RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

G. ANDREATTA
M. A. BENEDETTI
F. MASON

Reti di trasporto a flusso non conservativo

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 60 (1978), p. 151-163
<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1978__60__151_0>

Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, Vol. 60 (1978)

Reti di trasporto a flusso non conservativo.

G. Andreatta - M. A. Benedetti - F. Mason (*)

1. Introduzione.

Nella teoria delle reti di trasporto percorse da un flusso, si ipotizzano solitamente per il flusso stesso le cosiddette proprietà di conservazione:

1) per ogni nodo la somma dei flussi entranti eguaglia la somma dei flussi uscenti;

2) per ogni arco (x, y) il flusso che parte da x (verso y) eguaglia quello che arriva in y (da x).

In molte situazioni concrete si presenta l'opportunità di studiare reti di trasporto in cui uno o entrambi i principi suaccennati vengono a cadere.

È il caso delle operazioni finanziarie, nelle quali un capitale disponibile, investito in una certa epoca (nodo) in una fissata operazione finanziaria di durata finita (arco) si trova aumentato (o più in generale modificato) alla fine dell'operazione stessa.

È però anche il caso delle comuni reti idriche, di alimentazione di energia elettrica, ecc. nelle quali durante i percorsi (archi) si verificano inevitabilmente delle dispersioni. In questi casi può addirittura venir meno il principio di conservazione del flusso nei nodi.

È pressochè immediato introdurre, con ovvie modifiche, anche per tali reti, che diremo « *a flusso non conservativo* », concetti analoghi a quelli delle usuali reti « conservative ».

(*) Indirizzo degli A.A.: G. Andreatta: Istituto di Matematica Applicata, Università di Padova; M. A. Benedetti: Seminario Matematico, Università di Padova; F. Mason: Laboratorio di Matematica, Università di Venezia.

Viceversa, la determinazione di un flusso ottimale non è ricavabile con i classici algoritmi di Ford-Fulkerson (cfr. [2]), neppure se opportunamente modificati.

In questa nota vengono esposti dei risultati teorici sulle reti non conservative, sulla base dei quali è possibile la costruzione di algoritmi atti a determinare un flusso ottimale.

2. Definizioni fondamentali.

Sia R una rete di trasporto, $T = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ l'insieme dei nodi e U l'insieme degli archi. Sia t_0 il nodo di entrata (sorgente) e t_n il nodo di uscita (pozzo).

Per le altre usuali definizioni relative alle reti di trasporto rinviamo all'abbondante letteratura in materia (cfr. [1], [2]). Poichè lungo ciascun arco (t_i, t_j) appartenente ad U il flusso subisce delle variazioni, distingueremo un flusso entrante x_{ij} da un flusso uscente y_{ij}, legati tra loro dalla relazione:

$$y_{ij} = k_{ij} \cdot x_{ij}$$

ove k_{ij} è una costante positiva associata all'arco (t_i, t_j) che chiameremo coefficiente di variazione nell'arco (t_i, t_j).

Si noti che la variazione del flusso lungo un arco risulta essere una funzione lineare del flusso entrante dal nodo iniziale dell'arco.

Il flusso risulta una funzione F da U in R^2.

Le usuali definizioni di capacità superiore c_{ij} e inferiore b_{ij} relative all'arco (t_i, t_j) saranno qui riferite sempre al flusso entrante x_{ij}.

Nella trattazione che segue si supporranno per semplicità le b_{ij} uguali a zero: il caso di capacità inferiori non nulle è facilmente riconducibile a questo come diremo più avanti.

Diremo *ammissibile* un flusso F tale che per ogni arco (t_i, t_j) della rete il flusso entrante sia compreso tra le capacità inferiore e superiore: $b_{ij} \leqslant x_{ij} \leqslant c_{ij}$.

3. Definizione di ottimalità.

Dato un flusso F, diremo *valore iniziale* $v_0(F)$ la somma dei flussi uscenti dal nodo iniziale t_0, e *valore finale* $v_n(F)$ la somma dei flussi entranti nel nodo finale t_n.

Tra i diversi flussi ammissibili per una rete di trasporto, ha interesse la ricerca di quelli (se esistono) che rendono massimo $v_n(F)$; tra questi poi ha interesse individuare quelli per cui è minimo $v_0(F)$. Diamo allora le seguenti definizioni:
Diremo *flusso massimale* qualsiasi flusso ammissibile F per cui risulti massimo il valore finale del flusso $v_n(F)$, e porremo:

$$\bar{v}_n = \text{MAX}\{v_n(F) \colon F \text{ flusso ammissibile}\}\,.$$

Diremo *flusso ottimale* qualsiasi flusso massimale per cui sia minimo il valore iniziale $v_0(F)$ del flusso e porremo:

$$\bar{v}_0 = \text{MIN}\{v_0(F) \colon F \text{ flusso ammissibile, } v_n(F) = \bar{v}_n\}\,.$$

Ai fini della determinazione del flusso ottimale non è restrittivo supporre che valga il principio di conservazione del flusso in ciascun nodo, in quanto, in caso contrario, basta introdurre un conveniente numero di nodi ed archi fittizi, in modo tale da poter imputare le variazioni di flusso unicamente agli archi. Pertanto, d'ora innanzi, supporremo valido il principio di conservazione del flusso in ogni nodo.

Si noti che nell'ipotesi che le capacità superiori degli archi siano finite, tenuto conto che la rete di trasporto è finita, si può facilmente dimostrare che un flusso ottimale certamente esiste.

Si consideri ora una catena elementare w individuata dai nodi, nell'ordine: $t_{r_0}, t_{r_1}, t_{r_2}, \ldots, t_{r_h}$, escludendo esplicitamente la catena costituita dal solo arco di ritorno (t_n, t_0).

Diremo che w è una *catena aumentabile* per un flusso ammissibile F quando gli archi (t_i, t_j) (il cui spigolo supporto appartenga a w) sono:

1) non saturi superiormente $(x_{ij} < c_{ij})$ se orientati nel verso da t_{r_0} a t_{r_h};

2) non saturi inferiormente $(0 < x_{ij})$ se orientati nel verso da t_{r_h} a t_{r_0}.

Si noti che nella definizione data è implicito un «orientamento» della catena, nel senso che questa è pensata costituita da una successione ordinata di spigoli (supporto degli archi) congiungenti i vari nodi da t_{r_0} a t_{r_h}.

Definiremo poi *valutazione* della catena w il numero:

$$s(w) = \prod k_{r_i r_{i+1}} \cdot \prod (1/k_{r_{j+1} r_j})$$

dove il primo prodotto è relativo agli spigoli supporto di archi il cui verso è concorde con l'orientamento della catena; il secondo prodotto è relativo agli spigoli supporto di archi il cui verso è discorde con l'orientamento della catena.

Diremo infine *catena massimale* una qualunque catena elementare congiungente il nodo iniziale t_0 al nodo finale t_n.

Si consideri ora un ciclo z individuato dai nodi $t_{r_1}, t_{r_2}, \ldots, t_{r_h}, t_{r_1}$ (e quindi dagli spigoli (t_{r_1}, t_{r_2}), (t_{r_2}, t_{r_3}), $\ldots$, (t_{r_h}, t_{r_1})).

Anche in questo caso è implicito un orientamento del ciclo.

Diremo *valutazione* del ciclo z il numero:

$$s(z) = \prod k_{r_i r_{i+1}} \cdot \prod (1/k_{r_{j+1} r_j})$$

ove il primo prodotto è relativo agli spigoli supporto di archi il cui verso è concorde con l'orientamento del ciclo; il secondo prodotto è relativo agli spigoli supporto di archi il cui verso è discorde con l'orientamento del ciclo.

Si noti che il ciclo $(t_{r_1}, t_{r_h}, t_{r_{h-1}}, \ldots, t_{r_1})$ che è costituito dagli stessi spigoli di z, è però orientato in modo opposto a z e pertanto verrà, in quanto segue, considerato distinto da z. Ovviamente la valutazione di questo secondo ciclo è il reciproco di quella di z.

Diremo *ciclo aumentabile* per un flusso F un ciclo z tale che siano verificate le condizioni:

1) $s(z) > 1$;

2) gli archi (t_i, t_j) il cui supporto appartiene a z e il cui verso è concorde con l'orientamento di z sono non saturi superiormente: $x_{ij} < c_{ij}$;

3) gli archi (t_i, t_j) il cui supporto appartiene a z e il cui verso è discorde con l'orientamento di z sono non saturi inferiormente: $0 < x_{ij}$.

4. Teoremi fondamentali sull'ottimalità.

Ai fini della dimostrazione dei teoremi che seguono consideriamo una rete di trasporto priva di circuiti. Tale supposizione non è restrittiva in quanto, ad ogni assegnata rete di trasporto R dotata di circuiti, è sempre possibile associare una «equivalente» rete di trasporto R' priva di circuiti.

Infatti, dato un qualunque circuito individuato dagli archi (t_{s_1}, t_{s_2}), (t_{s_2}, t_{s_3}), ..., (t_{s_h}, t_{s_1}) e notando che il nodo t_{s_1} può essere considerato sia come nodo iniziale che come nodo finale del circuito stesso, operiamo una distinzione tra questi due «ruoli» introducendo al posto del nodo t_{s_1}, due nodi $t_{s_1^-}$ e $t_{s_1^+}$, collegati fra di loro da un arco $(t_{s_1^-}, t_{s_1^+})$ avente coefficiente di variazione uguale ad uno e capacità superiore e inferiore rispettivamente uguali a $+\infty$ e 0 (il flusso attraverso questo arco corrisponde al flusso che entrava nel nodo t_{s_1} senza essere poi « investito » nel circuito).

Inoltre, al posto dell'arco (t_{s_1}, t_{s_2}) introduciamo l'arco $(t_{s_1^-}, t_{s_2})$; e al posto di (t_{s_h}, t_{s_1}) introduciamo $(t_{s_h}, t_{s_1^+})$; infine, se tra i rimanenti archi di R, ne esistono alcuni del tipo (t_j, t_{s_1}) o (t_{s_1}, t_j) (per qualche j), al posto di essi introduciamo gli archi $(t_j, t_{s_1^-})$ o $(t_{s_1^+}, t_j)$ rispettivamente. Tutti gli archi introdotti conservano le stesse caratteristiche (coefficiente di variazione, capacità inferiore e superiore) dei corrispondenti archi sostituiti.

Ripetendo il procedimento descritto, per ogni circuito di R si ottiene una nuova rete di trasporto R' che non contiene alcun circuito e che risulta perfettamente equivalente alla rete R ai fini della determinazione di un flusso ottimale (una volta identificati, in modo ovvio, i flussi nelle due reti). Proviamo ora i seguenti teoremi:

TEOREMA 1. *Condizione necessaria affinchè un flusso sia ottimale è che non esistano nè catene massimali aumentabili nè cicli aumentabili per il flusso stesso.*

Supponiamo esista una catena massimale aumentabile o un ciclo aumentabile per un flusso F e facciamo vedere che esso non è ottimale. Distinguiamo due casi:

a) esiste per F una catena massimale aumentabile. In tal caso si può ovviamente aumentare il valore finale del flusso di una quantità pari al massimo compatibile con i vincoli di capacità (inferiore e superiore) dei vari archi i cui spigoli supporto compongono la catena, tenuto conto dei coefficienti k_{ij}. Questo implica che il flusso F non è massimale e quindi neppure ottimale;

b) esiste un ciclo aumentabile z individuato dai nodi $t_{r_1}, t_{r_2}, \ldots$ $\ldots, t_{r_h}, t_{r_1}$. In questa seconda circostanza distinguiamo ulteriormente due alternative:

b1) $t_n \in z$ (e allora sarà possibile trovare un flusso F' tale che $v_n(F') > v_n(F)$);

b2) $t_n \notin z$ (e allora si potrà trovare un flusso F' tale che $v_n(F') = v_n(F)$ ma $v_0(F') < v_0(F)$).

Consideriamo il caso (*b1*).

Gli spigoli costituenti il ciclo siano, nell'ordine:

$$(t_n, t_{r_1}), (t_{r_1}, t_{r_2}), \dots, (t_{r_{h-1}}, t_n) .$$

Se allo spigolo $(t_{r_i}, t_{r_{i+1}})$ corrisponde l'arco $(t_{r_i}, t_{r_{i+1}})$, orientato concordemente al verso del ciclo, su di esso il flusso può essere incrementato; se invece allo spigolo $(t_{r_i}, t_{r_{i+1}})$ corrisponde l'arco $(t_{r_{i+1}}, t_{r_i})$, orientato in senso opposto al verso del ciclo, su tale arco il flusso può subire una diminuzione. In particolare, essendo t_n nodo finale della rete di trasporto, su $(t_{r_{h-1}}, t_n)$ il flusso potrà aumentare, mentre potrà diminuire quello su (t_n, t_{r_1}).

Per stabilire l'entità delle possibili variazioni di flusso sugli archi, poniamo per definizione:

$$e_{r_1} = x_{r_1 n} \cdot (1/k_{r_1 n}) .$$

Calcoliamo poi per ricorrenza le quantità e_{r_i} $(i = 2, 3, \dots, h-1)$ come segue:

1) se lo spigolo $(t_{r_{i-1}}, t_{r_i})$ è supporto dell'arco $(t_{r_{i-1}}, t_{r_i})$ si pone:

$$e_{r_i} = \mathrm{MIN}\,\{e_{r_{i-1}} \cdot k_{r_{i-1} r_i}, (c_{r_{i-1} r_i} - x_{r_{i-1} r_i}) \cdot k_{r_{i-1} r_i}\}$$

2) se lo spigolo $(t_{r_{i-1}}, t_{r_i})$ è supporto dell'arco $(t_{r_i}, t_{r_{i-1}})$, si pone invece:

$$e_{r_i} = \mathrm{MIN}\,\{e_{r_{i-1}}(1/k_{r_i r_{i-1}}), x_{r_i r_{i-1}}\} .$$

Si determina infine:

$$e_n = \mathrm{MIN}\,\{e_{r_{h-1}} \cdot k_{r_{h-1} n}, (c_{r_{h-1} n} - x_{r_{h-1} n}) \cdot k_{r_{h-1} n}\} .$$

Il valore finale $v_n(F)$ subisce:

1) un decremento di $e_n/s(z)$, ove $s(z)$ è la valutazione del ciclo;

2) un incremento pari a e_n, con un aumento complessivo dato da:

$$\Delta v_n = e_n(1 - 1/s(z)) > 0 .$$

Ciò contraddice l'ipotesi che F sia ottimale.

Consideriamo ora il caso $b2$).

Uno (almeno) degli archi i cui spigoli supporto fanno parte del ciclo deve essere orientato in modo discorde con il verso del ciclo (altrimenti il ciclo stesso sarebbe in realtà un circuito). Inoltre, per la definizione di aumentabilità del ciclo, il flusso su tale arco deve essere positivo.

Sia (t_{r_1}, t_{r_h}) tale arco: se ne deduce che il nodo t_{r_h} e attraversato da un flusso non nullo e pertanto esiste un cammino da t_0 a t_{r_h} lungo il quale il flusso è sempre positivo.

Ripetendo i calcoli eseguiti nel caso $b1$), in modo che sia t_{r_h} a svolgere il ruolo di « nodo finale » t_n, si calcolano le quantità: $e_{r_1}, e_{r_2}, \dots, e_{r_{h-1}}, e_{r_h}$.

Si nota allora che procedendo a variazioni di flusso analoghe a quelle del caso $b1$), si crea in t_{r_h} una disponibilità pari a $e_{r_h}(1 - 1/s(z)) > 0$ sfruttando la quale è possibile diminuire il flusso lungo il cammino da t_0 a t_{r_h} e di conseguenza il valore iniziale del flusso, ottenendo lo stesso valore finale.

Anche in quest'ultimo caso risulterebbe contraddetta l'ipotesi di ottimalità di F. Q.E.D.

Proviamo ora il seguente:

TEOREMA 2. *Condizione sufficiente affinchè un flusso F sia ottimale è che non esistano nè catene massimali aumentabili nè cicli aumentabili per F stesso.*

Supponiamo F non ottimo; sia F^0 un flusso ottimale e proviamo che per F esistono catene massimali o cicli (o sia catene massimali che cicli) aumentabili.

Poichè $F \neq F^0$, esisterà almeno un arco (t_i, t_j) che diremo a_0, su cui $F(a_0) < F^0(a_0)$: infatti non può essere $F > F^0$ su tutti gli archi ove i due flussi differiscono altrimenti verrebbe a cadere o l'ottimalità di F^0 o il principio di conservazione nei nodi.

Partendo da a_0, costruiamo con un processo iterativo una catena orientata:

$$a_{-k}, a_{-k+1}, a_{-k+2}, \dots, a_{-1}, a_0, a_1, \dots, a_{h-1}, a_h .$$

La costruzione procede in due tempi:

1) individuati gli archi $a_{-i}, a_{-i+1}, \dots, a_{-1}, a_0$ (inizialmente solo a_0) si consideri il nodo iniziale t_r della catena (che sarà uno degli estremi di a_{-i}; al primo passo $t_r = t_i$); se $t_r = t_0$ oppure t_r è estremo di un

arco della catena diverso da a_{-i} la prima fase è terminata; in caso contrario si allunga la catena preponendo ad a_{-i} un arco a_{-i-1} che ha un estremo in t_r e tale che:

se t_r è nodo finale di a_{-i-1}, $F(a_{-i-1}) < F^0(a_{-i-1})$;

se t_r è nodo iniziale di a_{-i-1}, $F(a_{-i-1}) > F^0(a_{-i-1})$.

È evidente che almeno un arco di tale tipo esiste certamente.

Si itera il procedimento: quando esso si arresta si passa alla seconda fase.

2) Individuata la catena $a_{-k}, \ldots, a_0, \ldots, a_i$ (inizialmente quella ottenuta con la prima fase) se ne considera il nodo finale (che al primo passo è t_j, e in generale è uno degli estremi di a_i) che diciamo t_s. Se $t_s = t_n$ o t_s è estremo di un arco della catena sin qui costruita, diverso dall'arco a_i, la costruzione è terminata. In caso contrario si aggiunge alla catena un qualunque arco a_{i+1} che soddisfi alle seguenti condizioni:

a) ha un estremo in t_s;

b) se t_s è nodo iniziale di a_{i+1}, su a_{i+1} $F(a_{i+1}) < F^0(a_{i+1})$;

c) se t_s è nodo finale per a_{i+1}, sia $F(a_{i+1}) > F^0(a_{i+1})$.

Anche in questo caso è facile provare che almeno un arco di tale tipo esiste certamente.

La catena ottenuta, se contiene i vertici t_0 e t_n, è evidentemente elementare, massimale e aumentabile (per costruzione) per F.

In caso contrario contiene un ciclo z (il cui orientamento è indotto dall'orientamento della catena) che risulta pure aumentabile per F. Infatti, se si tratta di una catena massimale, basta osservare che su tutti gli archi (t_i, t_j) concordi con il verso della catena risulta:

$$x_{ij} < x^0_{ij} \leqslant c_{ij};$$

mentre sugli archi (t_h, t_k) orientati in senso opposto risulta:

$$x_{hh} > x^0_{hk} \geqslant 0 \ .$$

Nel secondo caso, su tutti gli archi del ciclo z valgono ancora le ultime due relazioni scritte ed inoltre la valutazione del ciclo è maggiore di uno. Infatti, se la valutazione fosse minore di uno, lo stesso ciclo, percorso in senso opposto, sarebbe aumentabile per F^0, contro l'ipotesi che F^0

sia ottimale (cfr. Teor. 1). Possiamo infine escludere che la valutazione sia uguale ad uno perchè, qualora ciò si verificasse, lasciando immutati i valori iniziale e finale di F^0, sarebbe possibile modificare F^0, facendolo coincidere con F su uno (almeno) degli archi di z. F^0, così modificato, manterrebbe la sua ottimalità, e non differirebbe più da F lungo tutto z. Si procederebbe allora alla ricerca di un nuovo insieme di archi su cui $F \neq F^0$, con la certezza di non ritrovare il ciclo precedente. Analogamente si può operare per tutti gli altri eventuali cicli di valutazione uguale ad uno. Q.E.D.

5. Costruzione di algoritmi.

I teoremi 1 e 2, che danno una condizione necessaria e sufficiente per l'ottimalità di un flusso, contengono utili indicazioni per la costruzione di algoritmi risolutivi.

Si tratta in sostanza, costruito un flusso F, di controllare se per F:

a) esistono catene massimali aumentabili (e, in caso affermativo, saturarle);

b) esistono cicli aumentabili (e, in caso affermativo, aumentare il flusso in t_n o diminuirlo da t_0).

Iterando tali operazioni di saturazione e variazione di flusso, si perviene in un numero finito di passi al flusso ottimale F^0. Esporremo ora, appunto, un algoritmo risolutivo di tipo iterativo: esso consta di una prima fase, in cui si determina un flusso ammissibile per il quale non ci sono catene aumentabili (adoperando un algoritmo di Ford-Fulkerson modificato); di una seconda fase in cui si verifica se esistono cicli aumentabili (e, in caso affermativo, si procede a modificare il flusso fino a determinarne uno ottimale).

a) *Prima fase*. Il sistema di etichettatura dell'algoritmo Ford-Fulkerson va modificato per tener conto dei coefficienti di variazione k_{ij} che rendono diverso il flusso uscente da un arco rispetto a quello entrante.

Poichè l'obiettivo è la determinazione di un flusso F che porga il massimo valore $v_n(F)$ e, a parità di questo, tale che sia minimo $v_0(F)$, è preferibile procedere alla etichettatura iniziando da t_n (etichettato $(0\ -, +\ \infty)$).

Per gli altri nodi, se si considera t_j successore di t_i, e t_i è già etichettato, t_j verrà etichettato $(i +, e_j)$, dove e_j, che ha significato analogo a quello relativo all'algoritmo di Ford-Fulkerson, è dato da:

$$e_j = \text{MIN}\,\{e_i k_{ij}\,, x_{ij} k_{ij}\}$$

essendo, come già definito, k_{ij} il coefficiente di variazione sull'arco (t_i, t_j) e x_{ij} il flusso relativo.

Se si considera invece t_i antecedente di t_j, (e t_j è già stato etichettato), l'etichetta di t_i è $(j -, e_i)$ ove:

$$e_i = \text{MIN}\,\{e_j/k_{ij}\,, c_{ij} - x_{ij}\}\,.$$

Come nel caso classico, l'agoritmo di Ford-Fulkerson, appena descritto, si arresta quando risulta saturata una sezione. Non si tratta però nel nostro caso, necessariamente, di una sezione a « capacità minima », anzi, quest'ultimo concetto perde ogni importanza a causa della non conservatività del flusso.

Tuttavia, individuata che sia una sezione saturata, è garantita pure l'assenza di catene aumentabili (massimali) per il flusso.

In virtù dei teoremi 1 e 2 si tratta ora di cercare eventuali cicli aumentabili per il flusso F. Si passa alla

b) *Seconda fase.* La determinazione di eventuali cicli z, aumentabili per F è riconducibile alla ricerca dei circuiti a valutazione positiva in un opportuno grafo $L = L(F)$.

L è così definito:

1) l'insieme dei nodi è T (stesso insieme di nodi della rete R);

2) per ogni coppia ordinata di nodi (t_i, t_j), esiste il relativo arco (eventualmente un cappio).

La valutazione su L (funzione del flusso F) è così definita:

1) se l'arco $(t_i, t_j) \in R$ non è saturato nè inferiormente nè superiormente, all'arco $(t_i, t_j) \in L$ si associa valutazione $\log k_{ij}$; all'arco $(t_j, t_i) \in L$ si associa invece valutazione $-\log k_{ij}$;

2) se l'arco $(t_i, t_j) \in R$ è saturato superiormente, a $(t_i, t_j) \in L$ si associa valutazione $-\infty$; a $(t_j, t_i) \in L$ si associa valutazione $-\log k_{ij}$;

3) se l'arco $(t_i, t_j) \in R$ è saturato inferiormente, a $(t_i, t_j) \in L$ si associa valutazione $\log k_{ij}$; a $(t_j, t_i) \in L$ si associa valutazione $-\infty$;

4) ai cappi di L si associa valutazione 0;

5) a tutti i restanti archi di L si associa valutazione $-\infty$.

La valutazione di un cammino o di un circuito di L è la somma delle valutazioni degli archi che li compongono.

È appena il caso di notare che tra la valutazione s di una catena o ciclo aumentabili di R e la valutazione q del cammino o circuito corrispondenti in L corre la relazione:

$$s = \exp(q) .$$

La esistenza di un ciclo (di R) aumentabile per F equivale allora a quella di un circuito di L di valutazione positiva. La ricerca di quest'ultimo può essere condotta con uno dei vari metodi noti in letteratura (cfr. [3], [4], [5]).

Sia ora z un ciclo aumentabile per F, individuato dai nodi

$$t_{r_1}, t_{r_2}, t_{r_3}, \ldots, t_{r_{h-1}}, t_{r_h}, t_{r_1} .$$

Il flusso (cfr. Teorema 2) va allora modificato.

Se $t_n \in z$, adoperando le stesse notazioni del teorema 2, detta s_j la valutazione (in R) della catena individuata dai nodi $t_n, t_{r_1}, t_{r_2}, \ldots, t_{r_j}$ allora:

1) se $(t_{r_{i-1}}, t_{r_i}) \in R$, il flusso (su quest'arco) aumenta di $e_n \cdot s_{i-1}/s(z)$;

2) se $(t_{r_i}, t_{r_{i-1}}) \in R$, su tale arco il flusso diminuisce di $e_n \cdot s_i/s(z)$.

Se $t_n \notin z$, si può individuare una catena aumentabile da un nodo del ciclo al nodo t_n, o, mancando questa, un cammino (con flusso positivo) da t_0 a un nodo del ciclo. I metodi di ricerca di circuiti a valutazione positiva danno, di solito, come sottoprodotto, indicazioni in merito.

Alternativamente si può ricorrere ancora all'algoritmo di Ford-Fulkerson a ritroso da t_n: se si perviene a un nodo del ciclo, la catena da questi a t_n è trovata; in caso contrario una catena del genere non esiste, e allora si procede, partendo da un nodo qualsiasi di z alla ricerca di un nodo « antenato » e si itera dall'ultimo antenato trovato sino ad arrivare a t_0 (questa procedura porgerà, evidentemente, un cammino da t_0 sino al ciclo).

Il flusso viene poi modificato in accordo con i soliti vincoli di capacità, tenendo sempre conto dei coefficienti di variazione k_{ij}.

Le espressioni delle variazioni di flusso, con incremento di v_n o diminuzione di v_0, a seconda dei casi, analoghe a quelle già esposte in questo paragrafo e nei teoremi 1 e 2, sono facilmente ricavabili, e pertanto riteniamo di non doverci ulteriormente soffermare sulle stesse.

6. Osservazione finale.

L'algoritmo precedentemente descritto vale nelle ipotesi che:

1) in R non esistano circuiti;

2) le capacità inferiori degli archi siano uguali a zero.

Sorge spontanea la domanda se l'algoritmo descritto sia ancora valido nel caso generale (eventualmente con qualche modifica). La risposta è affermativa, purchè vengano aggiunti all'algoritmo alcuni controlli.

Anzitutto, se le capacità inferiori sono non nulle, potrebbe non esistere un flusso ammissibile e quindi non avrebbe neppure senso cercare un flusso ottimale.

Ammesso invece che esista un flusso ottimale, le modifiche da apportare alla prima fase dell'algoritmo sono piuttosto ovvie; per quanto riguarda la seconda fase, è il caso di osservare che, se esiste un ciclo aumentabile, certamente l'algoritmo lo segnala, tuttavia la maggiore « disponibilità » che si viene a creare nel ciclo può non essere sfruttabile, nel senso che possono non esistere nè catene aumentabili da un nodo del ciclo a t_n, nè catene « diminuibili » (il significato di questo termine è facilmente intuibile) da un nodo del ciclo a t_0: in ogni modo la ricerca di tali catene « diminuibili » può essere eseguita con un metodo di Ford-Fulkerson ulteriormente modificato, a partire da t_0 fino a raggiungere un nodo del ciclo, ove possibile.

La stessa cosa può succedere in presenza di circuiti di valutazione (in R) maggiore di uno: si crea cioè una potenziale maggiore disponibilità nel circuito che non può però essere sfruttata nè « in avanti » nè « all'indietro ».

Pertanto, sui circuiti di L segnalati dall'algoritmo va operato un successivo controllo per stabilire se i corrispondenti cicli di R siano dei cicli aumentabili che risultano concretamente sfruttabili oppure no.

Abbiamo preferito non insistere sui dettagli della descrizione di un algoritmo generale la cui validità sia garantita in tutti i casi, e lasciare invece al lettore la possibilità di adattare di volta in volta l'algoritmo qui descritto in modo da poter sfruttare nel modo più efficiente tutte le informazioni o aspetti peculiari che ciascun problema concreto comporta.

BIBLIOGRAFIA

[1] B. Roy, *Algèbre moderne et théorie des graphes*, Dunod, Paris, 1969-1970.
[2] Ford - Fulkerson, *Flow and networks*, Princeton Univ. Press, 1962.
[3] L. R. Ford Jr., *Network flow theory*, The Rand Corporation, p. 923, August 1956.
[4] E. F. Moore, *The shortest path through a Mose*, Proc. Int. Symp. on the Theory of Switching, 1959.
[5] R. E. Bellmann, *On a Routing problem*, Quart. Appl. Math., 1958.

Manoscritto pervenuto in redazione il 25 ottobre 1978 e in forma definitiva il 7 febbraio 1979.