RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

GIULIANO BRATTI

Risoluzione, in R^2, della II congettura di De Giorgi

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 59 (1978), p. 45-49

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1978__59__45_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 59 (1978)

Risoluzione, in R^2, della II congettura di De Giorgi.

GIULIANO BRATTI (*)

1. Introduzione.

In altra nota, dello stesso A., è pubblicata la risoluzione della I congettura.

In questa, si risolverà la III e la V (per altro semplici conseguenze della I), nonchè la II.

Per ogni cfr. si veda il « Boll. U.M.I., (4) suppl. fasc. 3 (1975), pagg. 77-79 ». E, del resto, non ci sarebbe altro da precisare se non qualche (due per l'esattezza), notazione: nel seguito:

i) si indicherà con $\bar{Q} = \bar{Q}(D) = D_x + iD_y$ l'operatore differenziale di Cauchy-Riemann in due variabili, (Q sarà il suo coniugato);

ii) se A e B sono due aperti di R^2, tali che: $B \subseteq A$, con $L(B)$ si indicherà l'insieme aperto così ottenuto: se $(x, y) \in R^2$, $(x, y) \in L(B)$ se e solo se: esiste una curva continua semplice e chiusa, c, contenuta in B, che è la frontiera di un compatto K tale che: $(x, y) \in K$.

Per economia del lettore si ricorda, inoltre, la seguente caratterizzazione: la quaterna $(A, B, P, \bar{Q})$, $(P = P(D)$ è un operatore differenziale a coefficienti costanti), è C^∞-compatibile se e solo se $L(B) \subseteq A$, (1).

(*) Indirizzo dell'A.: Seminario Matematico, Via Belzoni 7, I-35100 Padova.

(1) La caratterizzazione è valida nell'ipotesi che $P(z)$ e $Q\bar{Q}(z)$ abbiano zeri complessi comuni; altrimenti, per il « Nullstellensatz » di Hilbert, le stesse congetture sarebbero banali.

2. III e V congettura.

III: Se la quaterna: $(A, B, P, Q\bar{Q})$ è C^∞-compatibile, esiste un aperto T tale che:

a) $B \subseteq T \subseteq A$;

b) la quaterna: $(T, T, P, Q\bar{Q})$ è C^∞-compatibile.

V: Siano A e B due aperti di R^2 tali che: $B \subseteq A$.

Per ogni $y \in R^2/A$ la quaterna: $\big(R^2 - \{y\}, B, P, Q\bar{Q}\big)$ sia C^∞-compatibile.

Allora anche la quaterna: $(A, B, P, Q\bar{Q})$ è C^∞-compatibile.

Dimostrazioni. – Poichè la quaterna: $(A, B, P, Q\bar{Q})$ è C^∞-compatibile, si ponga: $L(B) = \big((x, y) \in R^2$: esiste una curva continua semplice e chiusa, c, contenuta in B e tale che: il compatto K di cui essa è frontiera contenga $(x, y)\big)$.

Ovvio che: $B \subseteq L(B) \subseteq A$.

La quaterna: $\big(L(B), L(B), P, Q\bar{Q}\big)$ è C^∞-compatibile.

Se c è una curva continua semplice e chiusa contenuta in B, il compatto K di cui essa è la frontiera deve essere tutto contenuto in $R^2 - \{y\}$, per ogni $y \in R^2/A$.

Ovvio che: $K \in \bigwedge_{y \in R^2/A} \big(R^2 - \{y\}\big) = A$.

Ciò dimostra che la quaterna: $(A, B, P, Q\bar{Q})$ è C^∞-compatibile.

3. II congettura.

La quaterna: $(A, B, P, Q\bar{Q})$ sia C^∞-compatibile.

Sia: A_n una successione di aperti di A, tali che $A_n \subseteq A_{n+1} \subseteq \subseteq \bigcup_n A_n = A$.

Sia $A_1 \wedge B \neq \emptyset$.

Allora: esiste una successione di aperti di B, B_n, tali che:

a) $B_n \subseteq B_{n+1} \subseteq \bigcup_n B_n = B$;

b) ogni quaterna: $(A_n, B_n, P, Q\bar{Q})$ è C^∞-compatibile.

Dimostrazione. Si osservi che la C^∞-compatibilità della quaterna: $(A, B, P, Q\bar{Q})$ è condizione necessaria al fine che la congettura sia vera.

a) il caso: $A = R^2$ e B limitato.

Sia: $G_1 = (Z_{1,j})$, $j \in J_1$, la famiglia di tutti i sottoinsiemi aperti di $A_1 \wedge B$ tali che: ogni quaterna: $(A_1, Z_{1,j}, P, Q\bar{Q})$ è C^∞-compatibile.

G_1 non è vuota. Infatti: se $p \in A_1 \wedge B$, sia $V_p \subseteq A_1 \wedge B$, un intorno convesso p. La quaterna: $(V_p, V_p, P, Q\bar{Q})$ è C^∞-compatibile; lo è, quindi, anche la quaterna: $(A_1, V_p, P, Q\bar{Q})$.

Poichè la famiglia G_1 soddisfa le ipotesi del lemma di Zorn, sia $B_1 \in G_1$ un massimale: ovvio che la quaterna: $(A_1, B_1, P, Q\bar{Q})$ è C^∞-compatibile.

Per $n > 1$, sia G_n la famiglia di tutti i sottoinsiemi di $A_n \wedge B$, aperti, tali che: se $Z \in G_n$: $B_{n-1} \subseteq Z$; la quaterna: $(A_n, B_n, P, Q\bar{Q})$ è C^∞-compatibile.

Al solito: sia B_n un massimale di G_n.

Si considerino le quaterne: $(A_n, B_n, P, Q\bar{Q})$ ognuna C^∞-compatibile; dimostriamo che:

$$\bigcup_n B_n = B\,.$$

Infatti: sia $p \in B$ e sia $p \notin \bigcup_n B_n$. Sia V_p un intorno di p contenuto in $A_{n_0+h} \wedge B$. Poichè i B_n sono massimali in G_n, si ha:

ogni quaterna: $\left(A_{n_0+h}, B_{n_0+h} \bigcup V_p, P, Q\bar{Q}\right)$ non può essere C^∞-compatibile.

Ciò implica:

per ogni $h \in N$, esiste c_h, curva continua semplice e chiusa contenuta in $B_{n_0+h} \bigcup V_p$ frontiera di un compatto K_h tale che: esiste $p_h \in K_h$ e $p_h \notin A_{n_0+h}$.

Si osservi che c_h è tutta contenuta in B; per la compatibilità della quaterna: $(R^2, B, P, Q\bar{Q})$, p_h deve stare in A.

Poichè le curve c_h sono contenute in B e B è limitato si può supporre che: p_h sia convergente verso q.

Si osservi che: poichè $p_h \in R^2/A_{n_0+h} \subseteq R^2/A_{n_0+h-1}$, q deve appartenere a: $A \bigwedge_h R^2/A_{n_0+h} = \emptyset$.

b) Sia B non limitato.

Si può supporre: $B = \bigcup_n B'_n$ con le B'_n limitate, e $B'_n \subseteq B'_{n+1}$.

Come prima:

$(A_1, B'_{1,1}, P, Q\bar{Q}), \ldots, (A_1, B'_{1,n}, P, Q\bar{Q})$ siano C^∞-compatibili con:

$$B'_{1,n} \subseteq B'_{1,n+1} \subseteq \bigcup_n B'_{1,n} = B'_1;$$

$(A_2, B'_{2,1}, P, Q\bar{Q}), \ldots, (A_2, B'_{2,n}, P, Q\bar{Q}), \ldots$ siano C^∞-compatibili con: $B'_{2,n} \supseteq B'_{1,n}$ e le $B'_{2,n}$ come sopra.

Se si considerano le quaterne: $(A_n, B'_{n,n}, P, Q\bar{Q})$, esse hanno la proprietà di essere C^∞-compatibili; ovvio che: $B'_{n,n} \subseteq B'_{n+1,n+1}$ e che, con il solito procedimento per diagonale di Hilbert-Cantor:

$$\bigcup_n B'_{n,n} = B\,.$$

Il caso: $A = R^2$ è completamente risolto.

b) Il caso: $A \neq R^2$ e B limitato e connesso.

Come prima: le quaterne: $(A_n, B_n, P, Q\bar{Q})$ siano C^∞-compatibili e sia: $B_n \subseteq B_{n+1}$. Sia $p \in B$ e $p \notin \bigcup_n B_n$:

Dimostriamo che ciò è assurdo.

Per qualche $n_0 \in N$ esiste un intorno, V_p, di p tale che:

$$V_p \subseteq A_{n_0+h} \wedge B\,, \qquad \text{per ogni } h \in N\,.$$

Per il fatto che i B_n sono massimali, le quaterne: $(A_{n_0+h}, B_{n_0+h} \cup V_p, P, Q\bar{Q})$ non sono, nessuna di esse, C^∞-compatibili.

Analogamente a prima:

per ogni $h \in N$ esiste una curva continua semplice e chiusa, c_h, contenuta in $B_{n_0+h} \cup V_p$ che è la frontiera di un compatto K_h con:

$$p_h \in K_h \subseteq A \;\text{ e }\; p_h \notin A_{n_0+h}.$$

Poichè B è limitato si può supporre che: p_h converga a q.

q, ovviamente, sta nella frontiera di A.

Infatti:

$$q \in \bigwedge_h R^2/A_{n_0+h} = R^2/A\,.$$

1° Caso.

Sia: dist. $(c_h, q) = a \in R_+$.

Considerato il cerchio Γ di raggio $a/2$ e centro q, si deve avere: $p_h \in \Gamma$ per ogni $h \geqslant h_0$.

Sia r una semiretta uscente da q.

Ovvio che c_h, $h \geqslant h_0$, interseca r in $x_h \in B_{n_0+h} \bigcup V_p$.

Ovvero:

esiste almeno un « buco » di A attorno al quale c'è B.

Ciò implicherebbe che la quaterna: $(A, B, P, Q\bar{Q})$ non è C^∞-compatibile. Assurdo.

2° Caso.

Sia: dist. $(c_h, q) \to 0$ con $h \to +\infty$.

Ciò implicherebbe che $q \in b(B)$ (²) visto che: $c_h \subset B$ e che q è di frontiera per A: $q \in b(A)$.

La conclusione è immediata se si suppone che: $b(B) \wedge b(A) = \emptyset$, che B sia connesso o no.

Sempre in questo secondo caso, se B non è limitato, si può supporre che: $B = \bigcup_n B'_n$, con: $B'_n \subseteq B'_{n+1}$ e con $b(B'_n) \wedge b(A) = \emptyset$.

Allora la congettura è vera di nuovo, con lo stesso procedimento di a). Rimane l'indagine nel primo caso con B qualsiasi.

Ovvio che:

$$B = \bigcup_n B'_n \text{ dove le } B'_n \text{ sono le componenti connesse di } B.$$

E tale caso si vede immediatamente che è riconducibile agli altri.

In definitiva: la seconda congettura è provata.

(²) $b(B)$ = frontiera di B.

BIBLIOGRAFIA

[I] G. Bratti *Risoluzione, in R^2, di una congettura di De Giorgi*, in pubblicazione presso Rend. Sem. Mat. Padova, Vol. **57**.

[II] E. De Giorgi, *Sulle soluzioni globali di alcuni sistemi di equazioni differenziali*, Boll. U.M.I., (4), supp. fasc. **3** (1975), pp. 77-79.

Manoscritto pervenuto in redazione il 1° aprile 1978.