha}{}^i_j}} \cong \delta^i_j - a^i_j \tag{1.2}$$

con a^i_j infinitesimi arbitrari, e si ha per qualunque tensore T

$$dT\overset{\overline{A,\lambda}}{{}^{i\dots j}_{k\dots m}}\overset{\overline{B}}{{}^{r\dots}_{s\dots}} = -a^b_a\Big(\overset{\overline{A}}{\mathfrak{D}^a_b}\,T\overset{\overline{A,\lambda}}{{}^{i\dots j}_{k\dots m}}\overset{\overline{B}}{{}^{r\dots}_{s\dots}}\Big)$$

ove

$$\Big(\overset{\overline{A}}{\mathfrak{D}^a_b}T\Big) \equiv \Big(\overset{\overline{A}}{\mathfrak{D}^a_b}\,T\overset{\overline{A,\lambda}}{{}^{i\dots j}_{k\dots m}}\overset{\overline{B}}{{}^{r\dots}_{s\dots}}\Big) \equiv \overset{\overline{A}}{\delta^i_b}\,T\overset{\overline{A,\lambda}}{{}^{a\dots j}_{k\dots m}}\overset{\overline{B}}{{}^{r\dots}_{s\dots}} + \dots\,\overset{\overline{A}}{\delta^j_b}\,T\overset{\overline{A,\lambda}}{{}^{i\dots a}_{k\dots m}}\overset{\overline{B}}{{}^{r\dots}_{s\dots}} -$$

$$- \overset{\overline{A}}{\delta^a_k}\,T\overset{\overline{A,\lambda}}{{}^{i\dots j}_{b\dots m}}\overset{\overline{B}}{{}^{r\dots}_{s\dots}} - \dots - \overset{\overline{A}}{\delta^a_m}\,T\overset{\overline{A,\lambda}}{{}^{i\dots j}_{k\dots b}}\overset{\overline{B}}{{}^{r\dots}_{s\dots}} - \lambda\overset{\overline{A}}{\delta^a_b}\,T\overset{\overline{A,\lambda}}{{}^{i\dots j}_{k\dots m}}\overset{\overline{B}}{{}^{r\dots}_{s\dots}}$$

è un tensore con due indici a e b in A in più rispetto a T, se T non era in A scalare di peso 0, nel qual caso $\Big(\overset{\overline{A}}{\mathfrak{D}^a_b}\,T\Big) \equiv 0$.

Operando con le (1.2) sui due membri della (1.1) si ottengono le «identità di struttura» in A:

$$\Big(\overset{\overline{A}}{\mathfrak{D}^a_b}\,T\Big) = \frac{\partial T}{\partial S}\Big(\overset{\overline{A}}{\mathfrak{D}^a_b}\,S\Big) + \frac{\partial T}{\partial R}\Big(\overset{\overline{A}}{\mathfrak{D}^a_b}\,R\Big) + \dots \tag{1.3}$$

e simili in ogni altro spazio.

È interessante notare che l'operatore $\overset{\overline{A}}{\mathfrak{D}^a_b}$ gode della proprietà:

$$\Big(\overset{\overline{A}}{\mathfrak{D}^a_b}(Q\cdot T)\Big) \equiv \Big(\overset{\overline{A}}{\mathfrak{D}^a_b}Q\Big)\cdot T + Q\cdot\Big(\overset{\overline{A}}{\mathfrak{D}^a_b}T\Big)$$

e che se nella (1.1) è possibile separare gli indici di uno spazio in spazi diversi, le identità di struttura di tale spazio vengono separate nelle identità per i diversi spazi (tutte del resto valide anche quando gli spazi coincidevano), la cui somma membro a membro riproduce l'identità originaria.

Esempio. Consideriamo il concomitante tensoriale

$$T\overset{\overline{A}}{{}^{i}}\overset{\overline{B}}{{}_{j}} \equiv S\overset{\overline{A}}{{}^{i}}\overset{\overline{B,\lambda}}{{}_{k}}\,P\overset{\overline{B,-\lambda}}{{}^{k}{}_{j}}\,.$$

È:

$$(\overset{A}{\mathfrak{D}}{}^a_b \overset{A}{T}{}^{i}{}_{\overset{B}{j}}) = \overset{A}{\delta}{}^i_b \overset{A}{T}{}^{a}{}_{\overset{B}{j}} \,;$$

$$(\overset{A}{\mathfrak{D}}{}^a_b \overset{A}{S}{}^{r}{}_{\overset{B,\,\lambda}{s}}) = \overset{A}{\delta}{}^r_b \overset{A}{S}{}^{a}{}_{\overset{B,\,\lambda}{s}} \,;$$

$$(\overset{A}{\mathfrak{D}}{}^a_b P^{r}{}_{\overset{B,\,-\lambda}{s}}) = 0 \,;$$

$$(\overset{B}{\mathfrak{D}}{}^a_b \overset{A}{T}{}^{i}{}_{\overset{B}{j}}) = - \overset{B}{\delta}{}^a_j \overset{A}{T}{}^{i}{}_{\overset{B}{b}} \,;$$

$$(\overset{B}{\mathfrak{D}}{}^a_b \overset{A}{S}{}^{r}{}_{\overset{B,\,\lambda}{s}}) = - \overset{B}{\delta}{}^a_s \overset{A}{S}{}^{r}{}_{\overset{B,\,\lambda}{b}} - \lambda \overset{B}{\delta}{}^a_b \overset{A}{S}{}^{r}{}_{\overset{B,\,\lambda}{s}} \,;$$

$$(\overset{B}{\mathfrak{D}}{}^a_b P^{r}{}_{\overset{B,\,-\lambda}{s}}) = \overset{B}{\delta}{}^r_b P^{a}{}_{\overset{B,\,-\lambda}{s}} - \overset{B}{\delta}{}^a_s P^{r}{}_{\overset{B,\,-\lambda}{b}} + \lambda \overset{B}{\delta}{}^a_b P^{r}{}_{\overset{B,\,-\lambda}{s}} \,;$$

$$\frac{\partial \overset{A}{T}{}^{i}{}_{\overset{B}{j}}}{\partial \overset{A}{S}{}^{r}{}_{\overset{B,\,\lambda}{s}}} = \overset{A}{\delta}{}^i_r P^{s}{}_{\overset{B,\,-\lambda}{j}} \,;$$

$$\frac{\partial \overset{A}{T}{}^{i}{}_{\overset{B}{j}}}{\partial P^{r}{}_{\overset{B,\,\lambda}{s}}} = \overset{A}{S}{}^{i}{}_{\overset{B,\,\lambda}{r}} \overset{B}{\delta}{}^s{}_j \,;$$

con le quali è immediato verificare le identità di struttura.

Se avessimo considerato

$$\overset{C}{T}{}^{i}{}_{j} = S^{i}{}_{\overset{C,\,\lambda}{k}} P^{k}{}_{\overset{C,\,-\lambda}{j}} \tag{1.4}$$

le precedenti identità sarebbero restate valide con C in luogo di A e B, mentre con le (1.3) dalle (1.4) sarebbero state ottenute solamente le somme delle identità in A e B.

2. La derivazione, le affinità e gli oggetti geometrici differenziali.

La derivata ordinaria di un tensore $T\overset{A}{\overline{{}^{i\ldots}_{j\ldots}}}\overset{B}{\overline{{}^{m\ldots}_{n\ldots}}}$ rispetto ad uno di M parametri $\{x^k\}$ « di posizione », verrà indicata con

$$T\overset{A}{\overline{{}^{i\ldots}_{j\ldots}}}\overset{B}{\overline{{}^{m\ldots}_{n\ldots}}}{}_{,k}\,.$$

Quando sia assegnato il parallelismo locale nei vari spazi A, B, ecc., tramite i coefficienti di connessione affine (o « affinità ») $\overset{A}{\overline{\Gamma^i_{jk}}}$, $\overset{B}{\overline{\Gamma^i_{jk}}}$, si definisce la derivazione covariante mediante la

$$T\overset{A}{\overline{{}^{j\ldots}_{i\ldots}}}\,\square\,\overset{B}{\overline{{}^{m\ldots}_{n\ldots}}}\,\triangle{}_{;k} \equiv T\overset{A}{\overline{{}^{i\ldots}_{j\ldots}}}\,\square\,\overset{B}{\overline{{}^{m\ldots}_{n\ldots}}}\,\triangle{}_{,k} + (\overset{A}{\overline{\mathfrak{D}^a_b}}\,T)\,\overset{A\,\square}{\overline{\Gamma^b_{ak}}} + (\overset{B}{\overline{\mathfrak{D}^a_b}}\,T)\,\overset{B\,\triangle}{\overline{\Gamma^b_{ak}}}\,.$$

Così intanto si osserva che per le identità di struttura (1.3) è estendibile alla derivazione covariante dei concomitanti la regola di derivazione ordinaria per le funzioni composte:

$$T(S, Q)_{;k} = \frac{\partial T}{\partial S} S_{;k} + \frac{\partial T}{\partial Q} Q_{;k}$$

La legge di trasformazione dei coefficienti delle affinità per cambiamenti di base, ad es. in A, è:

$$\overset{A\,\#}{\overline{\Gamma^i_{jk}}}{}' = \Big(\overset{A\,\#\,\square}{\overline{\overset{-1}{\alpha}{}^i_m}}\;\overset{A\,\#\,\square}{\overline{\alpha^n_j}}\;\overset{A\,\square}{\overline{\Gamma^m_{np}}} + \overset{A\,\#\,\square}{\overline{\overset{-1}{\alpha}{}^i_m}}\;\overset{A\,\#\,\square}{\overline{\alpha^m_j}}{}_{,p}\Big)\frac{\partial x^p}{\partial x'^k}\,.$$

Potremmo anche usare nello spazio tangente agli $\{x^k\}$ basi anolonome e scrivere per il passaggio dalla base generale $\oplus$ alla $\otimes$:

$$\overset{A\,\#}{\overline{\Gamma^i_{jk}}}_{\otimes} = \Big(\overset{A\,\#\,\square}{\overline{\overset{-1}{\alpha}{}^i_m}}\;\overset{A\,\#\,\square}{\overline{\alpha^n_j}}\;\overset{A\,\square}{\overline{\Gamma^m_{np}}}_{\oplus} + \overset{A\,\#\,\square}{\overline{\overset{-1}{\alpha}{}^i_m}}\;\overset{A\,\#\,\square}{\overline{\alpha^m_j}}{}_{,p\,\oplus}\Big)\,\overset{\otimes\,\oplus}{\alpha^p_k}\,. \tag{2.1}$$

Un insieme P^Σ $(\Sigma = 0, 1, \ldots, n)$ di funzioni che trasformi al cambiare della base in A con la regola

$$\overset{A\,\#}{\overline{P^\Lambda}} = \mathfrak{F}^\Lambda\Big(\overset{A\,\square}{\overline{P^\Sigma}}\;;\;\overset{A\,\#\,\square}{\overline{\alpha^r_s}}\;;\;\overset{A\,\#\,\square}{\overline{\alpha^r_s}}{}^{\otimes}_{,k}\;;\;\overset{A\,\#\,\square}{\overline{\alpha^r_s}}{}^{\otimes}_{,kj}\;;\ldots\Big) \equiv \mathfrak{F}^\Lambda\Big(\overset{A\,\square}{\overline{P^\Sigma}}\;;\;\overset{A\,\#\,\square}{\overline{\alpha}}{}^{\otimes}\Big) \tag{2.2}$$

è un oggetto geometrico differenziale in A di ordine $p+1$, se le derivate degli $\overset{A\,\#\,\square}{\overline{\alpha^r_s}}$ compaiono fino alle p-esime e se le funzioni $\mathcal{F}^A$ rispettano le ovvie proprietà gruppali dei coefficienti di trasformazione, quali

$$\mathcal{F}^A[\mathcal{F}^\Sigma(\overset{A\,\bigcirc}{\overline{P^\Omega}};\ \overset{A\,\square\,\bigcirc}{\overline{\alpha}}{}^{\oplus});\ \overset{A\,\#\,\square}{\overline{\alpha}}{}^{\oplus}] \equiv \mathcal{F}^A(\overset{A\,\bigcirc}{\overline{P^\Omega}};\ \overset{A\,\#\,\bigcirc}{\overline{\alpha}}{}^{\oplus});$$

$$\mathcal{F}^A(\overset{A\,\square}{\overline{P^\Sigma}};\ \overset{A}{\overline{I}}{}^{\oplus}) \equiv \overset{A\,\square}{\overline{P^A}};$$

con $\overset{A\,\#\,\square}{\overline{\alpha}}{}^{\oplus}$ è stato indicato l'insieme degli $\overset{A\,\#\,\square}{\overline{\alpha^r_s}}$ in A e delle loro derivate rispetto alle coordinate $\oplus$; $\overset{A}{\overline{I}}{}^{\oplus}$ è l'identità: $\overset{A}{\overline{\alpha^i_j}} = \delta^i_j$ nel punto considerato e derivate tutte nulle.

È naturale estendere tale definizione a più spazi A, B, ecc. inserendo i coefficienti di trasformazione (con le derivate) di tutti quegli spazi nelle $\mathcal{F}^A$. In particolare uno degli spazi A, B, ecc., potrebbe coincidere con lo spazio tangente.

Nel caso particolare $p=0$ ricadono anche i tensori. Oggetti differenziali di ordine 2 sono le affinità (2.1).

Oggetti di ordine $p+1$ sono anche i tensori con le loro derivate ordinarie fino alla p-esima: le relazioni (2.2) sono in questo caso lineari ed omogenee nei $\overset{A}{\overline{P^\Sigma}}$.

Ricordiamo l'oggetto del 2° ordine nello spazio tangente:

$$\overset{\otimes}{Q}{}^i_{jk} = \overset{-1}{\alpha}{}^i_r\, \alpha^s_j\, \alpha^t_k\, \overset{\oplus}{Q}{}^r_{st} + \left(\alpha^r_{k,j} - \alpha^r_{j,k}\right) \overset{-1}{\alpha}{}^i_r \tag{2.3}$$

che è l'« oggetto di anolonomia » se è nullo in basi olonome (rimanendo nelle quali il secondo addendo è sempre nullo).

3. Le identità di struttura per oggetti geometrici concomitanti di altri.

Sia P^A un oggetto geometrico funzione degli oggetti Q^Σ, R^Ω, ecc. sicchè le sue « componenti » sono funzioni p^A di classe opportuna delle componenti Q^Σ, R^Ω, ecc.:

$$P^A = p^A(Q^\Sigma, R^\Omega, \ldots) \tag{3.1}$$

ove abbiamo omesso le indicazioni degli spazi A, B, ecc. e quelle delle rispettive basi. In nuove basi

$$P'^{A} = p^{A}(Q'^{\Sigma}, R'^{\Omega}, \ldots) \tag{3.2}$$

con

$$\left\{\begin{aligned} P'^{A} &= \mathfrak{P}^{A}\,(P^{\Xi};\, \alpha^{\varrho};\, \alpha^{\varrho}{}_{,j};\, \ldots) \\ Q'^{\Sigma} &= \mathfrak{Q}^{\Sigma}\,(Q^{\Gamma};\, \alpha^{\varrho};\, \alpha^{\varrho}{}_{,j};\, \ldots) \\ R'^{\Omega} &= \mathfrak{R}^{\Omega}(R^{\Pi};\, \alpha^{\varrho};\, \alpha^{\varrho}{}_{,j};\, \ldots) \end{aligned}\right. \tag{3.3}$$

gli α^{ϱ} indicando l'insieme dei coefficienti $\overline{\alpha^r_s}$ di tutti gli spazi interessati, con un unico indice ϱ di numerazione. Indichiamo con I^{ϱ} i valori di α^{ϱ} all'identità. Dunque:

$$\begin{aligned} P'^{A} = p^{A}[\mathfrak{Q}^{\Sigma}(Q^{\Gamma};\, \alpha^{\varrho};\, \alpha^{\varrho}{}_{,j};\, \ldots),\, \mathfrak{R}^{\Omega}(R^{\Pi};\, \alpha^{\varrho};\, \alpha^{\varrho}{}_{,j};\, \ldots),\, \ldots] &\equiv \\ \equiv \mathfrak{P}^{A}[p^{\Xi}(Q^{\Gamma}, R^{\Pi}, \ldots);\, \alpha^{\varrho};\, \alpha^{\varrho}{}_{,j};\, \ldots]\,. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Ora in un dato generico punto gli α^{ϱ}, $\alpha^{\varrho}{}_{,j}$, ecc. possono essere scelti arbitrariamente, a parte le limitazioni imposte, ad es., in basi olonome dalla simmetria delle derivate.

La precedente relazione (3.4) è pertanto una identità per le p^{A}, che comporta le seguenti:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial \mathfrak{P}^{A}}{\partial \overset{A}{\overline{\alpha^r_s}}} &= \frac{\partial p^{A}}{\partial Q'^{\Sigma}} \frac{\partial \mathfrak{Q}^{\Sigma}}{\partial \overset{A}{\overline{\alpha^r_s}}} + \frac{\partial p^{A}}{\partial R'^{\Omega}} \frac{\partial \mathfrak{R}^{\Omega}}{\partial \overset{A}{\overline{\alpha^r_s}}} + \cdots, \\ \frac{\partial \mathfrak{P}^{A}}{\partial \overset{A}{\overline{\alpha^r_{s,j}}}} &= \frac{\partial p^{A}}{\partial Q'^{\Sigma}} \frac{\partial \mathfrak{Q}^{\Sigma}}{\partial \overset{A}{\overline{\alpha^r_{s,j}}}} + \frac{\partial p^{A}}{\partial R'^{\Omega}} \frac{\partial \mathfrak{R}^{\Omega}}{\partial \overset{A}{\overline{\alpha^r_{s,j}}}} + \cdots, \end{aligned}\right. \tag{3.5}$$

ecc., per tutte le derivate indipendenti degli $\overset{A}{\overline{\alpha^r_s}}$, e per tutti gli spazi A, B, ... Si deve in esse tener conto delle (3.3). Le (3.5) con le (3.3) implicano le (3.4) poichè queste sono ovvie all'identità. Anzi, per le proprietà gruppali delle α^{ϱ} basta limitarsi alle (3.5) calcolate alla identità, ottenendo così le « identità di struttura » cercate.

I primi membri delle (3.5) calcolati all'identità sono funzioni dei soli P^{Ξ}; li indicheremo con $\mathfrak{P}^{A}_{\varrho}$, $\mathfrak{P}^{A}_{\varrho|j}$, ecc., e similmente nei secondi membri per i secondi fattori dei singoli monomi, cioè:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}^A_\varrho &= \frac{\partial p^A}{\partial Q^\Sigma} \mathcal{Q}^\Sigma_\varrho + \frac{\partial p^A}{\partial R^\Omega} \mathcal{R}^\Omega_\varrho + \ldots \\ \mathcal{T}^A_{\varrho|j} &= \frac{\partial p^A}{\partial Q^\Sigma} \mathcal{Q}^\Sigma_{\varrho|j} + \frac{\partial p^A}{\partial R^\Omega} \mathcal{R}^\Omega_{\varrho|j} + \ldots \end{aligned} \tag{3.6}$$

ecc. Vale ancora l'osservazione fatta per la (1.3) che una eventuale separazione degli indici di uno spazio in più spazi che venga ammessa da p^A, divide le corrispondenti identità in più identità separate.

Nel caso di tensori funzione di altri le uniche identità di struttura che sussistono sono le prime delle (3.5) per i vari spazi. Se P^A è un tensore $T^{\overline{\overline{A}}}{}^{i\ldots}_{j\ldots}$ allora

$$\left(\frac{\partial \mathcal{T}^A}{\partial \overset{\underline{A}}{\alpha^r_s}}\right)_I \quad \text{è} \quad \left(\frac{\partial \mathcal{T}^{\overline{\overline{A}}}{}^{i\ldots}_{j\ldots}}{\partial \overset{\underline{A}}{\alpha^r_s}}\right)_I \equiv -\left(\overset{\underline{A}}{\mathcal{D}}{}^s_r \, \overset{\underline{A}}{T}{}^{i\ldots}_{j\ldots}\right).$$

4. Realizzazioni geometriche, loro concomitanza, e conseguenti identità di struttura.

Togliamo nelle (3.3) la restrizione che i parametri α^ϱ siano i coefficienti di un cambiamento di base in uno spazio lineare, considerandoli come distinguenti gli elementi di un gruppo continuo le cui leggi di composizione siano le

$$\underset{3}{\alpha}{}^\tau = f^\tau(\underset{2}{\alpha}; \underset{1}{\alpha}) \tag{4.1}$$

e le cui realizzazioni quali P^A, soddisfacenti leggi del tipo

$$P'^A = \mathcal{T}^A(P^\Xi; \alpha^\varrho),$$

sostituiscono gli spazi tensoriali.

Posto

$$\underset{2}{f}{}^{\tau}_{\varrho}(\underset{2}{\alpha};\underset{1}{\alpha}) \equiv \frac{\partial f^{\tau}(\underset{2}{\alpha};\underset{1}{\alpha})}{\partial \underset{2}{\alpha}{}^{\varrho}}$$

$$\underset{1}{f}{}^{\tau}_{\varrho}(\underset{2}{\alpha};\underset{1}{\alpha}) \equiv \frac{\partial f^{\tau}(\underset{2}{\alpha};\underset{1}{\alpha})}{\partial \underset{1}{\alpha}{}^{\varrho}}$$

si ottiene che le derivate $\alpha^{\varrho}{}_{,i}$ devono soddisfare le leggi di composizione

$$\underset{3}{\alpha}{}^{\tau}{}_{,i} = \underset{2}{f}{}^{\tau}_{\sigma}(\underset{2}{\alpha};\underset{1}{\alpha})\,\underset{2}{\alpha}{}^{\sigma}{}_{,i} + \underset{1}{f}{}^{\tau}_{\sigma}(\underset{2}{\alpha};\underset{1}{\alpha})\,\underset{1}{\alpha}{}^{\sigma}{}_{,i} \tag{4.2}$$

e simili per le derivate di ordine più elevato, a parte le semplificazioni provenienti dalle proprietà gruppali delle f^{τ}, quali

$$\underset{2}{f}{}^{\tau}_{\varrho}(\alpha; I) \equiv \underset{1}{f}{}^{\tau}_{\varrho}(I;\alpha) \equiv \delta^{\tau}_{\varrho}$$

$$\underset{2}{f}{}^{\tau}_{\varrho}(\alpha; \overset{-1}{\alpha}) \cdot \underset{2}{f}{}^{\varrho}_{\sigma}(I;\alpha) \equiv \delta^{\tau}_{\sigma}$$

e analoga per $\underset{1}{f}$; $\overset{-1}{\alpha}$ è tale che

$$f^{\tau}(\alpha;\overset{-1}{\alpha}) = f^{\tau}(\overset{-1}{\alpha};\alpha) = I^{\tau}$$

I^{τ} essendo i valori dei parametri α^{τ} per l'identità.

Diremo « realizzazioni geometriche » gli enti ubbidienti le (3.3) col presente significato.

Valgono ancora, per le (3.1), le (3.4) e le identità di struttura (3.6), dove ad es. è

$$\mathfrak{Q}^{\Sigma}_{\varrho|j} \equiv \left(\frac{\partial \mathfrak{Q}^{\Sigma}}{\partial \alpha^{\varrho}{}_{,j}}\right)_{I},$$

I indicando che sono stati sostituiti ai parametri i valori I^{ϱ} relativi all'identità, e lo zero alle loro derivate. Le derivate degli α^{ϱ} possono infatti considerarsi arbitrarie, sempre rispettando le relazioni fra le derivate miste da cui intendiamo ora svincolarci.

5. Estensione locale del concetto di realizzazione geometrica.

Consideriamo in luogo delle derivate prime $\alpha^\varrho{}_{,i}$ altri parametri β^ϱ_i soddisfacenti la legge di composizione

$$\underset{3}{\beta}{}^\tau_i = \underset{2}{f}{}^\tau_\sigma(\underset{2}{\alpha};\underset{1}{\alpha})\,\underset{2}{\beta}{}^\sigma_i + \underset{1}{f}{}^\tau_\sigma(\underset{2}{\alpha};\underset{1}{\alpha})\,\underset{1}{\beta}{}^\sigma_i \tag{5.1}$$

al posto della (4.2). Tali β^τ_i possono pensarsi generalizzare gli $\alpha^\tau{}_{,i}$ nello stesso modo in cui nello spazio tangente i coefficienti di cambiamento anolonomo di base $\overset{\otimes\,\oplus}{\alpha}{}^s_r$ generalizzavano i $\partial x^s/\partial x'^r$.

Anzi potremmo introdurre tutta una famiglia di $\overset{(a)}{\beta}{}^\tau_i$ $(a=1,\dots,p)$ soddisfacenti separatamente le (5.1).

Ripetiamo il procedimento introducendo tutta una famiglia di $\overset{(a,b)}{\gamma}{}^\tau_{ij}$ al posto di $\overset{(a)}{\beta}{}^\tau_{i,j}$ (non c'è simmetria in i e j). Questi ubbidiranno alla legge di composizione

$$\underset{3}{\overset{(a,b)}{\gamma}}{}^\tau_{ij} = \underset{2}{f}{}^\tau_\varrho\,\underset{2}{\overset{(a,b)}{\gamma}}{}^\varrho_{ij} + \underset{1}{f}{}^\tau_\varrho\,\underset{1}{\overset{(a,b)}{\gamma}}{}^\varrho_{ij} + \underset{22}{f}{}^\tau_{\varrho\sigma}\,\underset{2}{\overset{(a)}{\beta}}{}^\varrho_i\,\underset{2}{\overset{(b)}{\beta}}{}^\sigma_j + \underset{11}{f}{}^\tau_{\varrho\sigma}\,\underset{1}{\overset{(a)}{\beta}}{}^\varrho_i\,\underset{1}{\overset{(b)}{\beta}}{}^\sigma_j + \underset{12}{f}{}^\tau_{\varrho\sigma}\big(\underset{2}{\overset{(a)}{\beta}}{}^\varrho_i\,\underset{1}{\overset{(b)}{\beta}}{}^\sigma_j + \underset{1}{\overset{(a)}{\beta}}{}^\varrho_i\,\underset{2}{\overset{(b)}{\beta}}{}^\sigma_j\big) \tag{5.2}$$

ove le notazioni per le derivate seconde delle $f^\tau(\underset{2}{\alpha};\underset{1}{\alpha})$ sono ovvie.

Potremmo anche introdurre dei $\overset{(c)}{\gamma}{}^\varrho_{ij}$ « disaccoppiati » dai $\overset{(a)}{\beta}{}^\tau_{i,j}$ e soddisfacenti la (5.2). E così via per un più alto numero di indici già di derivazione.

Estendiamo il concetto di realizzazione geometrica richiedendo invece delle (3.3) ad es. la

$$P'^A = \mathfrak{F}^A(P^\Xi;\ \alpha^\varrho;\ \overset{(a)}{\beta}{}^\varrho_i\ ;\ \overset{(c)}{\gamma}{}^\varrho_{ij}\ ;\ \overset{(a,b)}{\gamma}{}^\varrho_{ij}\ ;\ \dots)\,. \tag{5.3}$$

Così la (2.1) può ad es. suggerire la legge generalizzata

$$\underset{\otimes}{\overset{\underline{A\,\#}\;(a)}{\Gamma^i_{jk}}} = \Big(\overset{\underline{A\,\#\,\square}}{\overset{-1}{\alpha}{}^i_m}\ \overset{\underline{A\,\#\,\square}}{\alpha^n_j}\ \underset{\oplus}{\overset{\underline{A\,\square}\;(a)}{\Gamma^m_{np}}} + \overset{\underline{A\,\#\,\square}}{\overset{-1}{\alpha}{}^i_m}\ \overset{\underline{A\,(a)\,\#\,\square}}{\beta^m_j}\ {}_{\underset{\oplus}{p}}\Big)\ \overset{\otimes\,\oplus}{\alpha^p_k}\,.$$

mentre la (2.3) diverrebbe

$$\overset{\otimes}{\Omega}{}^{i(a)}_{jk} = \overset{\otimes\,\oplus}{\overset{-1}{\alpha}{}^i_s}\ \overset{\otimes\,\oplus}{\alpha^m_j}\ \overset{\otimes\,\oplus}{\alpha^n_k}\ \overset{\oplus}{\Omega}{}^{s(a)}_{mn} + \overset{\otimes\,\oplus}{\overset{-1}{\alpha}{}^i_r}\ \big(\underset{\otimes}{\overset{(a)}{\beta}}{}^r_{kj} - \underset{\otimes}{\overset{(a)}{\beta}}{}^r_{jk}\big)$$

ambedue in accordo con le relazioni di composizione.

Tutto questo ha senso perchè nelle (3.1) e (3.2) la struttura delle funzioni p^A ha un valore locale e potrebbe benissimo o essere compatibile con trasformazioni di tipo (5.3), o essere facilmente generalizzabile a tale scopo.

Per comodità, nelle realizzazioni così estese, potremo indicare con λ^ϱ l'insieme dei parametri α^ϱ, $\overset{(a)}{\beta_i^\varrho}$, $\overset{(c)}{\gamma_{ij}^\varrho}$, $\overset{(a,b)}{\gamma_{ij}^\varrho}$, ecc.

La (5.3) e simili per Q^Σ, R^Ω, si abbreviano in

$$P'^A = \mathfrak{I}^A(P^\Xi, \lambda^\varrho) \tag{5.4}$$

e per le funzioni (3.1) le identità di struttura si scrivono

$$\left(\frac{\partial \mathfrak{I}^A}{\partial \lambda^\varrho}\right)_I = \frac{\partial p^A}{\partial Q^\Sigma}\left(\frac{\partial \mathfrak{Q}^\Sigma}{\partial \lambda^\varrho}\right)_I + \frac{\partial p^A}{\partial R^\Omega}\left(\frac{\partial \mathfrak{R}^\Omega}{\partial \lambda^\varrho}\right)_I + \dots \tag{5.5}$$

i parametri $\overset{(a)}{\beta_i^\varrho}$, γ_{ij}^τ, ecc. essendo nulli alla identità.

La funzione $p^A(Q^\Xi, R^\Omega \dots)$ può però non essere concomitante con le (5.4) in generale, ma solo se vincolata con:

$$\varphi(\lambda^\varrho) = 0\,. \tag{5.6}$$

In questo caso o si generalizza la funzione, eventualmente introducendo in essa altre realizzazioni estese, o ci si limita al sottogruppo scelto dalla (5.6). In tale eventualità la (5.6) deve essere in accordo con le leggi di combinazione estese, ed in particolare deve essere verificata alla identità:

$$\varphi(I^\varrho) = 0$$

sicchè nell'intorno di I^ϱ valgono le

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda^\varrho}\right)_I d\lambda^\varrho = 0\,,$$

relazioni indipendenti dalla «posizione» in quanto tali abbiamo considerato le (4.1).

Una o più relazioni tra i parametri λ^ϱ

$$\underset{(k)}{a_\varrho}\, d\lambda^\varrho = 0 \qquad (k = 1, \dots, M;\ \varrho = 1, \dots, N;\ M \leqslant N) \tag{5.7}$$

(dove nella matrice $\underset{(k)}{\alpha_\varrho}$ un minore di ordine massimo è non nullo) necessarie per la concomitanza di p^A, alterano le identità di struttura come segue. Posto

$$d\lambda^\varrho = d\eta^\varrho - \underset{(m)}{b^\varrho}\ \underset{(m)}{a_\sigma}\, d\eta^\sigma$$

con $\underset{(m)}{b^\varrho}$ una qualsivoglia soluzione delle

$$\underset{(m)}{b^\sigma}\ \underset{(n)}{a_\sigma} = \delta_{(m)(n)}$$

i $d\lambda^\varrho$ soddisfano le (5.7), ma i $d\eta^\varrho$ possono pensarsi indipendenti. Posto ad es. per la (5.4)

$$\left(\frac{\partial \mathfrak{T}^A}{\partial \eta^\varrho}\right)_I \equiv {}_*\!\left(\frac{\partial \mathfrak{T}^A}{\partial \lambda^\varrho}\right)_I = \left(\frac{\partial \mathfrak{T}^A}{\partial \lambda^\sigma}\right)_I (\delta^\sigma_\varrho - \underset{(m)}{b^\sigma}\ \underset{(m)}{a_\varrho}) \tag{5.8}$$

dove i $(\partial \mathfrak{T}^A/\partial \lambda^\varrho)_I$ sono valutati ignorando la (5.6), è:

$$ {}_*\!\left(\frac{\partial \mathfrak{T}^A}{\partial \lambda^\varrho}\right)_I \underset{(k)}{b^\varrho} = 0 \qquad (k = 1, \ldots, M)\,. \tag{5.9}$$

Scrivendo le identità di struttura

$$ {}_*\!\left(\frac{\partial \mathfrak{T}^A}{\partial \lambda^\varrho}\right)_I = \frac{\partial p^A}{\partial Q^\Sigma}\, {}_*\!\left(\frac{\partial \mathfrak{Q}^\Sigma}{\partial \lambda^\varrho}\right)_I + \frac{\partial p^A}{\partial R^\Omega}\, {}_*\!\left(\frac{\partial \mathfrak{R}^\Omega}{\partial \lambda^\varrho}\right)_I + \ldots$$

queste non sono indipendenti per le (5.9), ma risultano tutte nondimeno verificate.

Ad es., se

$$d\lambda^{\bar\sigma} = d\lambda^{\bar\varrho} \Rightarrow a_{\bar\sigma} = -a_{\bar\varrho} = 1\,; \quad b^{\bar\sigma} = -b^{\bar\varrho} = \tfrac{1}{2}\,; \quad a_\varrho = 0 = b^\varrho \quad (\bar\varrho \neq \varrho \neq \bar\sigma)$$

è

$$ {}_*\!\left(\frac{\partial \mathfrak{T}^A}{\partial \lambda^{\bar\varrho}}\right)_I = {}_*\!\left(\frac{\partial \mathfrak{T}^A}{\partial \lambda^{\bar\sigma}}\right)_I = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial \mathfrak{T}^A}{\partial \lambda^{\bar\varrho}}\right)_I + \left(\frac{\partial \mathfrak{T}^A}{\partial \lambda^{\bar\sigma}}\right)_I\right]. \tag{5.10}$$

Le (5.7) per i vari (k) possono essere utilizzate in fasi successive indipendentemente dall'ordine, fornendo sempre il medesimo risultato.

Ovviamente, se le (5.7) permettono di ricavare alcuni $d\lambda^\varrho$ in funzione degli altri, le (5.8) permettono di esprimere le corrispondenti identità con l'asterisco in funzione delle altre.

L'operatore

$$\chi_\varrho^\sigma \equiv \underset{(m)}{a_\varrho} \underset{(m)}{b^\sigma}$$

è tale che:

$$\underset{(m)}{a_\sigma}(\delta_\varrho^\sigma - \chi_\varrho^\sigma) = 0 \,.$$

Per $\underset{(m)}{a_\sigma}$ non indipendenti, e quindi equivalenti ad un numero minore di relazioni:

$$\underset{(m')}{a_\varrho}\, d\lambda^\varrho = 0 \qquad (m' = 1, \ldots, M' < M)$$

con

$$\underset{(m)}{a_\varrho} = A_{(m)}^{(m')} \underset{(m')}{a_\varrho}$$

ed $A_{(m)}^{(m')}$ di caratteristica M', è possibile scrivere per χ_ϱ^σ:

$$\chi_\varrho^\sigma = \underset{(m')}{a_\varrho} \underset{(m')}{b^\sigma} = \underset{(m)}{a_\varrho} \underset{(m)}{b^\sigma}$$

con

$$\underset{(m)}{b^\sigma} \equiv B_{(m)}^{(m')} \underset{(m')}{b^\sigma}$$

ove

$$B_{(m)}^{(m')} A_{(m)}^{(n')} = \delta^{(m')(n')}$$

e se gli $\underset{(m')}{a_\varrho}$ sono indipendenti; $\underset{(m')}{b^\sigma}$ è una soluzione delle

$$\underset{(m')}{a_\varrho} \underset{(n')}{b^\varrho} = \delta_{(m')(n')} \,.$$

In particolare è possibile esprimere χ_ϱ^σ anche con $\underset{(m)}{a_\varrho}$ indipendenti a partire da altri $\underset{(m')}{a_\varrho}$.

Se si devono considerare due insiemi di relazioni

$$(5.11) \qquad \begin{cases} \underset{(m_1)}{a_\varrho}\, d\lambda^\varrho = 0 \,, & m_1 = 1, \ldots, M_1 \\ \underset{(m_2)}{a_\varrho}\, d\lambda^\varrho = 0 \,, & m_2 = 1, \ldots, M_2 \end{cases}$$

conviene dividere i sottospazi dei «vettori» $\underset{(m_1)}{a_\varrho}$ e $\underset{(m_2)}{a_\varrho}$ nei tre sottospazi:

1) eventuale intersezione, con base

$$\left\{\underset{(m''')}{a_\varrho}\right\}, \qquad m'''=1,\ldots,M'''<M_1,\, M_2$$

2) un supplementare al primo, con base

$$\left\{\underset{(m')}{a_\varrho}\right\}, \qquad m'=1,\ldots,M'\leqslant M_1$$

3) un supplementare al secondo, con base

$$\left\{\underset{(m'')}{a_\varrho}\right\}, \qquad m''=1,\ldots,M''\leqslant M_2$$

e scrivere per gli operatori $\underset{1}{\chi_\varrho^\sigma}$ e $\underset{2}{\chi_\varrho^\sigma}$:

$$\underset{1}{\chi_\varrho^\sigma} \equiv \underset{(m')}{a_\varrho}\,\underset{(m')}{b^\sigma} + \underset{(m''')}{a_\varrho}\,\underset{(m''')}{b^\sigma}$$

$$\underset{2}{\chi_\varrho^\sigma} \equiv \underset{(m'')}{a_\varrho}\,\underset{(m'')}{b^\sigma} + \underset{(m''')}{a_\varrho}\,\underset{(m''')}{b^\sigma}$$

avendo scelto $\underset{(m')}{b^\sigma}$, $\underset{(m'')}{b^\sigma}$, $\underset{(m''')}{b^\sigma}$, con la regola seguente.

Con l'unico indice (m), $(m=1,\ldots,M'+M''+M''')$ indichiamo successivamente i tre indici (m'), (m''), (m''') e scegliamo per $\underset{(m)}{b^\varrho}$ una soluzione delle

$$\underset{(m)}{a_\varrho}\,\underset{(n)}{b^\varrho} = \delta_{(m)(n)};$$

$\underset{1}{\chi_\varrho^\sigma}$ e $\underset{2}{\chi_\varrho^\sigma}$ risultano commutabili, e per le (5.11), nelle (5.8) può usarsi l'operatore

$$(\delta_\varrho^\sigma - \chi_\varrho^\sigma) = (\delta_\tau^\sigma - \underset{1}{\chi_\tau^\sigma})(\delta_\varrho^\tau - \underset{2}{\chi_\varrho^\tau})\,.$$

6. Altri esempi di estensione locale.

a) Estendiamo la legge di trasformazione delle derivate prime di un tensore:

$$\overset{A\,\#}{\overline{T^{i\ldots}_{\ldots j}}}{}_{,k} = \frac{\partial \overset{A}{\overline{\mathcal{T}^{i\ldots}_{\ldots j}}}}{\partial \alpha^r_s}\,\alpha^r_{s,k} + \frac{\partial \overset{A}{\overline{\mathcal{T}^{i\ldots}_{\ldots j}}}}{\partial \overset{A\,\square}{\overline{T^{m\ldots}_{\ldots n}}}}\,\overset{A\,\square}{\overline{T^{m\ldots}_{\ldots n}}}{}_{,k}$$

ove non si sono cambiate le coordinate e pertanto gli α^r_s sono gli $\overset{A\,\#\,\square}{\overline{\alpha^r_s}}$.
È:

$$\overset{A\,\#}{\overline{T^{i\ldots}_{\ldots j}}} = \overset{A}{\overline{\mathcal{T}^{i\ldots}_{\ldots j}}}\left(\overset{A\,\square}{\overline{T^{m\ldots}_{\ldots n}}}\,,\ \alpha^r_s\right) \equiv \overset{-1}{\alpha}{}^{i}_{m}\ldots\alpha^n_j\,\overset{A\,\square}{\overline{T^{m\ldots}_{\ldots n}}}$$

e quindi

$$\frac{\partial \overset{A}{\overline{\mathcal{T}^{i\ldots}_{\ldots j}}}}{\partial \alpha^r_s} = -\,\overset{-1}{\alpha}{}^{s}_{p}\,\delta^q_r\,\overset{-1}{\alpha}{}^{i}_{m}\ldots\alpha^n_j\left(\overset{A}{\overline{\mathfrak{D}^p_q}}\,\overset{A\,\square}{\overline{T^{m\ldots}_{\ldots n}}}\right)$$

e

$$\frac{\partial \overset{A}{\overline{\mathcal{T}^{i\ldots}_{\ldots j}}}}{\partial \overset{A\,\square}{\overline{T^{m\ldots}_{\ldots n}}}} = \overset{-1}{\alpha}{}^{i}_{m}\ldots\alpha^n_j\,.$$

Cambiando anche le coordinate si considera l'oggetto esteso $(T;\, T_{|k})$ con

$$\overset{A\,\#}{\overline{T^{i\ldots}_{\ldots j}}}{}^{(a)}_{\underset{\otimes}{|k}} = \left(\frac{\partial \overset{A}{\overline{\mathcal{T}^{i\ldots}_{\ldots j}}}}{\partial \alpha^r_s}\,\overset{(a)}{\beta}{}^{r}_{\underset{\oplus}{sh}} + \frac{\partial \overset{A}{\overline{\mathcal{T}^{i\ldots}_{\ldots j}}}}{\partial \overset{A\,\square}{\overline{T^{m\ldots}_{\ldots n}}}}\,\overset{A\,\square}{\overline{T^{m\ldots}_{\ldots n}}}{}^{(a)}_{\underset{\oplus}{|h}}\right)\overset{\otimes\,\oplus}{\alpha^h_k}$$

ove (a) indica da quale dei vari $\overset{(a)}{\beta}{}^r_{sh}$ viene fatta dipendere la legge di trasformazione.

b) Estendiamo la legge di trasformazione delle derivate di una realizzazione geometrica estesa (5.4). È:

$$P'^{A(\bar a)}_{\underset{\otimes}{|h}} = \left(\frac{\partial \mathcal{P}^A}{\partial P^\Xi}\,P^{\Xi(\bar a)}_{\underset{\oplus}{|m}} + \frac{\partial \mathcal{P}^A}{\partial \lambda^\varrho}\,\overset{(\bar a)}{\lambda}{}^{\varrho}_{\underset{\oplus}{m}}\right)\overset{\otimes\,\oplus}{\alpha^m_h}$$

ove $(\bar a)$ indica da quale dei diversi $\overset{(\bar a)}{\lambda^{\varrho}_{m}}$ viene fatta dipendere la legge di trasformazione.

L'operazione può essere ovviamente iterata, e porta a scrivere:

$$P'^{\Lambda}\underset{\otimes}{{}^{(\bar a,\bar b)}_{|h\;k}} = \left[\frac{\partial \mathcal{J}^{\Lambda}}{\partial P^{\Xi}} P^{\Xi}\underset{\oplus}{{}^{(\bar a,\bar b)}_{|m\;n}} + \frac{\partial \mathcal{J}^{\Lambda}}{\partial \lambda^{\varrho}} \overset{(\bar a,\bar b)}{\underset{\oplus}{\lambda^{\varrho}_{mn}}} + \frac{\partial^{2} \mathcal{J}^{\Lambda}}{\partial P^{\Xi}\,\partial \lambda^{\varrho}} \Big(\overset{(\bar a)}{P^{\Xi}{}_{|\underset{\oplus}{m}}}\; \overset{(\bar b)}{\lambda^{\varrho}_{\underset{\oplus}{n}}} + \overset{(\bar b)}{P^{\Xi}{}_{|\underset{\oplus}{n}}}\; \overset{(\bar a)}{\lambda^{\varrho}_{\underset{\oplus}{m}}}\Big) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial^{2} \mathcal{J}^{\Lambda}}{\partial \lambda^{\varrho}\,\partial \lambda^{\sigma}} \Big(\overset{(\bar a)}{\lambda^{\varrho}_{\underset{\oplus}{m}}}\; \overset{(\bar b)}{\lambda^{\sigma}_{\underset{\oplus}{n}}} + \overset{(\bar b)}{\lambda^{\varrho}_{\underset{\oplus}{n}}}\; \overset{(\bar a)}{\lambda^{\sigma}_{\underset{\oplus}{m}}}\Big)\right] \overset{\otimes}{\alpha}{}^{\overset{\oplus}{m}}_{h}\; \overset{\otimes}{\alpha}{}^{\overset{\oplus}{n}}_{k} + \left(\frac{\partial \mathcal{J}^{\Lambda}}{\partial P^{\Xi}} \overset{(\bar a)}{P^{\Xi}{}_{|\underset{\oplus}{m}}} + \frac{\partial \mathcal{J}^{\Lambda}}{\partial \lambda^{\varrho}} \overset{(\bar a)}{\lambda^{\varrho}_{\underset{\oplus}{m}}}\right) \overset{(\bar b)}{\beta}{}^{\overset{\oplus}{m}}_{hn}\; \overset{\otimes}{\alpha}{}^{\overset{\oplus}{n}}_{k}\,.$$

7. Le identità alla base delle leggi di conservazione.

Con a^{ϱ}, $\overset{(a)}{b^{\varrho}_{i}}$, $\overset{(c)}{c_{i}{}^{\varrho}{}_{j}}$, $\overset{(a,b)}{c_{i}{}^{\varrho}{}_{j}}$, ecc. funzioni arbitrarie — ed in particolare funzioni dei campi Q^{Σ}, R^{Ω}, e delle loro derivate estese e no — definiamo:

$$\tilde P^{\Lambda} \equiv \left(\frac{\partial \mathcal{J}^{\Lambda}}{\partial \alpha^{\varrho}}\right)_{I} a^{\varrho} + \left(\frac{\partial \mathcal{J}^{\Lambda}}{\partial \overset{(a)}{\beta^{\varrho}_{i}}}\right)_{I} \overset{(a)}{b^{\varrho}_{i}} + \left(\frac{\partial \mathcal{J}^{\Lambda}}{\partial \overset{(c)}{\gamma_{i}{}^{\varrho}{}_{j}}}\right)_{I} \overset{(c)}{c_{i}{}^{\varrho}{}_{j}} + \ldots \tag{7.1}$$

e similmente per $\tilde Q^{\Sigma}$, $\tilde R^{\Omega}$, ecc. Chiameremo la (7.1) «forma principale» di P^{Λ}.

È, per le identità di struttura (5.5):

$$\tilde P^{\Lambda} = \frac{\partial p^{\Lambda}}{\partial Q^{\Sigma}} \tilde Q^{\Sigma} + \frac{\partial p^{\Lambda}}{\partial R^{\Omega}} \tilde R^{\Omega} + \ldots\,. \tag{7.2}$$

Supponiamo di poter scegliere queste funzioni arbitrarie in modo che risulti ovunque identicamente

$$\tilde P^{\Lambda} = - P^{\Lambda}\cdot t \tag{7.3}$$

con t funzione dei campi Q^{Σ}, R^{Ω}, ecc.

Scelte delle funzioni τ^{k} per cui

$$t = \tau^{k}{}_{,k} \tag{7.4}$$

e soddisfatta la (7.3), la (7.2) diviene:

$$(7.5) \qquad -(P^A \tau^k)_{,k} = -P^A \tau^k{}_{,k} - \left(\frac{\partial p^A}{\partial Q^\Sigma} Q^\Sigma{}_{,k} + \frac{\partial p^A}{\partial R^\Omega} R^\Omega{}_{,k} + \dots\right)\tau^k =$$

$$= \frac{\partial p^A}{\partial Q^\Sigma}(\tilde{Q}^\Sigma - \tau^k Q^\Sigma{}_{,k}) + \frac{\partial p^A}{\partial R^\Omega}(\tilde{R}^\Omega - \tau^k R^\Omega{}_{,k}) + \dots .$$

Quanto più è elevato il numero delle identità di struttura, tanto più alto è il numero delle funzioni arbitrarie in $\tilde{P}^A$, $\tilde{Q}^\Sigma$, $\tilde{R}^\Omega$, ecc., e tanto più è agevole soddisfare le condizioni di proporzionalità tra i $\tilde{P}^A$ ed i P^A in (7.3).

Sussiste però il problema della dipendenza della forma principale (7.1) dalla « base » usata, e quindi della trasformazione alle varie « basi » di tutte le espressioni successive.

8. Le leggi di conservazione per una realizzazione geometrica funzione di un'altra e delle sue derivate estese.

Supponiamo che la realizzazione Q^Σ sia costituita da una realizzazione T^Ξ e dalla estensione delle sue derivate prime $T^{\Sigma\overset{(\bar{a})}{m}}$; con le notazioni della formula (5.4), indicando con l^ϱ l'insieme delle funzioni arbitrarie a^ϱ, $\overset{(a)}{b^\varrho_i}$, ecc. possiamo scrivere la forma principale di T^Ξ:

$$\tilde{T}^\Xi = \left(\frac{\partial \mathcal{T}^\Xi}{\partial \lambda^\varrho}\right)_I l^\varrho$$

mentre la $\tilde{T}^{\Xi\overset{(\bar{a})}{m}}$ contiene oltre a termini determinati dalla scelta fatta per $\tilde{T}^\Xi$ il contributo

$$\left(\frac{\partial \mathcal{T}^\Xi}{\partial \lambda^\varrho}\right)_I \overset{(\bar{a})}{l^\varrho_m}$$

$\overset{(\bar{a})}{l^\varrho_m}$ potendo essere altre funzioni arbitrarie.

Definendo $t^{\Xi\overset{(\bar{a})}{m}}$ tale che

$$\tilde{T}^{\Xi\overset{(\bar{a})}{m}} - \tau^k T^{\Xi\overset{(\bar{a})}{m,k}} \equiv (\tilde{T}^\Xi - \tau^k T^\Xi{}_{,k})_{,m} + t^{\Xi\overset{(\bar{a})}{m}}$$

nei $t^{\Xi\overset{(\bar{a})}{m}}$ si riversa l'arbitrarietà delle funzioni $\overset{(\bar{a})}{l^\varrho_m}$.

È, per l'ipotesi fatta su Q^{Σ}:

$$\frac{\partial p^A}{\partial Q^{\Sigma}}(\tilde{Q}^{\Sigma} - \tau^k Q^{\Sigma}{}_{,k}) = \frac{\partial p^A}{\partial T^{\Xi}}(\tilde{T}^{\Xi} - \tau^k T^{\Xi}{}_{,k}) +$$

$$+ \sum_{(\bar{a})} \frac{\partial p^A}{\partial T^{\Xi(\bar{a})}_{m}}(\tilde{T}^{\Xi(\bar{a})}_{m} - \tau^k T^{\Xi(\bar{a})}_{m,k}) = \frac{\mathfrak{D} p^A}{\mathfrak{D} T^{\Xi}}(\tilde{T}^{\Xi} - \tau^k T^{\Xi}{}_{,k}) +$$

$$+ \left\{\left(\sum_{(\bar{a})} \frac{\partial p^A}{\partial T^{\Xi(\bar{a})}_{m}}\right)(\tilde{T}^{\Xi} - \tau^k T^{\Xi}{}_{,k})\right\}_{,m} + \sum_{(\bar{a})} \frac{\partial p^A}{\partial T^{\Xi(\bar{a})}_{m}} t^{\Xi(\bar{a})}_{m},$$

ove si è indicato con

$$\frac{\mathfrak{D} p^A}{\mathfrak{D} T^{\Xi}} \equiv \frac{\partial p^A}{\partial T^{\Xi}} - \left(\sum_{(\bar{a})} \frac{\partial p^A}{\partial T^{\Xi(\bar{a})}_{m}}\right)_{,m} \tag{8.1}$$

la « derivata lagrangiana » delle funzioni p^A rispetto a T^{Ξ}.

Similmente, se in Q^{Σ} sono comprese anche una o più estensioni locali $T^{\Xi(\bar{a},\bar{b})}_{mn}$ delle derivate seconde di T^{Ξ}, poichè le loro forme principali contengono i contributi

$$\left(\frac{\partial \mathcal{C}^{\Xi}}{\partial \lambda^{\varrho}}\right)_{I} \overset{(\bar{a},\bar{b})}{l_{m}{}^{\varrho}{}_{n}}$$

con $\overset{(\bar{a},\bar{b})}{l^{\varrho}_{mn}}$ nuove funzioni arbitrarie, possiamo definire $t^{\Xi(\bar{a},\bar{b})}_{mn}$ mediante le:

$$\tilde{T}^{\Xi(\bar{a},\bar{b})}_{mn} - \tau^k T^{\Xi(\bar{a},\bar{b})}_{mn,k} = (\tilde{T}^{\Xi} - \tau^k T^{\Xi}{}_{,k})_{,n,m} + t^{\Xi(\bar{a},\bar{b})}_{mn}$$

e scrivere:

$$\frac{\partial p^A}{\partial Q^{\Sigma}}(\tilde{Q}^{\Sigma} - \tau^k Q^{\Sigma}{}_{,k}) = \frac{\mathfrak{D} p^A}{\mathfrak{D} T^{\Xi}}(\tilde{T}^{\Xi} - \tau^k T^{\Xi}{}_{,k}) +$$

$$+ \left[\left(\sum_{(\bar{a},\bar{b})} \frac{\partial p^A}{\partial T^{\Xi(\bar{a},\bar{b})}_{mn}}\right)(\tilde{T}^{\Xi} - \tau^k T^{\Xi}{}_{,k})_{,m}\right]_{,n} +$$

$$+ \left\{\left[\sum_{(\bar{a})} \frac{\partial p^A}{\partial T^{\Xi(\bar{a})}_{m}} - \left(\sum_{(\bar{a},\bar{b})} \frac{\partial p^A}{\partial T^{\Xi(\bar{a},\bar{b})}_{mn}}\right)_{,n}\right](\tilde{T}^{\Xi} - \tau^k T^{\Xi}{}_{,k})\right\}_{,m} + G^A$$

dove si è posto:

$$G^A \equiv \sum_{(\bar{a})} \left(\frac{\partial p^A}{\partial T^{\Xi(\bar{a})}_{m}} t^{\Xi(\bar{a})}_{m} \right) + \sum_{(\bar{a},\bar{b})} \left(\frac{\partial p^A}{\partial T^{\Xi(\bar{a},\bar{b})}_{mn}} t^{\Xi(\bar{a},\bar{b})}_{mn} \right)$$

e

$$\frac{\mathfrak{D}p^A}{\mathfrak{D}T^\Xi} \equiv \frac{\partial p^A}{\partial T^\Xi} - \left(\sum_{(\bar{a})} \frac{\partial p^A}{\partial T^{\Xi(\bar{a})}_{m}} \right)_{,m} + \left(\sum_{(\bar{a},\bar{b})} \frac{\partial p^A}{\partial T^{\Xi(\bar{a},\bar{b})}_{mn}} \right)_{,n,m} .$$

Concludendo, nel caso che la funzione (3.1) si riduca ad una

$$P^A = p^A(T^\Xi;\ T^{\Xi(\bar{a})}_{m};\ T^{\Xi(\bar{a},\bar{b})}_{mn})$$

le identità (7.5) divengono:

$$(8.2) \quad \left\{ (P^A \tau^m) + \left[\sum_{(\bar{a})} \frac{\partial p^A}{\partial T^{\Xi(\bar{a})}_{m}} - \left(\sum_{(\bar{a},\bar{b})} \frac{\partial p^A}{\partial T^{\Xi(\bar{a},\bar{b})}_{mn}} \right)_{,n} \right] (\tilde{T}^\Xi - \tau^k T^\Xi{}_{,k}) \right\}_{,m} +$$
$$+ \left[\left(\sum_{(\bar{a},\bar{b})} \frac{\partial p^A}{\partial T^{\Xi(\bar{a},\bar{b})}_{mn}} \right) (\tilde{T}^\Xi - \tau^k T^\Xi{}_{,k})_{,m} \right]_{,n} + G^A = - \frac{\mathfrak{D}p^A}{\mathfrak{D}T^\Xi} (\tilde{T}^\Xi - \tau^k T^\Xi{}_{,k})$$

e basta porre $G^A \equiv 0$ oppure $G^A \equiv H^{Am}{}_{,m}$, sfruttando l'arbitrarietà delle funzioni $\overset{(\bar{a})}{l^\varrho_m}$ e $\overset{(\bar{a},\bar{b})}{l^\varrho_{mn}}$ per ottenere delle leggi di conservazione, se per le « equazioni del moto » si annulla il secondo membro dell'ultima espressione. Se $A = 1, \ldots, N$, abbiamo posto $2N$ condizioni sulle funzioni arbitrarie nelle forme principali. Le rimanenti arbitrarietà danno la possibilità di avere tante diverse espressioni a primo membro della (8.2). Il secondo membro di essa si annulla, ad es., se le equazioni del moto, nel particolare sistema di basi usato, portano all'annullarsi di $\mathfrak{D}p^A/\mathfrak{D}T^\Xi$.

Ma di nuovo si affaccia il problema della dipendenza dalla « base », anche estesa, di queste condizioni.

Osservazione. Potremmo usare qualche componente di T^Ξ per introdurre in p^A una dipendenza esplicita dalle coordinate.

Per quelle componenti non è più da attendersi anche per questo motivo l'annullarsi della derivata lagrangiana come una delle equazioni del moto; tuttavia il secondo membro delle (8.2) potrebbe essere ancora nullo se restano effettuabili le opportune scelte nelle corrispondenti $\tilde{T}^\Xi$.

9. Confronto con la formulazione classica del teorema di Noether.

J. S. Blakeslee and J. D. Logan [III] ricavano le identità classiche di Noether dall'invarianza di un integrale di azione rispetto ad un gruppo continuo di trasformazioni, parametrizzate mediante m numeri reali $\varepsilon^1 \ldots \varepsilon^m$. Se L è il lagrangiano densità scalare e $y^k(t)$ sono i campi:

$$L = L\big(t;\, y^k(t);\, y^k{}_{,l}(t);\, y^k{}_{,ls}(t)\big)$$

posto

$$t'^{\alpha} = \varphi^{\alpha}(t, \varepsilon) \qquad \text{e} \qquad y'^k = \psi^k(t, y, \varepsilon)$$

si ricava

$$-\frac{\mathfrak{D}L}{\mathfrak{D}y^k}(\xi^k_s - y^k{}_{,\gamma}\,\tau^{\gamma}_s) = \frac{d}{dt^{\alpha}}\left[L\tau^{\alpha}_s + \left(\frac{\partial L}{\partial y^k{}_{,\alpha}} - \frac{d}{dt^{\beta}}\frac{\partial L}{\partial y^k{}_{,\alpha\beta}}\right)\cdot (\xi^k_s - y^k{}_{,\gamma}\tau^{\gamma}_s) + \frac{\partial L}{\partial y^k{}_{,\alpha\beta}}\frac{d}{dt^{\beta}}(\xi^k_s - y^k{}_{,\gamma}\,\tau^{\gamma}_s)\right]$$

dove

$$\xi^k_s \equiv \left(\frac{\partial \psi^k}{\partial \varepsilon^s}\right)_{\varepsilon=0} \qquad \text{e} \qquad \tau^{\alpha}_s \equiv \left(\frac{\partial \varphi^{\alpha}}{\partial \varepsilon^s}\right)_{\varepsilon=0}.$$

Tali risultati si possono ottenere facilmente dalle considerazioni del paragrafo precedente con le tre limitazioni seguenti.

a) Considerando campi la cui legge di trasformazione (3.3) dipende dai soli α^r_s dello spazio tangente e dalle loro derivate ordinarie.

b) Limitando P^A ad una densità scalare P; è allora

$$\left(\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \alpha^r_s}\right)_I = P\delta^s_r \tag{9.1}$$

e le condizioni (7.4) divengono, per le funzioni α^i_j utilizzate dagli autori citati:

$$\alpha^m_m = -\,\tau^m{}_{,m}\,,$$

τ^k rimanendo funzioni arbitrarie. Gli autori citati pongono ancor più restrittivamente

$$\alpha^i_j \equiv - \tau^i{}_{,j} .$$

Da quanto detto è evidente che si annullano quindi nella (8.2) i termini $t^{\Xi(\bar{a})}_{m}$, $t^{\Xi(\bar{a},\bar{b})}_{mn}$, e così pure G^A.

c) Ponendo infine:

$$\tau^k \equiv \varepsilon^s \tau^k_s$$

e sostituendo la notazione $\varepsilon^s \xi^k_s$ alla $\tilde{T}^\Xi$ nella (8.2).

10. Le identità di Bianchi dalle identità di struttura.

W. R. Davis [IV] generalizza tramite delle identità ottenute con metodo variazionale le identità di Bianchi per una funzione scalare di peso 1

$$P = p(T^\Sigma;\, T^\Sigma{}_{,m})$$

nella forma

$$\tau^\beta_{\alpha,\beta} \equiv 0 \tag{10.1}$$

con

$$\tau^\beta_\alpha \equiv \frac{\mathfrak{D}p}{\mathfrak{D}T^\Sigma}\, C^{\Sigma\beta}_\alpha + t^\beta_\alpha ,$$

$$t^\beta_\alpha \equiv \frac{\partial p}{\partial T^\Sigma{}_{,\beta}}\, C^\Sigma_\alpha - \delta^\beta_\alpha p ,$$

C^Σ_α e $C^{\Sigma\beta}_\alpha$ funzioni non specificate, a parte l'esistenza di condizioni gruppali, dei T^Σ, $T^\Sigma{}_{,m}$, e delle derivate ulteriori fino ad un ordine finito, e infine $\mathfrak{D}p/\mathfrak{D}T^\Sigma$ definite secondo le (8.1).

È:

$$\tau^\gamma_\alpha = U^{[\beta\gamma]}_{\alpha,\beta}$$

con

$$U^{[\beta\gamma]}_\alpha \equiv \frac{1}{2}\left[\frac{\partial p}{\partial T^\Sigma{}_{,\beta}}\, C^{\Sigma\gamma}_\alpha - \frac{\partial p}{\partial T^\Sigma{}_{,\gamma}}\, C^{\Sigma\beta}_\alpha\right].$$

Sempre per le identità suddette è

$$t^{\beta}_{\alpha,\beta} = -\frac{\mathfrak{D}p}{\mathfrak{D}T^{\Sigma}}\,C^{\Sigma}_{\alpha}$$

e la (10.1) diviene:

$$\left(\frac{\mathfrak{D}p}{\mathfrak{D}T^{\Sigma}}\,C^{\Sigma\beta}_{\alpha}\right)_{,\beta} - \frac{\mathfrak{D}p}{\mathfrak{D}T^{\Sigma}}\,C^{\Sigma}_{\alpha} \equiv 0\,.$$

Il risultato è ampliabile. Consideriamo dapprima

$$P^{A} = p^{A}(T^{\Sigma};\, T^{\Sigma}{}_{,m};\, T^{\Sigma}{}_{,mn})$$

con

$$T'^{\Sigma} = \mathfrak{T}^{\Sigma}(T^{\Omega};\, \lambda^{\varrho})$$

realizzazione geometrica estesa, e

$$P'^{A} = \mathfrak{P}^{A}(P^{\Xi};\, \lambda^{\varrho};\, \lambda^{\varrho}{}_{,m};\, \lambda^{\varrho}{}_{,mn})$$

realizzazione senza ulteriore estensione nelle derivate dei parametri. Pertanto queste potranno non essere indipendenti.

Utilizziamo la notazione

$$\frac{\mathfrak{D}\mathfrak{P}^{A}}{\mathfrak{D}\lambda^{\varrho}} \equiv \frac{\partial\mathfrak{P}^{A}}{\partial\lambda^{\varrho}} - \left(\frac{\partial\mathfrak{P}^{A}}{\partial\lambda^{\varrho}{}_{,m}}\right)_{,m} + \left(\frac{\partial\mathfrak{P}^{A}}{\partial\lambda^{\varrho}{}_{,mn}}\right)_{,mn} \tag{10.2}$$

in particolare per quei λ^{ϱ} che corrispondono agli $\tilde{\alpha}^{r}_{s}$ di un cambiamento di base, anche anolonomo, nello spazio tangente.

Le identità del tipo di Bianchi che si ottengono già per concomitanti in basi olonome, sono le

$$\left[\frac{\mathfrak{D}p^{A}}{\mathfrak{D}T^{\Sigma}}\cdot\left(\frac{\partial\mathfrak{T}^{\Sigma}}{\partial\tilde{\alpha}^{r}_{s}}\right)_{I}\right]_{,s} - \frac{\mathfrak{D}p^{A}}{\mathfrak{D}T^{\Sigma}}\,T^{\Sigma}{}_{,r} = \left[\left(\frac{\mathfrak{D}\mathfrak{P}^{A}}{\mathfrak{D}\tilde{\alpha}^{r}_{s}}\right)_{I}\right]_{,s} - P^{A}{}_{,r} \tag{10.3}$$

il secondo membro essendo nullo identicamente per P^{A} densità scalare nello spazio tangente, per le (9.1).

Per dimostrare le (10.3) notiamo che qualunque siano le funzioni U^Σ è

$$\frac{\partial p^A}{\partial T^\Sigma} U^\Sigma + \frac{\partial p^A}{\partial T^\Sigma_{,m}} U^\Sigma_{,m} + \frac{\partial p^A}{\partial T^\Sigma_{,mn}} U^\Sigma_{,mn} = \frac{\mathfrak{D} p^A}{\mathfrak{D} T^\Sigma} U^\Sigma + \{p^A[U^\Sigma]^t\}_{,t} - \{p^A[U^\Sigma]^{rs}\}_{,rs} \tag{10.4}$$

ove

$$p^A[U^\Sigma]^t \equiv \frac{\partial p^A}{\partial T^\Sigma_{,t}} U^\Sigma + \frac{\partial p^A}{\partial T^\Sigma_{,mn}} (U^\Sigma_{,m}\delta^t_n + U^\Sigma_{,n}\delta^t_m)\,,$$

e

$$p^A[U^\Sigma]^{rs} \equiv \frac{\partial p^A}{\partial T^\Sigma_{,rs}} U^\Sigma\,,$$

e che le identità di struttura si scrivono:

$$\left\{\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial \mathfrak{I}^A}{\partial \lambda^\varrho}\right)_I = \frac{\mathfrak{D} p^A}{\mathfrak{D} T^\Sigma}\left(\frac{\partial \mathfrak{T}^\Sigma}{\partial \lambda^\varrho}\right)_I + \left\{p^A\left[\left(\frac{\partial \mathfrak{T}^\Sigma}{\partial \lambda^\varrho}\right)_I\right]^m\right\}_{,m} - \\
&\qquad\qquad - \left\{p^A\left[\left(\frac{\partial \mathfrak{T}^\Sigma}{\partial \lambda^\varrho}\right)_I\right]^{mn}\right\}_{,mn} + \{p^A[T^\Sigma_{,r}]^s\} \\
&{}_*\!\left(\frac{\partial \mathfrak{I}^A}{\partial \lambda^\varrho_{,k}}\right)_I = \underset{*}{p^A}\left[\left(\frac{\partial \mathfrak{T}^\Sigma}{\partial \lambda^\varrho}\right)_I\right]^k + \{p^A[T^\Sigma_{,r}]^{sk}\} \\
&{}_*\!\left(\frac{\partial \mathfrak{I}^A}{\partial \lambda^\varrho_{,mn}}\right)_I = \underset{*}{p^A}\left[\left(\frac{\partial \mathfrak{T}^\Sigma}{\partial \lambda^\varrho}\right)_I\right]^{mn}
\end{aligned}\right. \tag{10.5}$$

i termini tra parentesi tratteggiata comparendo solamente quando è λ^ϱ coincidente con $\tilde{\alpha}^r_s$.

L'asterisco è stato aggiunto per ricordare le limitazioni che possono derivare dall'uso di basi olonome nello spazio tangente, per cui

$$\tilde{\alpha}^r_{s,k} \equiv \tilde{\alpha}^r_{k,s} \tag{10.6}$$

oltre a quelle originate dalle derivazioni, già incluse nelle espressioni utilizzate. Come già per la (5.10), la (10.6) fa sì che nella (10.5-2) e (10.5-3) i simboli con l'asterisco siano la parte simmetrica in k ed s dei corrispondenti senza asterisco. La dimostrazione di questo può farsi scrivendo le identità di struttura col procedimento (5.6)/(5.9), tenendo conto che possono anticiparsi le condizioni (10.6) a quelle originate dall'uso delle derivate ordinarie in luogo delle estese.

Calcolando la (10.2) alla identità con tutte le dette limitazioni, e sottraendo $\delta^s_r P^A$, si ottiene

$$\frac{\mathfrak{D}p^A}{\mathfrak{D}T^\Xi}\left(\frac{\partial \mathfrak{T}^\Xi}{\partial \tilde{\alpha}^r_s}\right)_I + {}^A t^s_r - {}^A\mathfrak{A}^{st}_{r,t} = \left(\frac{\mathfrak{D}\mathfrak{J}^A}{\partial \tilde{\alpha}^r_s}\right)_I - \delta^s_r P^A$$

ove

$${}^A t^s_r \equiv p^A[T^\Xi{}_{,r}]^s - \{p^A[T^\Xi{}_{,r}]^{sk}\}_{,k} - \delta^s_r P^A$$

e

$${}^A\mathfrak{A}^{st}_r \equiv p^A\left[\left(\frac{\partial \mathfrak{T}^\Xi}{\partial \tilde{\alpha}^r_s}\right)_I\right]^t - \underset{*}{p}^A\left[\left(\frac{\partial \mathfrak{T}^\Xi}{\partial \tilde{\alpha}^r_s}\right)_I\right]^t + \left\{p^A\left[\left(\frac{\partial \mathfrak{T}^\Xi}{\partial \tilde{\alpha}^r_s}\right)_I\right]^{nt} - \underset{*}{p}^A\left[\left(\frac{\partial \mathfrak{T}^\Xi}{\partial \tilde{\alpha}^r_s}\right)_I\right]^{nt}\right\}_{,n}.$$

Ma $P^A{}_{,r}$ è del tipo (10.4) con $U^\Xi = T^\Xi{}_{,r}$ e si ottiene

$${}^A t^s_{r,s} = -\frac{\mathfrak{D}p^A}{\mathfrak{D}T^\Xi} T^\Xi{}_{,r},$$

mentre, per la derivazione, si ha la (10.3) se

$$\text{(10.7)} \qquad {}^A\mathfrak{A}^{st}_{r,ts} = 0\,.$$

Per quanto detto più sopra circa l'effetto della (10.6), anche quando P^A dipende dalle derivate dei λ^ϱ, ${}^A\mathfrak{A}^{st}_r$ in basi olonome è antisimmetrica in s, t, e la (10.7) è verificata.

Se p^A è la lagrangiana della relatività generale in basi olonome:

$$p(g_{ij};\, g_{ij,k};\, g_{ij,km}) \equiv |g|^{\frac{1}{2}} R$$

t^s_r ed $\mathfrak{A}^{st}_r$ coincidono con espressioni classiche del pseudotensore di energia-impulso e del superpotenziale.

Non tentiamo qui di estendere le identità di Bianchi a concomitanti di realizzazioni estese e loro derivate estese:

$$P^A = p^A(T^\Xi;\, T^\Xi{}_{|m};\, T^\Xi{}_{|mn})\,.$$

11. Il problema della varianza delle espressioni precedenti.

Per poter porre in forma « estesa » le diverse relazioni ottenute e studiarne la varianza a partire dalle identità di struttura, sarebbe opportuno:

a) definire tutta una famiglia di « indicatori di estensione » tipo l'oggetto di anolonomia dello spazio tangente;

b) introdurre una connessione tipo « affine » tra le « basi » in punti vicini.

Gli « indicatori di estensione » sarebbero utilizzabili per scrivere delle relazioni differenziali (quali ad es. le equazioni del moto) in ogni sistema di « basi » anche estese.

Una connessione di tipo « affine » per le realizzazioni di un gruppo continuo può introdursi sulla falsariga di quella tensoriale. I parametri α^{ϱ} del gruppo possono essere pensati come individuanti i possibili cambiamenti locali di riferimento o « base » per la realizzazione. Un parallelismo è assegnato nell'intorno di un punto x quando al riferimento usato nel punto è possibile far corrispondere un riferimento — il « parallelo » — in ogni punto $x + dx$ dell'intorno.

Ciò equivale a fissare, in ogni punto dell'intorno, l'elemento $\underset{\diagdown}{\alpha}^{\varrho}$ del gruppo che realizza il passaggio a tale riferimento dal riferimento usato.

Poichè nel punto x considerato α^{ϱ} è l'identità I^{ϱ}, nell'intorno è:

$$\underset{\diagdown}{\alpha}^{\varrho} = I^{\varrho} + \Gamma^{\varrho}_{k}\, dx^{k} \,.$$

È allora possibile stabilire in tutto l'intorno il « parallelo » di un qualunque altro riferimento in x: se a questo si passa con l'elemento $\alpha^{\tau}(x)$, al suo parallelo nell'intorno si passa con la trasformazione composta:

$$\underset{\diagdown}{\alpha}^{\tau}(x + dx) = f^{\tau}\big(\alpha^{\sigma}(x)\,;\, I^{\varrho} + \Gamma^{\varrho}_{k}\, dx^{k}\big)\,. \tag{11.1}$$

Se si passa ovunque ad un nuovo riferimento con $\alpha^{\tau}(x)$, il « parallelismo » è espresso ora da un

$$\underset{\diagdown}{\alpha}'^{\varrho} = I^{\varrho} + \Gamma'^{\varrho}_{k}\, dx^{k}$$

ed è:

$$\underset{\searrow}{\alpha}{}^{\tau}(x + dx) = f^{\tau}\big(I^{\sigma} + \Gamma'^{\sigma}_{k} dx^{k};\, \alpha^{\varrho}(x + dx)\big)\,. \tag{11.2}$$

La legge di trasformazione dei coefficienti di connessione si ottiene confrontando il contributo in dx^k delle due espressioni (11.1) e (11.2). Si ottiene, con le notazioni già usate:

$$\underset{\otimes}{\Gamma'^{\tau}_{i}} = \big[\underset{2}{f}{}^{\tau}_{\mu}\big(\alpha(x);\, \overset{-1}{\alpha}(x)\big)\, \underset{1}{f}{}^{\mu}_{\varrho}\big(\alpha(x), I\big)\, \underset{\oplus}{\Gamma^{\varrho}_{k}} + \underset{1}{f}{}^{\tau}_{\varrho}\big(\alpha(x);\, \overset{-1}{\alpha}(x)\big)\, \overset{-1}{\alpha}{}^{\varrho}{}_{,k}\big]_{\oplus}\, \overset{\otimes\ \oplus}{\alpha^{k}_{i}}\,.$$

Nell'intorno di x consideriamo il valore di una qualunque realizzazione $P^{A}(x)$ nelle « basi » parallele:

$$\underset{\searrow}{P}{}^{A}(x + dx) = \mathfrak{F}^{A}\big(P^{\Sigma}(x + dx);\, I^{\varrho} + \Gamma^{\varrho}_{k} dx^{k}\big)\,.$$

La derivata parziale ordinaria di questa funzione è per definizione la derivata parziale « covariante » di $P^{A}(x)$. Essa vale:

$$P^{A}{}_{;k} \equiv \underset{\searrow}{P}{}^{A}{}_{,k} = P^{A}{}_{,k} + \left(\frac{\partial \mathfrak{F}^{A}}{\partial \alpha^{\varrho}}\right)_{I} \Gamma^{\varrho}_{k}\,. \tag{11.3}$$

Nel caso di tensori, quando gli α^{ϱ} sono gli $\overset{A}{\overline{\overset{-1}{\alpha}{}^{i}_{j}}}$, è:

$$\left(\frac{\partial \mathfrak{F}^{A}}{\partial \alpha^{\varrho}}\right)_{I} = \big(\overset{A}{\overline{\mathfrak{D}^{j}_{i}}}\, \overset{A}{\overline{P^{\cdots}_{\cdots}}}\big)\,; \qquad \Gamma^{\varrho}_{k} = \overset{A}{\overline{\Gamma^{i}_{jk}}}\,.$$

Se si considerano realizzazioni geometriche localmente estese, è immediata la generalizzazione del concetto di connessione affine a tutti i parametri β^{ϱ}_{i}, γ^{ϱ}_{ij}, ecc. conglobati nei λ^{ϱ}, per i quali vale la legge di combinazione

$$\underset{3}{\lambda}{}^{\tau} = F^{\tau}(\underset{2}{\lambda}{}^{\sigma};\, \underset{1}{\lambda}{}^{\mu})\,.$$

La $F(\underset{2}{\lambda};\, \underset{1}{\lambda})$ sostituisce semplicemente la $f(\underset{2}{\alpha};\, \underset{1}{\alpha})$ nelle precedenti espressioni, compresa la (11.3).

Per una

$$P^{A} = p^{A}(Q^{\Sigma},\, R^{\Omega})$$

le identità di struttura, contratte con i Γ^{ϱ}_{k} estesi, si scrivono:

$$\left(\frac{\partial \mathfrak{P}^{A}}{\partial \lambda^{\varrho}}\right)_{I} \Gamma^{\varrho}_{k} = \frac{\partial p^{A}}{\partial Q^{\Sigma}}\left(\frac{\partial \mathfrak{Q}^{\Sigma}}{\partial \lambda^{\varrho}}\right)_{I} \Gamma^{\varrho}_{k} + \frac{\partial p^{A}}{\partial R^{\Omega}}\left(\frac{\partial \mathfrak{R}^{\Omega}}{\partial \lambda^{\varrho}}\right)_{I} \Gamma^{\varrho}_{k},$$

e sommate alla

$$P^{A}{}_{,k} = \frac{\partial p^{A}}{\partial Q^{\Sigma}} Q^{\Sigma}{}_{,k} + \frac{\partial p^{A}}{\partial R^{\Omega}} R^{\Omega}{}_{,k}$$

forniscono nuovamente la regola di derivazione composta covariante:

$$P^{A}{}_{;k} = \frac{\partial p^{A}}{\partial Q^{\Sigma}} Q^{\Sigma}{}_{;k} + \frac{\partial p^{A}}{\partial R^{\Omega}} R^{\Omega}{}_{;k}\,.$$

RIFERIMENTI

[I] E. Noether, *Invariante Variationsprobleme*, Nachr. Gesell. Wiss. Gottingen, Math. Phys. Kl. (1918), p. 235.

[II] J. C. Du Plessis, *Tensorial Concomitants and Conservation Laws*, Tensor, N.S., **20** (1969), p. 347.

[III] J. S. Blakeslee - J. D. Logan, *Conformal conservation Laws for second-order Scalar Fields*, N. Cimento, **34** B, n. 2 (1976), p. 319. *An invariance theory for second-order variational problems*, J. Math. Phys., **17**, n. 7 (1975), p. 1374.

[IV] W. R. Davis, *Conservation Laws in Einstein's General Theory of Relativity*, Lanczos Fest schrift (1974), p. 29.

Manoscritto pervenuto in redazione il 9 marzo 1979.