

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

TULLIO VALENT

Teoremi di esistenza e unicità in elastostatica finita

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 60 (1978), p. 165-181

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1978__60__165_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1978, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

Teoremi di esistenza e unicità in elastostatica finita.

TULLIO VALENT (*)

SUMMARY - We obtain some theorems of local existence and uniqueness (Theorems A and B in § 5) for the « problem of place » in finite elastostatics (Problem $((D), (P))$ of § 3). These theorems are stated in $(H^{m,p}(\Omega))^n$ - and $(C^{m,h}(\Omega))^n$ -type spaces. In § 6 we make some remarks about the admissibility of the linearization of the non-linear problem (P) with respect to the choice of the spaces for the data and the solutions.

Lo scopo principale di questo lavoro è di dimostrare dei teoremi locali di esistenza e unicità (v. Teoremi A e B del § 5) per il « problema di posto » in elastostatica finita (precisamente per il Problema $((D), (P))$ del § 3) in spazi del tipo $(H^{m,p}(\Omega))^n$ e del tipo $(C^{m,\lambda}(\Omega))^n$.

Questi teoremi, insieme ai Teoremi 6 e 7, sono utili per chiarire la posizione dell'elastostatica lineare nell'ambito dell'elastostatica finita (limitatamente al problema al contorno che qui si considera).

Al § 6 si fanno alcune osservazioni sull'ammissibilità della linearizzazione del problema (P) rispetto alla scelta degli spazi per il dato e per la soluzione.

1. Preliminari.

Siano Ω un aperto limitato di \mathbb{R}^n , (n intero positivo), $\bar{\Omega}$ la sua chiusura, k un intero ≥ 0 , p un numero reale > 1 ed λ un numero reale tale che $0 < \lambda \leq 1$.

(*) Indirizzo dell'A.: Seminario Matematico dell'Università di Padova, via Belzoni 7, Padova.

$C^k(\Omega)$ [risp. $C^k(\bar{\Omega})$] sarà l'insieme delle funzioni reali continue in Ω [risp. in $\bar{\Omega}$] con le loro derivate fino all'ordine k e $C^{k,\lambda}(\bar{\Omega})$ denoterà lo spazio (di Banach) delle funzioni $u \in C^k(\bar{\Omega})$ di cui le derivate di ordine k sono λ -hölderiane in $\bar{\Omega}$, con la norma $\|\cdot\|_{k,\lambda}$ definita da

$$\|u\|_{k,\lambda} = \sum_{|\alpha| \leq k} |D^\alpha u|_0 + \sum_{|\alpha|=k} [D^\alpha u]_\lambda$$

ove

$$|v|_0 = \sup_{x \in \bar{\Omega}} |v(x)|, \quad [v]_\lambda = \sup_{\substack{x', x'' \in \bar{\Omega} \\ x' \neq x''}} \frac{|v(x') - v(x'')|}{|x' - x''|^\lambda}, \quad (v \in C^{0,\lambda}(\bar{\Omega})).$$

Si verifica facilmente che, se Ω è convesso o, più in generale, se Ω è tale che ogni coppia di punti $x', x'' \in \Omega$ sono congiungibili da un arco in Ω rettificabile la cui lunghezza è maggiorata da un multiplo prefissato di $|x' - x''|$, risulta $\forall v \in C^1(\bar{\Omega})$

$$(1) \quad [v]_1 \leq c \sum_{|\alpha|=1} |D^\alpha v|_0$$

con c numero positivo indipendente da v .

Sussistendo (1) si ha

$$C^{k+1}(\bar{\Omega}) \subseteq C^{k,1}(\bar{\Omega}) \subseteq C^{k,\lambda}(\bar{\Omega}).$$

Osservando che

$$|u(x')v(x') - u(x'')v(x'')| \leq |u(x') - u(x'')||v(x')| + |v(x') - v(x'')||u(x'')|,$$

si constata senza difficoltà che, sussistendo (1), risulta

$$(2) \quad u, v \in C^{k,\lambda}(\bar{\Omega}) \Rightarrow uv \in C^{k,\lambda}(\bar{\Omega}), \quad \|uv\|_{k,\lambda} \leq c_{k,\lambda} \|u\|_{k,\lambda} \|v\|_{k,\lambda}$$

ove $c_{k,\lambda}$ è un numero positivo indipendente da u e v e che quindi $C^{k,\lambda}(\bar{\Omega})$ è un'algebra di Banach.

$H^{k,p}(\Omega)$ denoterà lo spazio (di Banach) delle (classi di) funzioni $u \in L^p(\Omega)$ tali che $D^\alpha u \in L^p(\Omega) \forall |\alpha| \leq k$, con la norma $\|\cdot\|_{k,p}$ definita da

$$\|u\|_{k,p} = \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_p,$$

essendo $L^p(\Omega)$ lo spazio delle (classi di) funzioni reali di potenza p -ma sommabile secondo Lebesgue in Ω e $\|\cdot\|_p$ la norma abituale di $L^p(\Omega)$. $H_0^{k,p}(\Omega)$ sarà la chiusura in $H^{k,p}(\Omega)$ dell'insieme $\mathcal{D}(\Omega)$ delle funzioni reali indefinitamente differenziabili in Ω e a supporto compatto in Ω , mentre $H^{-k,p'}(\Omega)$, ($1/p + 1/p' = 1$), denoterà il duale forte di $H_0^{k,p}(\Omega)$; com'è ben noto, l'insieme $H^{-k,p'}(\Omega)$ è l'insieme (delle estensioni continue a $H_0^{k,p}(\Omega)$) delle distribuzioni reali in Ω del tipo $\sum_{|\alpha| \leq k} D^\alpha v_\alpha$, con $v_\alpha \in L^{p'}(\Omega)$.

Porremo, come si fa abitualmente, $H^k(\Omega) = H^{k,2}(\Omega)$, $H_0^k(\Omega) = H_0^{k,2}(\Omega)$, $H^{-k}(\Omega) = H^{-k,2}(\Omega)$.

Se Ω ha la proprietà di cono ⁽¹⁾ e $kp > n$, è ben noto (Lemma di Sobolev) che ogni $u \in H^{k,p}(\Omega)$ è identificabile con una funzione di Ω in \mathbb{R} continua e limitata e risulta

$$(3) \quad \sup_{x \in \Omega} |u(x)| \leq c \|u\|_{k,p}$$

con c numero positivo indipendente da u .

Utilizzando la densità di $C^k(\Omega) \cap H^{k,p}(\Omega)$ in $H^{k,p}(\Omega)$ e i ben noti teoremi di immersione per gli spazi $H^{k,p}(\Omega)$ si può verificare (v. [1], Th. 5.23) che, se Ω ha la proprietà di cono e $kp > n$, allora $H^{k,p}(\Omega)$ è un'algebra di Banach, avendosi

$$(4) \quad u, v \in H^{k,p}(\Omega) \Rightarrow uv \in H^{k,p}(\Omega), \quad \|uv\|_{k,p} \leq c_{k,p} \|u\|_{k,p} \|v\|_{k,p}$$

con $c_{k,p}$ numero positivo indipendente da u e v .

2. Due teoremi di differenziabilità.

Siano N un numero intero ≥ 1 e $(x, y) \mapsto a(x, y)$ una funzione di $\Omega \times \mathbb{R}^N$ in \mathbb{R} .

Ad ogni funzione $\sigma: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ resta associata la funzione $A\sigma: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$(5) \quad A\sigma(x) = a(x, \sigma(x)).$$

Indicheremo con $C^m(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}^N)$, m intero ≥ 1 , l'insieme delle funzioni reali continue in $\bar{\Omega} \times \mathbb{R}^N$ assieme alle loro derivate di ordine $\leq m$.

⁽¹⁾ Ω ha la proprietà di cono se esistono due numeri positivi α, h tali che per ogni $x \in \Omega$ esiste un cono circolare retto, contenuto in Ω , con il vertice in x , di altezza h e apertura α .

(Tali funzioni non sono necessariamente limitate).

LEMMA 1. Se $a \in C^m(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}^N)$, $m \geq 1$ e Ω ha la proprietà di cono, allora per ogni $p > n/m$ risulta $A\sigma \in H^{m,p}(\Omega) \forall \sigma \in (H^{m,p}(\Omega))^N$ e l'applicazione $A: (H^{m,p}(\Omega))^N \rightarrow H^{m,p}(\Omega)$ è continua.

DIMOSTRAZIONE (per induzione). Indicheremo con $A_{x_i}\sigma$ e $A_{y_j}\sigma$, ($i = 1, \dots, n$; $j = 1, \dots, N$), le funzioni di Ω in \mathbb{R} definite da

$$(6) \quad A_{x_i}\sigma(x) = \frac{\partial a}{\partial x_i}(x, \sigma(x)), \quad A_{y_j}\sigma(x) = \frac{\partial a}{\partial y_j}(x, \sigma(x)).$$

Sia $m = 1$ e $p > n$. Da (3) e da $H^{1,p}(\Omega) \subseteq C^0(\Omega)$ segue subito che, se $a \in C^0(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}^N)$, si ha $A\sigma \in C^0(\bar{\Omega}) \forall \sigma \in H^{1,p}(\Omega)^N$; di conseguenza, se $a \in C^1(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}^N)$, si ha $A_{x_i}\sigma, A_{y_j}\sigma \in C^0(\bar{\Omega}) \forall \sigma \in (H^{1,p}(\Omega))^N$. Ricordando che $C^1(\Omega) \cap H^{1,p}(\Omega)$ è denso in $H^{1,p}(\Omega)$ si ottiene allora facilmente (v. [14]) che se, $a \in C^1(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}^N)$ e $\sigma = (\sigma_j)_{j=1, \dots, N} \in (H^{1,p}(\Omega))^N$, risulta

$$(7) \quad \frac{\partial}{\partial x_i} A\sigma = A_{x_i}\sigma + \sum_{j=1}^N \frac{\partial \sigma_j}{\partial x_i} A_{y_j}\sigma,$$

donde $Au \in H^{1,p}(\Omega)$.

In virtù di (3), da $\sigma \rightarrow \sigma_0$ in $(H^{1,p}(\Omega))^N$ segue $\sigma \rightarrow \sigma_0$ in $(L^\infty(\Omega))^N$ da cui, se $a \in C^1(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}^N)$, segue $A\sigma \rightarrow A\sigma^0$, $A_{x_i}\sigma \rightarrow A_{x_i}\sigma^0$, $A_{y_j}\sigma \rightarrow A_{y_j}\sigma^0$ in $L^\infty(\Omega)$; pertanto, avendosi, per (7),

$$(8) \quad \frac{\partial}{\partial x_i} (A\sigma - A\sigma^0) = (A_{x_i}\sigma - A_{x_i}\sigma^0) + \sum_{j=1}^N \left[\frac{\partial \sigma_j}{\partial x_i} (A_{y_j}\sigma - A_{y_j}\sigma^0) + \left(\frac{\partial \sigma_j}{\partial x_i} - \frac{\partial \sigma_j^0}{\partial x_i} \right) A_{y_j}\sigma^0 \right],$$

da $\sigma \rightarrow \sigma^0$ in $(H^{1,p}(\Omega))^N$ segue $A\sigma \rightarrow A\sigma^0$ in $H^{1,p}(\Omega)$, donde la continuità dell'applicazione $A: (H^{1,p}(\Omega))^N \rightarrow H^{1,p}(\Omega)$.

Proviamo ora che, se il lemma sussiste per un intero $m \geq 1$, esso sussiste sostituendo m con $m + 1$. Sia $a \in C^{m+1}(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}^N)$. Allora $\partial a / \partial x_i$ e $\partial a / \partial y_j$ appartengono a $C^m(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}^N)$ e quindi, per l'ipotesi induttiva, se $\sigma \in (H^{m+1,p}(\Omega))^N$ allora $A_{x_i}\sigma$ e $A_{y_j}\sigma$ appartengono a $H^{m,p}(\Omega)$; poichè anche $\partial \sigma_j / \partial x_i \in H^{m,p}(\Omega)$, da (4), (7) segue $(\partial / \partial x_i) A\sigma \in H^{m,p}(\Omega)$, donde $A\sigma \in H^{m+1,p}(\Omega)$. Inoltre, in virtù di (8), dall'ipotesi induttiva segue

facilmente che $\sigma \rightarrow \sigma^0$ in $H^{m+1,p}(\Omega)$ implica $A\sigma \rightarrow A\sigma^0$ in $H^{m+1,p}(\Omega)$ e che quindi l'applicazione $A: (H^{m+1,p}(\Omega))^N \rightarrow H^{m+1,p}(\Omega)$ è continua.

Q.E.D.

TEOREMA 1. *Se $a \in C^{m+1}(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}^N)$ e Ω ha la proprietà di cono, allora per ogni $p > n/m$ l'applicazione $A: (H^{m,p}(\Omega))^N \rightarrow H^{m,p}(\Omega)$ è differenziabile con continuità e risulta per ogni $\sigma = (\sigma_j)_{j=1,\dots,N}$, $\tau = (\tau_j)_{j=1,\dots,N} \in (H^{m,p}(\Omega))^N$*

$$(9) \quad (A'(\sigma)\tau)(x) = \sum_{j=1}^N \frac{\partial a}{\partial y_j}(x, \sigma(x)) \tau_j(x), \quad (x \in \Omega),$$

ove $A'(\sigma)$ denota il differenziale di A in σ .

DIMOSTRAZIONE. La dimostrazione si basa sul fatto (segnalato sopra) che, se Ω ha la proprietà di cono e $p > n/m$, $H^{p,m}(\Omega)$ è un'algebra di Banach.

Proviamo innanzitutto che A è differenziabile in ogni $\sigma \in (H^{m,p}(\Omega))^N$ e che vale (9), ossia che

$$(10) \quad \lim_{\|\tau\|_{m,p} \rightarrow 0} \frac{\left\| A(\sigma + \tau) - A\sigma - \sum_{j=1}^N \tau_j A_{v_j} \sigma \right\|_{m,p}}{\|\tau\|_{m,p}} = 0.$$

Poichè, evidentemente,

$$A(\sigma + \tau) - A\sigma - \sum_{j=1}^N \tau_j A_{v_j} \sigma = \sum_{j=1}^N \tau_j \int_0^1 [A_{v_j}(\sigma + t\tau) - A_{v_j} \sigma] dt,$$

si ha, in base a (4),

$$(11) \quad \left\| A(\sigma + \tau) - A\sigma - \sum_{j=1}^N \tau_j A_{v_j} \sigma \right\|_{m,p} \leq c_{m,p} \|\tau\|_{m,p} \sum_{j=1}^N \left\| \int_0^1 [A_{v_j}(\sigma + t\tau) - A_{v_j} \sigma] dt \right\|_{m,p}.$$

Essendo $\partial a / \partial y_j \in C^m(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}^N)$, allora, per il Lemma 1, A_{v_j} è un'applicazione continua di $(H^{m,p}(\Omega))^N$ in $H^{m,p}(\Omega)$ e quindi da (11) segue

facilmente (10) dato che

$$\left\| \int_0^1 [A_{\nu_j}(\sigma + t\tau) - A_{\nu_j}\sigma] dt \right\|_{m,p} \leq \int_0^1 \|A_{\nu_j}(\sigma + t\tau) - A_{\nu_j}\sigma\|_{m,p} dt.$$

Resta da mostrare che l'applicazione $\sigma \mapsto A'(\sigma)$, di $(H^{m,p}(\Omega))^N$ nello spazio normato delle applicazioni lineari e continue di $(H^{m,p}(\Omega))^N$ in $H^{m,p}(\Omega)$, è continua, cioè che, per ogni prefissato $\sigma^0 \in (H^{m,p}(\Omega))^N$, si ha

$$\sigma \rightarrow \sigma_0 \quad \text{in } (H^{m,p}(\Omega))^N \Rightarrow \sup_{0 \neq \tau \in (H^{m,p}(\Omega))^N} \frac{\|(A'(\sigma) - A'(\sigma^0))\tau\|_{m,p}}{\|\tau\|_{m,p}} \rightarrow 0.$$

Ciò segue dalla continuità delle applicazioni $A_{\nu_j}: (H^{m,p}(\Omega))^N \rightarrow H^{m,p}(\Omega)$, assicurata dal Lemma 1 (avendosi $\partial a/\partial y_j \in C^m(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}^N)$), dopo avere osservato che, per (9), (4), risulta

$$\begin{aligned} \|(A'(\sigma) - A'(\sigma^0))\tau\|_{m,p} &\leq \sum_{j=1}^N \|(A_{\nu_j}\sigma - A_{\nu_j}\sigma^0)\tau_j\|_{m,p} \leq \\ &\leq N e_{m,p} \|A_{\nu_j}\sigma - A_{\nu_j}\sigma^0\|_{m,p} \|\tau_j\|_{m,p}. \quad \text{Q.E.D.} \end{aligned}$$

LEMMA 2. Ω sia tale per cui sussista (1). Se $a \in C^{m+1}(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}^N)$, $m \geq 1$, e $0 < \lambda \leq 1$, risulta $A\sigma \in C^{m,\lambda}(\bar{\Omega}) \forall \sigma \in (C^{m,\lambda}(\bar{\Omega}))^N$ e l'applicazione $A: (C^{m,\lambda}(\bar{\Omega}))^N \rightarrow C^{m,\lambda}(\bar{\Omega})$ è continua.

DIMOSTRAZIONE (per induzione). Il lemma è vero se $m = 1$. Infatti, se $\sigma \in (C^{1,\lambda}(\bar{\Omega}))^N$ si ha evidentemente $A_{x_i}\sigma, A_{\nu_j}\sigma \in C^1(\bar{\Omega}) \subseteq C^{0,\lambda}(\bar{\Omega})$, donde $\partial A\sigma/\partial x_i \in C^{0,\lambda}(\bar{\Omega})$ sussistendo (2) e (7); inoltre, se $\sigma \rightarrow \sigma^0$ in $(C^{1,\lambda}(\bar{\Omega}))^N$, da (8) segue subito $A\sigma \rightarrow A\sigma^0$ in $C^1(\bar{\Omega})$ e dall'analoga di (8) scritta per A_{x_i} e A_{ν_j} , discende $A_{x_i}\sigma \rightarrow A_{x_i}\sigma^0$, $A_{\nu_j}\sigma \rightarrow A_{\nu_j}\sigma^0$ in $C^1(\bar{\Omega})$ e, per (1), in $C^{0,\lambda}(\bar{\Omega})$, donde, in virtù di (8), $A\sigma \rightarrow A\sigma^0$ in $C^{1,\lambda}(\bar{\Omega})$.

Se il lemma sussiste per un intero $m \geq 1$, esso sussiste sostituendo m con $m + 1$. Sia, infatti, $a \in C^{m+2}(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}^N)$; per l'ipotesi induttiva A_{x_i} e A_{ν_j} sono applicazioni continue di $(C^{m,\lambda}(\bar{\Omega}))^N$ in $C^{m,\lambda}(\bar{\Omega})$ e quindi, ricordando (7), (8), (2), si riconosce agevolmente che A è un'applicazione continua di $(C^{m+1,\lambda}(\bar{\Omega}))^N$ in $C^{m+1,\lambda}(\bar{\Omega})$. Q.E.D.

TEOREMA 2. Se $a \in C^{m+2}(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}^N)$ e Ω è tale per cui sussista (1), allora per $0 < \lambda \leq 1$ l'applicazione $A: (C^{m,\lambda}(\bar{\Omega}))^N \rightarrow C^{m,\lambda}(\bar{\Omega})$ è differenziabile con continuità e sussiste (9).

Il teorema si deduce dal lemma 2 utilizzando il fatto (segnalato al § 1) che, sussistendo (1), $C^{m,\lambda}(\bar{\Omega})$ è un'algebra di Banach. La deduzione è del tutto analoga a quella del Teorema 1 dal Lemma 1.

3. Posizione del problema elastostatico.

L'aperto limitato Ω di \mathbb{R}^n ⁽²⁾ rappresenti l'interno di una prefissata configurazione di riferimento — che supporremo « naturale » — di un corpo elastico.

Siano $\partial\Omega$ la frontiera di Ω e I l'identità di $\bar{\Omega}$ in sè.

Considereremo il caso in cui lo « spostamento » $u: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^n$ sia assegnato su $\partial\Omega$; anzi considereremo la condizione al contorno omogenea $u|_{\partial\Omega} = 0$.

Allora il problema dell'equilibrio elastico per *deformazioni finite* consiste nel trovare una funzione $u: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^n$ tale che:

(D) $I + u$ è un diffeomorfismo di classe C^1 di $\bar{\Omega}$ su $\bar{\Omega}$ (cioè un omeomorfismo di $\bar{\Omega}$ su $\bar{\Omega}$ di classe C^1 in $\bar{\Omega}$ assieme al suo inverso) conservante l'orientamento,

$$(P) \quad \begin{cases} Tu = f & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \quad \text{con } T = D^*a(x, D),$$

essendo D l'operatore gradiente definito da

$$Du = \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)_{i,j=1,\dots,n},$$

D^* il trasposto formale di D , $(x, y) \mapsto a(x, y) = (a_{ij}(x, y))_{i,j=1,\dots,n}$ una funzione di $\Omega \times \mathbb{R}^n$ in \mathbb{R}^n assegnata (caratterizzante il comportamento del materiale) tale che $a(x, 0) = 0 \quad \forall x \in \Omega$ e $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ una funzione assegnata (esprime il prodotto della densità nello stato di riferimento per la forza specifica di massa). Più esplicitamente Tu è definito da

$$Tu(x) = - \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} a_{ij}(x, Du(x)) \right)_{i=1,\dots,n}.$$

⁽²⁾ Scriveremo sempre n al posto di 3 perchè i risultati che si ottengono sussistono per ogni intero $n \geq 2$. Naturalmente essi hanno significato fisico nel caso $n = 3$.

Posto, per ogni $x \in \Omega$ e ogni $y = (y_{hk})_{h,k=1,\dots,n} \in \mathbb{R}^n$,

$$l(x, y) = \sum_{h,k=1}^n \frac{\partial a}{\partial y_{hk}}(x, 0) y_{hk},$$

diremo che il problema

$$(PL) \quad \begin{cases} T_L u = f & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \quad \text{con } T_L = D^* l(x, D),$$

si ottiene linearizzando il problema (P) nell'origine. Più esplicitamente $T_L u$ è definito da

$$T_L u(x) = - \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sum_{h,k=1}^n \frac{\partial a_{ij}}{\partial y_{hk}}(x, 0) \frac{\partial u_h}{\partial x_k} \right) \right)_{i=1,\dots,n}.$$

Il principio di indifferenza materiale e il bilancio dei momenti impongono, notoriamente, (cfr. ad esempio [14], cap. IX, § 4) le simmetrie

$$(12) \quad \frac{\partial a_{ij}}{\partial y_{hk}}(x, 0) = \frac{\partial a_{ij}}{\partial y_{kh}}(x, 0), \quad \frac{\partial a_{ij}}{\partial y_{hk}}(x, 0) = \frac{\partial a_{ji}}{\partial y_{hk}}(x, 0).$$

Supporremo che esista una costante $c_1 > 0$ tale che per ogni $x \in \Omega$ sia

$$(13) \quad \begin{cases} \sum_{i,j,h,k=1}^n \frac{\partial a_{ij}}{\partial y_{hk}}(x, 0) y_{ij} y_{hk} \geq c_1 \sum_{i,j=1}^n y_{ij}^2 \\ \forall y = (y_{ij})_{i,j=1,\dots,n} \in \mathbb{R}^n \text{ tale che } y_{ij} = y_{ji}. \end{cases}$$

Sussistendo (12), (13), l'operatore differenziale lineare T_L è fortemente ellittico (v. [6], p. 365).

4. Teoremi di esistenza, unicità e regolarità per il problema (PL).

Se σ è una funzione di Ω in \mathbb{R}^n , ($n \geq 2$), indicheremo con $A\sigma$ e $L\sigma$ le funzioni di Ω in \mathbb{R}^n definite da

$$A\sigma(x) = a(x, \sigma(x)), \quad L\sigma(x) = l(x, \sigma(x)), \quad (x \in \Omega).$$

Per ogni $\sigma = (\sigma_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$, $\tau = (\tau_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ appartenenti a $(L^2(\Omega))^n$, poniamo

$$(\sigma, \tau) = \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} \sigma_{ij} \tau_{ij} dx, \quad (\sigma, \sigma) = \|\sigma\|_2^2.$$

Se $u = (u_i)_{i=1, \dots, n} \in (H^{k,p}(\Omega))^n$ porremo $\|u\|_{k,p} = \sum_{i=1}^n \|u_i\|_{k,p}$; se $u = (u_i)_{i=1, \dots, n} \in (C^{k,\lambda}(\bar{\Omega}))^n$ porremo $\|u\|_{k,\lambda} = \sum_{i=1}^n \|u_i\|_{k,\lambda}$. Se le funzioni $x \mapsto (\partial a_{ij} / \partial y_{hk})(x, 0)$ sono misurabili e limitate in Ω , allora evidentemente T_L è un operatore (lineare e) continuo di $(H^{1,p}(\Omega))^n$ in $(H^{-1,p}(\Omega))^n$ e, in particolare, di $(H_0^1(\Omega))^n$ in $(H^{-1}(\Omega))^n$. Proviamo che

Sussistendo (12), (13), se le funzioni $x \mapsto (\partial a_{ij} / \partial y_{hk})(x, 0)$ sono misurabili e limitate in Ω , allora $u \mapsto T_L u$ è un isomorfismo (per le strutture di spazio vettoriale topologico) di $(H_0^1(\Omega))^n$ su $(H^{-1}(\Omega))^n$.

Essendo (per l'ipotesi su a) T_L un operatore lineare e continuo di $(H_0^1(\Omega))^n$ in $(H^{-1}(\Omega))^n$, per provare che T_L è un isomorfismo di $(H_0^1(\Omega))^n$ su $(H^{-1}(\Omega))^n$ basta (in virtù del Teorema dell'isomorfismo di Banach) verificare che $T_L: (H_0^1(\Omega))^n \rightarrow (H^{-1}(\Omega))^n$ è una biiezione, cioè che per ogni $f \in (H^{-1}(\Omega))^n$ esiste uno e un solo $u \in (H_0^1(\Omega))^n$ tale che

$$(14) \quad (LDu, Dv) = \langle v, f \rangle \quad \forall v \in (H_0^1(\Omega))^n,$$

essendo $\langle \cdot, \cdot \rangle$ la dualità tra $(H_0^1(\Omega))^n$ e $(H^{-1}(\Omega))^n$ definita da $\langle v, f \rangle = \sum_{i=1}^n f_i(v_i)$.

Si osservi che, posto

$$D_s u = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)_{i,j=1, \dots, n},$$

da (12) segue, per ogni $u, v \in (H_0^1(\Omega))^n$,

$$LDu = LD_s u, \quad (LDu, Dv) = (LD_s u, D_s v);$$

pertanto (14) equivale a

$$(15) \quad (LD_s u, D_s v) = \langle v, f \rangle \quad \forall v \in (H_0^1(\Omega))^n.$$

Da (13) segue evidentemente

$$(16) \quad (LD_s v, D_s v) \geq c_1 \|D_s v\|_2^2 \quad \forall v \in (H_0^1(\Omega))^n$$

ove c_1 è un numero positivo indipendente da v .

Poichè, notoriamente, si ha per ogni $v \in (H_0^1(\Omega))^n$

$$\|v\|_{1,2} \leq c_2 \|Dv\|_2 \quad (\text{disuguaglianza di Poincaré e})$$

$$\|Dv\|_{1,2} \leq c_3 \|D_s v\|_2 \quad (\text{disuguaglianza di Korn})^{(3)},$$

con c_2 e c_3 numeri positivi indipendenti da v , da (16) segue

$$(17) \quad (LD_s v, D_s v) \geq c \|v\|_{1,2}^2 \quad \forall v \in (H_0^1(\Omega))^n,$$

con $c = c_1 c_2^2 c_3^2$.

La forma bilineare $(u, v) \mapsto (LD_s u, D_s v)$ su $(H_0^1(\Omega))^n \times (H_0^1(\Omega))^n$ è continua, come si riconosce immediatamente tenendo presente il fatto che le funzioni $x \mapsto (\partial a_{ij} / \partial y_{nk})(x, 0)$ sono limitate e ricordando la disuguaglianza di Poincaré.

Pertanto il sussistere di (16) assicura — in base al noto Lemma di Lax-Milgram ⁽⁴⁾ — che per ogni $f \in (H^{-1}(\Omega))^n$ esiste uno e un solo $u \in (H_0^1(\Omega))^n$ verificante (14).

Enunciamo ora tre teoremi di regolarità per le soluzioni deboli del problema (PL), cioè per le soluzioni in $(H_0^1(\Omega))^n$ del problema (14), che utilizzeremo più avanti.

Al primo e al secondo di questi teoremi si può pervenire con una tecnica analoga a quella usata in [12] per le equazioni ellittiche; il terzo si può dimostrare utilizzando i procedimenti di regolarizzazione di [4] o di [2], [3].

TEOREMA 3. *Sussistendo (12) (13), se Ω è di classe C^1 ⁽⁵⁾ e le funzioni $x \mapsto (\partial a_{ij} / \partial y_{nk})(x, 0)$ sono continue in $\bar{\Omega}$, allora, per ogni p reale > 1 , T_L è un isomorfismo (per le strutture di spazio vettoriale topologico) di $(H_0^{1,p}(\Omega))^n$ su $(H^{-1,p}(\Omega))^n$.*

⁽³⁾ V. [6], p. 381.

⁽⁴⁾ Il Lemma di Lax-Milgram afferma che, se $(u, v) \mapsto b(u, v)$ è una forma sesquilineare continua su uno spazio di Hilbert H tale che $|b(v, v)| \geq c \|v\|^2$, $\forall v \in H$, ove c è una costante positiva e $\|\cdot\|$ è la norma di H , allora, per ogni forma lineare continua f su H , esistono $u, w \in H$ univocamente individuati da f tali che $f(v) = b(v, w) = \overline{b(u, v)}$, $\forall v \in H$. (V. per es. [7], Th. 14.1).

⁽⁵⁾ Ω dicesi di classe C^m ($m \geq 1$) se la sua chiusura $\bar{\Omega}$ è una sottovarietà a bordo di \mathbb{R}^n di classe C^m , cioè se $\forall x \in \partial\Omega$ esistono un intorno aperto U_x di x in \mathbb{R}^n e un diffeomorfismo \mathcal{C} di classe C^m di U_x sulla palla $\{\xi \in \mathbb{R}^n: |\xi| < 1\}$ di \mathbb{R}^n tale che $\mathcal{C}(\bar{\Omega} \cap U_x) = \{\xi \in \mathbb{R}^n: |\xi| < 1, \xi_n \geq 0\}$.

TEOREMA 4. *Sussistendo (12), (13), se Ω è di classe C^{k+2} e le funzioni $x \mapsto (\partial a_{ij}/\partial y_{nk})(x, 0)$ appartengono a $C^{k+1}(\bar{\Omega})$, ($k \geq 0$), allora, per ogni p reale > 1 , T_L è un isomorfismo (per le strutture di spazio vettoriale topologico) di $(H_0^{1,p}(\Omega) \cap H^{k+2,p}(\Omega))^n$ su $(H^{k,p}(\Omega))^n$.*

TEOREMA 5. *Sussistendo (12), (13), se Ω è di classe $C^{k+2,\lambda}$ e le funzioni $x \mapsto (\partial a_{ij}/\partial y_{nk})(x, 0)$ appartengono a $C^{k+1,\lambda}(\bar{\Omega})$, ($k \geq 0$, $0 < \lambda < 1$), allora T_L è un isomorfismo (per le strutture di spazio vettoriale topologico) del sottospazio $\{u \in (C^{k+2,\lambda}(\bar{\Omega}))^n : u|_{\partial\Omega} = 0\}$ di $(C^{k+2,\lambda}(\bar{\Omega}))^n$ su $(C^{k,\lambda}(\bar{\Omega}))^n$.*

5. Teoremi di esistenza e unicità per il problema $((D), (P))$.

Siano sempre Ω un aperto limitato di \mathbb{R}^n ($n \geq 2$), k un intero ≥ 0 e p un numero reale > 1 .

OSSERVAZIONE. 1. *Se Ω è connesso e di classe C^1 , allora sussiste (1).*

Infatti Ω , essendo limitato e di classe C^1 , è unione finita di aperti convessi oppure diffeomorfi a un convesso di \mathbb{R}^n (semipalla aperta); ne segue senza difficoltà che, se $x, y \in \Omega$ e $l(x, y)$ è l'estremo inferiore delle lunghezze degli archi rettificabili in Ω congiungenti x e y , risulta $l(x, y) \leq K|x - y|$ ove K è un numero positivo indipendente da x, y , epperò sussiste (1).

OSSERVAZIONE 2. *Se Ω è di classe C^1 , allora Ω ha la proprietà di cono. (V. ad es. [7], p. 67).*

Dal Teorema 1 segue immediatamente che, se Ω ha la proprietà di cono e $a \in (C^{k+2}(\bar{\Omega}) \times \mathbb{R}^{n^2})^{n^2}$, allora, per ogni $p > n/(k+1)$, $u \mapsto Tu$ è un'applicazione di $(H_0^{1,p}(\Omega) \cap H^{k+2,p}(\Omega))^n$ in $(H^{k,p}(\Omega))^n$, differenziabile con continuità e che $T'(0) = T_L$.

Analogamente dal Teorema 2 segue che, se Ω è tale per cui sussiste (1) e $a \in (C^{k+3}(\bar{\Omega}) \times \mathbb{R}^{n^2})^{n^2}$, allora, per ogni $\lambda \in [0, 1]$, $u \mapsto Tu$ è un'applicazione di $(C^{k+2,\lambda}(\bar{\Omega}))^n$ in $(C^{k,\lambda}(\bar{\Omega}))^n$ differenziabile con continuità e che $T'(0) = T_L$.

Allora, tenendo conto delle Osservazioni 1 e 2, dai Teoremi 1, 4 e 2, 5 discendono subito — in virtù del noto Teorema di inversione locale di un'applicazione di classe C^1 tra spazi di Banach ⁽⁶⁾ — i seguenti due teoremi.

⁽⁶⁾ Questo Teorema afferma che, se F, F sono spazi di Banach, se $u_0 \in E$ e T è un'applicazione definita in un intorno aperto di u_0 e a valori in F diffe-

TEOREMA 6. *Se $a \in (C^{k+2}(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}^n))^n$, se sussistono (12), (13) e se Ω è di classe C^{k+2} , allora se $p > n/(k+1)$ (p reale > 1) esistono un intorno aperto U all'origine nel sottospazio $(H_0^{1,p}(\Omega) \cap H^{k+2,p}(\Omega))^n$ di $(H^{k+2,p}(\Omega))^n$ e un intorno aperto V all'origine in $(H^{k,p}(\Omega))^n$ tali che T sia un diffeomorfismo di classe C^1 di U su V .*

TEOREMA 7. *Se $a \in (C^{k+3}(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}^n))^n$, se sussistono (12), (13) e se Ω è connesso e di classe C^{k+3} , allora per ogni $\lambda \in]0, 1[$ esistono un intorno aperto U dell'origine nel sottospazio $\{u \in (C^{k+2,\lambda}(\bar{\Omega}))^n : u|_{\partial\Omega} = 0\}$ di $(C^{k+2,\lambda}(\bar{\Omega}))^n$ e un intorno aperto V dell'origine in $(C^{k,\lambda}(\bar{\Omega}))^n$ tali che T sia un diffeomorfismo di classe C^1 di U su V (?).*

Allo scopo di ottenere dei teoremi di esistenza e unicità per il problema $((D), (P))$, premettiamo i seguenti due lemmi.

LEMMA 1. *Se Ω è connesso e di classe C^1 e i numeri k, p sono tali che $p > n/(k+1)$, allora esiste un intorno U dell'origine in $(H_0^{1,p}(\Omega) \cap H^{k+2,p}(\Omega))^n$ tale che per ogni $u \in U$ la funzione $I + u$ è un diffeomorfismo di classe C^1 di $\bar{\Omega}$ su $(I + u)(\bar{\Omega})$ che conserva l'orientamento.*

DIMOSTRAZIONE. Se Ω è di classe C^1 e $p > n/(k+1)$, allora $H^{2+2,p}(\Omega) \subset C^1(\bar{\Omega})$ con iniezione continua: lo si deduce dal noto Teorema di immersione di Sobolev (cfr. [1], Th. 5.4). Dalla continuità dell'applicazione $v \mapsto \det Dv$, [ove $\det Dv$ è il determinante della matrice $(\partial v_i / \partial x_j)_{i,j=1,\dots,n}$], di $(H^{k+2,p})^n$ in $C^0(\bar{\Omega})$, avendo presente che $\det DI = 1$, segue l'esistenza di un intorno V di I in $(H^{k+2,p}(\Omega))^n$; tale che $\sup_{x \in \bar{\Omega}} |\det Dv(x) - 1| < 1 \forall v \in V$, donde $\inf_{x \in \bar{\Omega}} \det Dv(x) > 0 \forall v \in V$ allora, posto $U = (V - I) \cap (H_0^{1,p}(\Omega))^n$, si ha

$$(18) \quad u \in U \Rightarrow \inf_{x \in \bar{\Omega}} \det (D(I + u))(x) > 0.$$

Sia $u \in U$. Tenendo presente che, essendo $I + u \in (C^1(\bar{\Omega}))^n$, esistono delle funzioni di \mathbb{R}^n in \mathbb{R}^n differenziabili con continuità la cui restriz-

renziabile con continuità e tale che $T'(u_0)$ è un isomorfismo di E su F , allora esistono un intorno aperto U di u_0 e un intorno aperto V di Tu_0 tali che T sia un diffeomorfismo di classe C^1 di U su V (cioè un omeomorfismo di U su V differenziabile con continuità assieme al suo inverso).

(?) Un risultato di questo tipo (con $k = 0$ e Ω convesso) è stato provato da W. VAN BUREN ([18]; cfr. anche [19]). Nel caso più difficile del « problema di trazione » sono fondamentali vari lavori di F. STOPPELLI (in particolare [13]).

zione a $\bar{\Omega}$ coincide con $I + u$ (v. per esempio [5], p. 19), da (18) segue che $I + u: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^n$ è localmente iniettiva, cioè che ogni punto $x \in \bar{\Omega}$ ha un intorno V_x in $\bar{\Omega}$ tale che $(I + u)|_{V_x}$ è iniettiva.

D'altra parte $I + u$ induce l'identità su $\partial\Omega$, perchè se Ω è di classe C^1 , $u \in (H_0^{1,p}(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega}))^n \Rightarrow u|_{\partial\Omega} = 0$ (v. [11], Th. 4.10). Pertanto, per le ipotesi fatte su Ω , dal Th. 1 di [10] si deduce che $I + u: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^n$ è (globalmente) iniettiva. Allora, sussistendo (18), $I + u$ è un diffeomorfismo di classe C^1 di $\bar{\Omega}$ su $(I + u)(\bar{\Omega})$ che conserva l'orientamento.

Con considerazioni analoghe si perviene al

LEMMA 2. *Se Ω è connesso e di classe C^1 , esiste un intorno U dell'origine in $(C^1(\bar{\Omega}))^n$ tale che, per ogni $u \in U$ verificante $u|_{\partial\Omega} = 0$, la funzione $I + u$ è un diffeomorfismo di classe C^1 di $\bar{\Omega}$ su $(I + u)(\bar{\Omega})$ conservante l'orientamento.*

Nelle ipotesi del Teorema 6, esistono due numeri positivi ξ, η tali che per ogni $f \in (H^{k,p}(\Omega))^n$, ($p > n/(k+1)$), con $\|f\|_{k,p} < \xi$ esiste unico $u \in (H_0^{1,p}(\Omega) \cap H^{k+2,p}(\Omega))^n$ con $\|u\|_{k+2,p} < \eta$ per cui $Tu = f$; inoltre, supposto Ω connesso, per il Lemma 1 è possibile scegliere ξ e η tali che u sia un diffeomorfismo di classe C^1 di $\bar{\Omega}$ su $(I + u)(\bar{\Omega})$ conservante l'orientamento. Poniamoci in tale situazione.

Allora, se $f \in (H^{k,p}(\Omega))^n$, $\|f\|_{k,p} < \xi$, per ogni $t \in [0, 1]$ esiste unico $u_t \in (H_0^{1,p}(\Omega) \cap H^{k+2,p}(\Omega))^n$ tale che $Tu_t = tf$ e $\|u_t\|_{k+2,p} < \eta$; $I + u_t$ è un diffeomorfismo di classe C^1 di $\bar{\Omega}$ su $(I + u)(\bar{\Omega})$ conservante l'orientamento.

Consideriamo la funzione $\Phi: \bar{\Omega} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ definita ponendo

$$\Phi(x, t) = (I + u_t)(x), \quad (x, t) \in \bar{\Omega} \times [0, 1].$$

Φ è di classe C^1 in $\bar{\Omega} \times [0, 1]$: per convincersene basta pensare che l'applicazione $f \mapsto u$, di $\{f \in (H^{k,p}(\Omega))^n: \|f\|_{k,p} < \xi\}$ su $\{u \in (H_0^{1,p}(\Omega) \cap H^{k+2,p}(\Omega))^n: \|u\|_{k+2,p} < \eta\}$ è differenziabile con continuità e che, essendo Ω di classe C^1 e $p > n/(k+1)$, risulta $H^{k+2}(\Omega) \subset C^1(\bar{\Omega})$ con iniezione continua. Inoltre risulta $\Phi(x, 0) = x$, $\forall x \in \bar{\Omega}$ (perchè $T0 = 0$) e $\Phi(x, 1) = (I + u)(x) \forall x \in \bar{\Omega}$.

Pertanto Φ è un'omotopia di classe C^1 dell'identità $I: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^n$ nella funzione $I + u: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^n$. Allora — ricordando che, per ogni $t \in [0, 1]$, $I + u_t$ è un omeomorfismo di $\bar{\Omega}$ su $(I + u_t)(\bar{\Omega})$ che su $\partial\Omega$ coincide con la funzione identica I — si riconosce senza difficoltà che

risulta $(I + u_t)(\bar{\Omega}) = \bar{\Omega}$ e, di conseguenza, $(I + u_t)(\Omega) = \Omega$, per un noto Teorema di Brouwer (v. [8], p. 95-97).

Detto \mathcal{A} l'insieme delle « deformazioni ammissibili », cioè dei diffeomorfismi di classe C^1 di $\bar{\Omega}$ su $\bar{\Omega}$ che conservano l'orientamento e inducono l'identità su $\partial\Omega$, da quanto s'è detto sopra segue che Φ è una \mathcal{A} -omotopia, nel senso che, per ogni $t \in [0, 1]$, la funzione $\bar{\Omega} \ni x \mapsto \Phi(x, t)$ appartiene ad \mathcal{A} .

Abbiamo già notato che, se Ω è di classe C^1 e $p > n/(k+1)$ si ha $H^{k+2,p}(\Omega) \subset C^1(\bar{\Omega})$. Notiamo inoltre che, se Ω è di classe C^1 , $u \in (H_0^{1,p}(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega}))^n \Rightarrow u|_{\partial\Omega} = 0$, nonchè $u \in (C^1(\bar{\Omega}))^n$, $u|_{\partial\Omega} = 0 \Rightarrow u \in (H_0^{1,p}(\Omega))^n$, (v. ad esempio [11], Th. 4.10). Pertanto, se Ω è di classe C^1 e $p > n/(k+1)$, risulta $(H_0^{1,p}(\Omega) \cap H^{k+2,p}(\Omega))^n = \{u \in (H^{k+2,p}(\Omega))^n : u|_{\partial\Omega} = 0\}$.

In base a tutte queste considerazioni, dal Teorema 6 e dal Lemma 1 si deduce il seguente

TEOREMA A. *Se $a \in (C^{k+2}(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}^n))^n$, se sussistono (12), (13) e Ω è connesso e di classe C^{k+2} , allora se $p > n/(k+1)$, (p reale > 1), esistono due numeri positivi ξ, η tali che per ogni $f \in (H^{k,p}(\Omega))^n$, con $\|f\|_{k,p} < \xi$, il problema $((D), (P))$ del § 3 ha una e una sola soluzione $u \in (H^{k+2,p}(\Omega))^n$ con $\|u\|_{k+2,p} < \eta$ e per i quali esiste una \mathcal{A} -omotopia di classe C^1 dell'identità $I: \bar{\Omega} \rightarrow \bar{\Omega}$ in $I + u: \bar{\Omega} \rightarrow \bar{\Omega}$.*

In maniera analoga, dal Teorema 7 e dal Lemma 2 si perviene al seguente

TEOREMA B. *Se $a \in (C^{k+3}(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}^n))^n$, se sussistono (12), (13) e Ω è connesso e di classe C^{k+3} , allora per ogni $\lambda \in]0, 1[$ esistono due numeri positivi ξ, η tali che per ogni $f \in (C^{k,\lambda}(\bar{\Omega}))^n$, con $\|f\|_{k,\lambda} < \xi$, il problema $((D), (P))$ del § 3 ha una e una sola soluzione $u \in (C^{k+2,\lambda}(\bar{\Omega}))^n$ con $\|u\|_{k+2,\lambda} < \eta$ e per i quali esiste una \mathcal{A} -omotopia di classe C^1 dell'identità $I: \bar{\Omega} \rightarrow \bar{\Omega}$ in $I + u: \bar{\Omega} \rightarrow \bar{\Omega}$.*

6. Osservazioni sulla linearizzazione del problema (P).

I Teoremi 6 e 7, non sono solo dei teoremi di omeomorfismo locale (attorno a 0) per l'operatore T (e quindi di esistenza e unicità locali per il problema (P)), ma sono teoremi di diffeomorfismo locale (attorno a 0) e quindi, associati ai Teoremi A e B, forniscono una giustificazione della teoria lineare dell'elastostatica nell'ambito della teoria finita, limitatamente al « problema di posto » che abbiamo studiato.

Nelle ipotesi del Teorema 6, ad esempio, si ha (tra l'altro) che:

(a) T è un omeomorfismo di un intorno U di 0 in $(H_0^{1,p}(\Omega) \cap H^{k+2,p}(\Omega))^n$ su un intorno V di 0 in $(H^{k,p}(\Omega))^n$ [e quindi $\forall f \in V$ esiste, in U , una e una sola soluzione $u(f)$ del problema (P)],

(b) T_L è un isomorfismo di $(H_0^{1,p}(\Omega) \cap H^{k+2,p}(\Omega))^n$ su $(H^{k,p}(\Omega))^n$ [e quindi $\forall f \in (H^{k,p}(\Omega))^n$ esiste, in $(H^{k+2,p}(\Omega))^n$ una e una sola soluzione $u_L(f)$ del problema linearizzato (PL)],

$$(c) \quad \lim_{\|f\|_{k,p} \rightarrow 0} \frac{\|u(f) - u_L(f)\|_{k+2,p}}{\|f\|_{k,p}} = 0 \quad (f \in V).$$

La proprietà (b) discende dal Teorema 4, ma anche dal Teorema 6 in quanto, se T è un diffeomorfismo di U su V , allora, $\forall u \in U$, $T'(u)$ è un isomorfismo di $(H_0^{1,p}(\Omega) \cap H^{k+2,p}(\Omega))^n$ su $(H^{k,p}(\Omega))^n$, donde (b) ricordando che (per il Teorema 1) $T'(0) = T_L$.

La proprietà (c) esprime il fatto che $T^{-1}: V \rightarrow U$ è differenziabile in 0 e che $(T^{-1})'(0) = T_L^{-1}$; ciò è vero in quanto, per il Teorema 6, T è un diffeomorfismo di U su V e quindi $\forall u \in U$ si ha $(T^{-1})'(Tu) = (T'(u))^{-1}$ donde [ricordando che $T0 = 0$] $(T^{-1})'(0) = (T'(0))^{-1} = T_L^{-1}$.

Osserviamo, poi, che il Teorema A aggiunge (nell'ulteriore ipotesi che Ω sia connesso) che U e V possono essere scelti in maniera tale che ogni $u \in U$ verifichi la condizione (D) e che per ogni $u \in U$ si possa passare dall'identità $I: \bar{\Omega} \rightarrow \bar{\Omega}$ alla « deformazione » $I + u$ attraverso una famiglia continua (anzi di classe C^1) di « deformazioni ammissibili », cioè di elementi di \mathcal{A} .

* * *

Sia $a \in (C^1(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}^n))^n$ tale che $|a(x, y)| \leq b + c|y| \quad \forall (x, y) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R}^n$, con b e c costanti positive e sussistano (12), (13).

Allora, qualunque sia $p > 1$, risulta evidentemente $A\sigma \in (L^p(\Omega))^n$ $\forall \sigma \in (L^p(\Omega))^n$, ove A è l'operatore definito da (5); anzi, in base a un noto teorema (v. per es. [9], Th. 17.1), $A: (L^p(\Omega))^n \rightarrow (L^p(\Omega))^n$ è continuo; di conseguenza T è un operatore continuo di $(H_0^{1,p}(\Omega))^n$ in $(H^{-1,p}(\Omega))^n$.

Sia Ω di classe C^1 . Allora il problema (PL) è ben posto assumendo $(H_0^{1,p}(\Omega))^n$ come spazio delle soluzioni e $(H^{-1,p}(\Omega))^n$ come spazio dei dati, nel senso che T_L è un isomorfismo di $(H_0^{1,p}(\Omega))^n$ su $(H^{-1,p}(\Omega))^n$; lo afferma il Teorema 3.

Tuttavia, se a non è lineare in y , non esiste alcuna coppia (U, V) , con U intorno dell'origine in $(H_0^{1,p}(\Omega))^n$ e V intorno dell'origine in $(H^{-1,p}(\Omega))^n$, tale che T sia un omeomorfismo di U su V e valga

$$(19) \quad \lim_{\|f\|_{-1,p} \rightarrow 0} \frac{\|u(f) - u_L(f)\|_{1,p}}{\|f\|_{-1,p}} = 0 \quad (f \in V),$$

ove $u(f)$ è l'elemento di U tale che $Tu(f) = f$ e $u_L(f)$ è l'elemento di $(H_0^{1,p}(\Omega))^n$ tale che $T_L u_L(f) = f$.

Infatti, se T è un omeomorfismo di U su V ed è vera (19), allora $T^{-1}: V \rightarrow U$ è differenziabile in 0 [si ricordi che $T0 = 0$] e il suo differenziale in 0 è $T_L^{-1}: (H^{-1,p}(\Omega))^n \rightarrow (H_0^{1,p}(\Omega))^n$; tenendo presente che T è un omeomorfismo di U su V , che $A: (L^p(\Omega))^n \rightarrow (L^p(\Omega))^n$ è continua e che $D^*: (L^p(\Omega))^n \rightarrow (H^{-1,p}(\Omega))^n$ è lineare e continua, dalla differenziabilità in 0 di $T^{-1}: V \rightarrow U$ segue facilmente (v. [16], § 3) la differenziabilità nell'origine di $A \circ D: (H_0^{1,p}(\Omega))^n \rightarrow (L^p(\Omega))^n$; ma, per il Teorema del § 1 di [17], ciò accade (se e) solo se a è lineare in y .

BIBLIOGRAFIA

- [1] R. A. ADAMS, *Sobolev spaces*, Academic Press (1975).
- [2] F. E. BROWDER, *Estimates and existence theorems for elliptic boundary value problems*, Proc. Nat. Acad. Sc. U.S.A., **45** (1959), pp. 365-372.
- [3] F. E. BROWDER, *A priori estimates for solutions of elliptic boundary value problems*, Indag. Math., **22** (1960), pp. 145-169.
- [4] S. CAMPANATO, *Equazioni ellittiche del II ordine e spazi $L^{(2,\lambda)}$* , Annali di Matematica, **69** (1965), pp. 321-381.
- [5] J. DIEUDONNÉ, *Eléments d'analyse*, vol. 3, Gauthier-Villars (1970).
- [6] G. FICHERA, *Existence Theorems in Elasticity*, Handbuch der Physik, Bd. VI A/2, Springer-Verlag (1972).
- [7] A. FRIEDMANN, *Partial differential equations*, Holt, Rinehart and Winston, Inc. (1969).
- [8] W. HEREWICZ - H. WALLMAN, *Dimension Theory*, Princeton (1948).
- [9] M. KRASNOSELSKIJ et al., *Integral operators in spaces of summable functions*, Noordhoff Int. Publ. Leyden (1976).
- [10] H. MEISTERS - C. OLECH, *Locally one-to-one mappings and a classical theorem on schlicht functions*, Duke Math. J., **30** (1963), pp. 63-80.
- [11] J. NEČAS, *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques*, Masson et Cie Ed. (1967).

- [12] C. G. SIMADER, *On Dirichlet's boundary value problem*, Lectur Notes in Math., Springer-Verlag (1972).
- [13] F. STOPPELLI, *Un teorema di esistenza e di unicità relativo alle equazioni dell'elastostatica isoterma per deformazioni finite*, Ricerche Matematiche, **3** (1954), pp. 247-267.
- [14] C. TRUESDELL, *Introduction à la mécanique rationnelle des milieux continus*, Masson et C.ie Ed. (1974).
- [15] T. VALENT, *Sulla differenziabilità dell'operatore di Nemytsky*, Rend. Acc. Naz. Lincei, **65**, fasc. 1-2 (1978).
- [16] T. VALENT, *Osservazioni sulla linearizzazione di un operatore differenziale*, Rend. Acc. Naz. Lincei, **65**, fasc. 3-4 (1978).
- [17] T. VALENT - G. ZAMPIERI, *Sulla differenziabilità di un operatore legato a una classe di sistemi differenziali quasi-lineari*, Rend. Sem. Mat. Padova, **57** (1977), pp. 311-322.
- [18] W. VAN BUREN, *On the existence and uniqueness of solutions to boundary value problems in finite elasticity*, Thesis, Dep. of Math., Carnegie-Mellon University, 1968. Research Report 68-ID7 - MEKMA-RI, Westinghouse Research Laboratories, Pittsburgh, Pa. (1968).
- [19] C. C. WANG - C. TRUESDELL, *Introduction to rational elasticity*, Noordhoff, Groningen (1973).

Manoscritto pervenuto in redazione il 26 febbraio 1979.