

RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

GIOVANNI ZACHER

**La classe dei gruppi iperciclici è proiettivamente
invariante**

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 59 (1978), p. 263-268

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1978__59__263_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1978, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

La classe dei gruppi iperciclici è proiettivamente invariante.

GIOVANNI ZACHER (*)

Scopo della presente Nota è di provare che se $\sigma: G \rightarrow \bar{G}$ è una proiettività del gruppo G su quello \bar{G} (ossia un isomorfismo del reticolo $\mathfrak{L}(G)$ di tutti i sottogruppi di G su quello $\mathfrak{L}(\bar{G})$ di \bar{G}), allora \bar{G} è iperciclico ⁽¹⁾ se e solo se tale è G .

Per quanto concerne terminologia e notazione, useremo per lo più quelle di [1], [5] e [8]. La scrittura $M <_q G$ significa che M è un sottogruppo quasi normale di G .

Trattiamo dapprima i gruppi iperciclici periodici.

Ricordiamo anzitutto due proposizioni dovute a R. Schmidt nel caso di p -gruppi finiti ([5], Lemma 2.1 e Theorem 2.2); esse conservano la loro validità nei p -gruppi infiniti.

1. Sia G un p -gruppo ed M un suo sottogruppo quasi normale d'ordine primo, ma non normale. Allora: i) la chiusura normale M^G di M è un p -gruppo abeliano elementare contenuto nella norma \mathcal{M} di G ; ii) $M^G = M \times (M^G \wedge Z(G))$; iii) per ogni $x \in G \setminus C(M)$ è $\langle x \rangle \wedge Z(G) \wedge M^G \neq \{1\}$; iv) $C(M) = C(M^G)$ e $G/C(M)$ è un p -gruppo abeliano elementare.

Osserviamo che la 1. è valida pure nei gruppi localmente finiti e in ogni gruppo se l'ordine di M è 2.

(*) Indirizzo dell'A.: Dipartimento di Matematica - Libera Università di Trento - Povo (Trento).

⁽¹⁾ Un gruppo dicesi iperciclico se e solo se ogni sua immagine epimorfa non identica contiene un sottogruppo normale ciclico non identico.

2. Sia G un p -gruppo e $\sigma: G \rightarrow \bar{G}$ una proiettività. Allora

$$\Omega(Z^\sigma(G)) = \Omega^\sigma(Z(G)) \triangleleft \bar{G}.$$

Assegnata una proiettività $\sigma: G \rightarrow \bar{G}$ tra due gruppi localmente finiti, possiamo scrivere [7]:

$$\sigma: G = P_1 \times P_2 \times \dots \times H \rightarrow \bar{G} = P_1^\sigma \times P_2^\sigma \times \dots \times H^\sigma,$$

con P_i, P_i^σ, P -gruppi di Hall, H, H^σ sottogruppi di Hall non S -gruppi; inoltre H contiene un sottogruppo normale di Hall K tale che K^σ è normale e di Hall in \bar{G} , σ conserva gli ordini su $K, H/K$ e H^σ/K^σ sono prodotti diretti di sottogruppi di Hall che sono P -gruppi o gruppi localmente ciclici.

Nel trattare proiettività di gruppi iperciclici periodici, conserveremo ai simboli il significato loro or ora attribuito.

3. Sia G un gruppo periodico iperciclico e $\sigma: G \rightarrow \bar{G}$ una proiettività. Se $K \neq \{1\}$, allora esiste un $N \triangleleft G, N \leq K, N$ d'ordine primo e tale che $N^\sigma \triangleleft \bar{G}$.

DIM. a) Sia $\omega(K)^{(2)} = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ finito con $p_1 < p_2 < \dots < p_n = p$. Se $P \in \text{Syl}_p(G)$ è $P \triangleleft G$ ed esiste un $N \triangleleft G$ con $|N| = p$ [1]. Risulta $(O^p(G))^\sigma = O^p(\bar{G}), P^\sigma \triangleleft P^\sigma O^p(\bar{G}) = \bar{G}$ e $N^\sigma < \bar{G}$. Sia $N^\sigma \triangleleft \bar{G}$; \bar{G} è localmente finito per cui N^σ è centralizzato da $O^p(\bar{G})$ [3], per cui $S^\sigma = (N^\sigma)^{\bar{G}} = (N^\sigma)^{P^\sigma}$ e per 1. sarà $S^\sigma = N^\sigma \times S \wedge \Omega(Z(P^\sigma))$ con $S^\sigma \wedge \Omega(Z(P^\sigma)) \leq Z(\bar{G})$, mentre da $N \leq \Omega(Z(P))$ e $\Omega^\sigma(Z(P)) \triangleleft P^\sigma$ per 2., si desume $S \leq \Omega(Z(P))$. Se ora $R^\sigma \leq S^\sigma \wedge \Omega(Z(P^\sigma))$, con $|R^\sigma| = p$, risulta $R^\sigma \leq Z(\bar{G})$, essendo S^σ centralizzato da $O^p(\bar{G})$ ed $R \leq Z(G)$ essendo $R \leq Z(P)$ e centralizzato da $O^p(G)$; in definitiva $R \triangleleft G, R^\sigma \triangleleft \bar{G}$.

b) $\omega(K)$ è insieme infinito.

Scegliamo un $N \triangleleft G, N \leq K$ ed N d'ordine primo, diciamolo, p [1]. Ancora per [1] l'insieme $K_{(p)}$, degli elementi di K con ordini divisibili solo per primi maggiori di p insieme ad 1 è un sottogruppo normale di G , per cui sarà $K_{(p)}^\sigma \triangleleft \bar{G}$; in particolare $N \times K_{(p)}, N^\sigma \times K_{(p)}^\sigma$.

(²) $\omega(K)$ è l'insieme dei numeri primi coinvolti nei periodi degli elementi di K .

Sarà $N^\sigma \triangleleft_q \bar{G}$, ma supponiamo $N^\sigma \not\triangleleft \bar{G}$. Posto $T^\sigma = (N^\sigma)^\sigma$, risulta

$$S^\sigma = (N^\sigma \times K_{(p)}^\sigma)^\sigma = T^\sigma \times K_{(p)}^\sigma \quad \text{e così pure} \quad S = T \times K_{(p)}.$$

Applicando a) alla proiettività $\sigma: G/K_{(p)} \rightarrow \bar{G}/K_{(p)}^\sigma$, si conclude che esiste un $R/K_{(p)} \triangleleft S/K_{(p)}$ con $|R/K_{(p)}| = |R^\sigma/K_{(p)}^\sigma| = p$ ed $R/K_{(p)} \triangleleft G/K_{(p)}$, $R^\sigma/K_{(p)}^\sigma \triangleleft \bar{G}/K_{(p)}^\sigma$; ora è $R = \langle t \rangle \times K_{(p)}$, $R^\sigma = \langle t \rangle^\sigma \times K_{(p)}^\sigma$ e si conclude che $\langle t \rangle \triangleleft G$, $\langle t \rangle^\sigma \triangleleft \bar{G}$, $|\langle t \rangle| = |\langle t \rangle^\sigma| = p$. \parallel

4. PROPOSIZIONE. *Sia G un gruppo periodico iperciclico e $\sigma: G \rightarrow \bar{G}$ una proiettività. Allora \bar{G} è iperciclico.*

DM. \bar{G} sarà iperciclico se (e solo se) da $N^\sigma \triangleleft H^\sigma$ ed $N^\sigma \triangleleft_q K^\sigma$ segue che in H^σ/N^σ esiste un sottogruppo normale ciclico non identico.

a) $N \triangleleft H$.

σ induce una proiettività da G/N su \bar{G}/N^σ , e la conclusione si raggiunge usando 3.

b) $N \not\triangleleft H$.

Sarà comunque $N \triangleleft_q H$; consideriamo in H una serie invariante ascendente completa $\{C_\alpha\}_{\alpha \leq \gamma}$ passante per K , con $C_0 = \{1\}$, $C_\gamma = H$ e poniamo $\Sigma = \{\alpha \leq \gamma \mid C_\alpha \not\triangleleft N\}$. È $\gamma \in \Sigma$ e sia $\beta = \min \Sigma$; sarà $\beta > 0$ e non è un ordinale limite. Quindi $C_{\beta-1} \triangleleft N$, $C_\beta \not\triangleleft N$ e $C_\beta/C_{\beta-1}$ è d'ordine primo. Ora $N \triangleleft C_\beta \vee N = T \triangleleft_q H$, $T \triangleleft K$ ed N è massimo in T ; ne segue che T^σ/N^σ è un sottogruppo quasinormale d'ordine primo di H^σ/N^σ ; ma allora usando 1. si conclude. \parallel

Passiamo ora allo studio di una proiettività di un gruppo iperciclico G contenente elementi aperiodici.

Per [1] risulta $G_{(2)} \triangleleft G$ per cui G è generabile mediante elementi aperiodici ed elementi i cui ordini sono potenze di 2. Se allora $\sigma: G \rightarrow \bar{G}$ è una proiettività, da $N \triangleleft G$, $|N| = p > 2$ segue $N^\sigma \triangleleft \bar{G}$ per cui una serie ascendente invariante completa di G che va da $\{1\}$ a $G_{(2)}$, mediante σ , si muta in una serie analoga di \bar{G} ; in particolare $G_{(2)}^\sigma \triangleleft \bar{G}$. Ai fini di provare la iperciclicità di \bar{G} possiamo dunque supporre nel seguito $G_{(2)} = \{1\}$.

Sia ora $N \triangleleft G$ ed $|N| = 2$; allora $\Omega(Z(G))$ è un 2-gruppo abeliano elementare non identico. Risulta $\Omega^\sigma(Z(G)) \triangleleft \bar{G}$: la cosa è chiara se

da $N \triangleleft_q H$ ed $|N| = 2$ segue $N \triangleleft G$ in quanto allora $\Omega(Z(G))$ è L -invariante; altrimenti esiste un $N \triangleleft_q G$, $|N| = 2$ ed $N \not\triangleleft G$. Considerato un $x \in G \setminus C(N)$, per l'osservazione dopo 1., è $\langle x \rangle \wedge \Omega(Z(G)) \neq \{1\}$, così x è periodico e dunque un 2-elemento essendo $G_{(2)} = \{1\}$. Ne segue che $\Omega(Z(G)) = \Omega(\Omega(Z(G)) \vee \langle x \rangle)$, per cui $\langle x \rangle^\sigma \leq \mathcal{N}(\Omega^\sigma(Z(G)))$; ma $G = \langle G \setminus C(N) \rangle$ e dunque $\Omega^\sigma(Z(G)) \triangleleft \bar{G}$. Sia $N \triangleleft G$, $|N| = 2$ ed $N^\sigma \not\triangleleft \bar{G}$; sarà $N^\sigma \triangleleft \bar{G}$ ed $|N^\sigma| = 2$ e di nuovo, per l'osservazione, $S^\sigma = (N^\sigma)^{\bar{\sigma}} = N^\sigma \times S^\sigma \wedge \Omega(Z(\bar{G})) \leq \Omega^\sigma(Z(G))$, per cui scelto un sottogruppo R^σ d'ordine 2 di $S^\sigma \wedge \Omega(Z(\bar{G}))$ sarà $R \leq \Omega(Z(G))$ per cui $R \triangleleft G$, $R^\sigma \triangleleft \bar{G}$.

5. Sia G un gruppo iperciclico contenente elementi aperiodici. Se $\sigma: G \rightarrow \bar{G}$ è una proiettività allora esiste un $N \triangleleft G$, N ciclico non identico e tale che $N^\sigma \triangleleft \bar{G}$; N si può scegliere ciclico finito non appena G contiene un tale gruppo normalmente.

DIM. Per quanto sopra detto possiamo supporre G privo di sottogruppi normali periodici. In virtù di [1], $G_{(3)}$ risulta uno ZA -gruppo senza torsione, per cui σ muta la sua serie centrale ascendente in quella di $G_{(3)}^\sigma$, mentre $G/G_{(3)}$ è un 2-gruppo abeliano elementare. Possiamo così supporre $G_{(3)} \neq G$ e sia $N \triangleleft G$, $N \leq G_{(3)}$ ed N ciclico infinito. Scelto un $a \in G/G_{(3)}$, poichè $a^2 \in G_{(3)}$ sarà $a^2 = 1$ oppure a^2 aperiodico. Nel primo caso è $\langle a, N \rangle$ diedrale o abeliano per cui comunque è $N^\sigma \triangleleft \langle a, N \rangle^\sigma$. Nel secondo caso, se $\langle a, N \rangle$ è abeliano si conclude di nuovo che è $N^\sigma \triangleleft \langle N, a \rangle^\sigma$, mentre altrimenti sarà $\langle a \rangle \wedge N = \{1\}$ e dunque ancora $N^\sigma \triangleleft \langle a, N \rangle^\sigma$ ([6], Th. 2.1). In conclusione è $N^\sigma \triangleleft \bar{G}$. ||

Sia, di nuovo, $\sigma: G \rightarrow \bar{G}$ una proiettività con G gruppo iperciclico misto; al fine di provare la iperciclicità di \bar{G} , per quanto visto, non sarà restrittivo supporre $G_{(2)} = \{1\}$.

Detto $P(G)$ il massimo sottogruppo normale periodico di G , sarà $P(G)$ un 2-gruppo e tale sarà pure $P^\sigma(G) = P(\bar{G})$ [3]. Sia $N^\sigma \triangleleft \bar{G}$ e $N^\sigma \leq P(\bar{G})$; se $N \triangleleft G$, da $\sigma: G/N \rightarrow \bar{G}/N^\sigma$ si desume, usando 5., che \bar{G}/N^σ contiene un sottogruppo normale ciclico non identico. Se $N \not\triangleleft G$, sarà comunque $N \triangleleft_q G$ per [6], Th. E. Come in 4. si vede che esiste un $C \triangleleft G$; $C \leq P(G)$ e tale che posto $H = NC$ risulti H^σ/N^σ un gruppo quasinormale d'ordine 2 di \bar{G}/N^σ ; tenuta presente l'osservazione dopo 1. si conclude che \bar{G}/N^σ contiene un sottogruppo normale ciclico non identico. $P(\bar{G})$ è dunque iperciclicamente immerso in \bar{G} , per cui possiamo d'ora in poi assumere $P(G) = \{1\}$, $P(\bar{G}) = \{1\}$. $G_{(3)}$ risulta allora uno

ZA-gruppo senza torsione [1], mentre $G/G_{(3)^*}$ è un 2-gruppo abeliano elementare; ne segue che gli eventuali elementi periodici di G diversi da 1 sono involuzioni.

Consideriamo ora una serie ascendente invariante a fattori ciclici di G da $\{1\}$ a $G_{(3)^*}$, passante per la serie centrale ascendente dello ZA-gruppo $G_{(3)^*}$: $\{C_\alpha\}_{\alpha \leq \gamma}$ ove $C_0 = \{1\}$, $C_\gamma = G_{(3)^*}$; sarà $C_\alpha \triangleleft G$, $C_{\alpha+1}/C_\alpha$ ciclico e $C_\alpha = \bigvee_{\beta < \alpha} C_\beta$, se α è ordinale limite. Fissato un $\alpha \leq \gamma$, consideriamo in $G_{(3)^*}$ l'isolatore $I(C_\alpha)$ ([2], vol. II); poichè $G_{(3)^*}$ è un gruppo localmente nilpotente senza torsione, risulta $I(C_\alpha)/C_\alpha = P(G_{(3)^*}/C_\alpha)$ e come tale è $I(C_\alpha) \triangleleft G$; non è difficile constatare che $\{I(C_\alpha)\}_{\alpha \leq \gamma}$ è una serie invariante ascendente di G di sottogruppi isolati in $G_{(3)^*}$ e se $I(C_{\alpha+1})/I(C_\alpha)$ non è identico è abeliano senza torsione e di rango 1. Riassumiamo quanto ora detto in un

LEMMA. *Sia G un gruppo iperciclico privo di sottogruppi normali periodici. Allora esiste una serie invariante ascendente $\{A_\alpha\}_{\alpha \leq \delta}$ di G da $\{1\}$ a $G_{(3)^*}$, passante per la serie centrale ascendente di $G_{(3)^*}$, i cui fattori sono abeliani senza torsione di rango 1.*

6. PROPOSIZIONE. *Sia G un gruppo iperciclico con elementi aperiodici e $\sigma: G \rightarrow \bar{G}$ una proiettività. Allora \bar{G} è iperciclico.*

DIM. Abbiamo visto che $P(\bar{G})$ è iperciclicamente immerso in \bar{G} per cui non sarà restrittivo supporre $P(G) = \{1\}$. Consideriamo in G la serie ascendente invariante $\{A_\alpha\}$ da $\{1\}$ a $G_{(3)^*}$ quale descritta nel lemma e proviamo che $A_\alpha^\sigma \triangleleft \bar{G}$.

La cosa è banalmente vera per $A_0 = \{1\}$; dato allora $\alpha \leq \gamma$, sia $A_\beta \triangleleft G$ per ogni $\beta < \alpha$. Se α è un ordinale limite, da $A_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} A_\beta$ segue $A_\alpha^\sigma = \bigcup_{\beta < \alpha} A_\beta^\sigma \triangleleft \bar{G}$. Se invece α ha precedente $\alpha - 1$, sarà $\sigma: G/A_{\alpha-1} \rightarrow \bar{G}/A_{\alpha-1}^\sigma$ per cui non è restrittivo supporre $\alpha = 1$. Visto che $Z^\sigma(G_{(3)^*}) = Z(G_{(3)^*}^\sigma)$ ed $A_1 \triangleleft Z(G_{(3)^*})$, sarà $A_1^\sigma \triangleleft Z(G_{(3)^*}^\sigma)$.

Sia $a \in G \setminus G_{(3)^*}$; poichè dovrà essere $a^2 \in G_{(3)^*}$, si presentano le seguenti due possibilità

a) $a^2 \in A_1$.

Se il gruppo $H_a = \langle a, A_1 \rangle$ è abeliano tale sarà $\langle a, A_1 \rangle^\sigma$ per cui $\mathcal{N}(A_1^\sigma) \geq \langle a \rangle^\sigma$; se invece H_a non è abeliano, A_1 è $\mathfrak{L}(H_a)$ -invariante [9] per cui ancora $\mathcal{N}(A_1^\sigma) \geq \langle a \rangle^\sigma$.

b) $a^3 \notin A_1$.

Allora a ha periodo infinito ed $\langle a \rangle \wedge A_1 = \{1\}$; ma allora di nuovo $\mathcal{N}(A_1^\sigma) \geq \langle a \rangle^\sigma$ [5]. In conclusione $A_\alpha^\sigma \triangleleft G$ per $\alpha < \gamma$, in particolare $G_{(3)}^\sigma \triangleleft \bar{G}$.

Poichè $\bar{G}/G_{(3)}^\sigma$ è un p -gruppo abeliano elementare, gli automorfismi indotti da \bar{G} in $A_{\alpha+1}^\sigma/A_\alpha^\sigma$ sono 1 oppure -1 e dunque la serie $\{A_\alpha^\sigma\}_{\alpha \leq \gamma}$ si raffina in una serie invariante ascendente a fattori ciclici, per cui \bar{G} è iperciclico. \parallel

TEOREMA. *Sia $\sigma: G \rightarrow \bar{G}$ una proiettività; allora \bar{G} è iperciclico se e solo se tale è G .*

DIM. Conseguo facilmente dalle proposizioni 4 e 6.

COROLLARIO. *Sia $\sigma: G \rightarrow \bar{G}$ una proiettività; allora \bar{G} è supersolubile se e solo se tale è G .*

BIBLIOGRAFIA

- [1] R. BAER, *Supersoluble groups*, Proc. Am. Math. Soc., **6** (1955), pp. 16-32.
- [2] A. G. KUROSH, *The theory of groups*, Chelsea Publ. Company, 1956.
- [3] R. MAIER - P. SCHMID, *The embedding of quasnormal subgroups in finite groups*, Math. Z., **131** (1973), pp. 269-278.
- [4] B. I. PLOTKIN, *Radical and semisimple groups*, Trudy Moskow Mat. Obsc., **6** (1957), pp. 299-337.
- [5] R. SCHMIDT, *Normal subgroups and lattice isomorphisms of finite groups*, Proc. London M. Soc., **30** (1975), pp. 287-300.
- [6] S. E. STONEHEWER, *Modular subgroup structure in infinite groups*, Proc. London M. Soc., **32** (1976), pp. 63-100.
- [7] M. SUZUKI, *On the lattice of subgroups of a finite groups*, Trans. Am. M. Soc., **70** (1951), pp. 372-386.
- [8] M. SUZUKI, *Structure of a group and the structure of its lattice of subgroups*, Ergebnisbericht, Springer-Verlag, 1967.
- [9] B. V. YAKOVLEV, *Lattice isomorphisms of solvable groups*, Algebra i Logika, **9** (1970), pp. 349-369.

Manoscritto pervenuto in redazione il 27 dicembre 1978.