

RENDICONTI  
*del*  
SEMINARIO MATEMATICO  
*della*  
UNIVERSITÀ DI PADOVA

GIUSEPPE GRIOLI

**Sui moti di precessione di un corpo rigido**

*Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova*,  
tome 59 (1978), p. 223-226

<[http://www.numdam.org/item?id=RSMUP\\_1978\\_\\_59\\_\\_223\\_0](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1978__59__223_0)>

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1978, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques*  
<http://www.numdam.org/>

## Sui moti di precessione di un corpo rigido.

GIUSEPPE GRIOLI (\*)

Il difficile problema della determinazione di soluzioni significative in Stereodinamica si giova a volte di opportune loro caratterizzazioni cinematiche. Con questo fine qui si stabilisce una espressione della velocità angolare caratteristica dei moti di precessione dipendente da due arbitrarie funzioni del tempo e da un vettore solidale al corpo, senza l'intervento di un vettore fisso dello spazio ambiente. Si evita in tal modo l'inconveniente che si presenta nella consueta caratterizzazione dei moti di precessione che dipende da un vettore fisso dello spazio, le cui componenti rispetto ad assi solidali sono delle funzioni incognite del tempo.

L'espressione stabilita per la velocità angolare, tra l'altro, permette di stabilire sotto quali condizioni sulle forze esterne ogni moto dinamicamente possibile è un moto di precessione; ciò può interessare, in particolare, il problema del giroscopio a reazione [1], [2].

\* \* \*

Da tempo ho dimostrato [3] che condizione necessaria e sufficiente affinché il moto di un corpo rigido intorno a un suo punto  $O$  sia un moto di precessione con asse di figura di versore  $\mathbf{u}$  è che la velocità angolare  $\boldsymbol{\omega}$ , soddisfi alla condizione

$$(1) \quad \dot{\boldsymbol{\omega}} \cdot \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega} - [\lambda |\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}| - \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{u}] (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u})^2 = 0 ,$$

(\*) Indirizzo dell'A.: Seminario Matematico, Università - Via Belzoni 7 - 35100 Padova.

ove il punto denota derivazione rispetto ad assi solidali e  $\lambda$  è una costante.

Vale la pena di osservare che la (1) permette di esprimere, in ogni moto non degenerare in un moto rotatorio, il vettore  $\dot{\boldsymbol{\omega}}$  mediante due scalari arbitrari,  $\alpha(t)$ ,  $\beta(t)$  e lo stesso  $\boldsymbol{\omega}$ .

Da (1) si deduce, infatti,

$$(2) \quad \dot{\boldsymbol{\omega}} = [\lambda|\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}| - \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{u}] \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega} + \alpha \mathbf{u} + \beta \boldsymbol{\omega}.$$

La condizione che la precessione sia regolare equivale alla duplice condizione  $\boldsymbol{\omega} \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}} = 0$ ,  $\dot{\boldsymbol{\omega}} \cdot \mathbf{u} = 0$ . Escludendo il caso dei moti rotatori, si deduce che condizione necessaria e sufficiente affinché le due condizioni di cui sopra siano soddisfatte è che risulti  $\alpha \equiv \beta \equiv 0$ .

Posto

$$(3) \quad \begin{cases} f(t) = b + \int_0^t [\alpha(\xi) \exp[-\int_0^\xi \beta(\tau) d\tau]] d\xi, \\ \eta(t) = \int_0^t \{[\lambda a - f(\xi)] \exp[\int_0^\xi \beta(\tau) d\tau]\} d\xi + c, \end{cases}$$

ove  $a, b, c$ , sono delle costanti arbitrarie e denotando con  $\mathbf{j}_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ), i versori degli assi solidali, si può accertare che la più generale soluzione di (2) è espressa dal vettore

$$(4) \quad \boldsymbol{\omega} = \exp\left[\int_0^\eta \beta(\tau) d\tau\right] \left\{ \frac{a}{\sqrt{1-u_3^2}} [\cos \eta \mathbf{u} \times \mathbf{j}_3 + \text{sen } \eta \mathbf{u} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{j}_3)] + f \mathbf{u} \right\}.$$

L'asse di precessione ha versore,  $\mathbf{c}$ , espresso da

$$(5) \quad \mathbf{c} = \frac{1}{\sqrt{(1+\lambda^2)(1-u_3^2)}} [\cos \eta \mathbf{u} \times \mathbf{j}_3 + \text{sen } \eta \mathbf{u} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{j}_3)] + \frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}} \mathbf{u},$$

mentre l'angolo (invariabile)  $\theta$ , tra  $\mathbf{c}$  ed  $\mathbf{u}$  è individuato dalla relazione

$$(6) \quad \cos \theta = \frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}}.$$

È quasi superfluo osservare che le (4), (5) mantengono la loro validità anche quando  $\mathbf{u}$  è parallelo a uno degli assi solidali di riferimento.

In base a (4), (5), ad  $\boldsymbol{\omega}$  si può dare l'espressione

$$(7) \quad \boldsymbol{\omega} = \exp \left[ \int_0^t \beta(\tau) d\tau \right] \{ a \sqrt{1 + \lambda^2} \mathbf{c} + (f - a\lambda) \mathbf{u} \},$$

ove sono messe in evidenza le velocità di precessione e di rotazione propria.

Sulla (7) si può stabilire la condizione affinché la precessione sia semiregolare, cioè sia costante una sola di tali due velocità.

Precisamente, condizione necessaria e sufficiente affinché sia costante la velocità di precessione è che sia  $\beta \equiv 0$ , nel qual caso si ha

$$(8) \quad \begin{cases} f(t) \equiv b + \int_0^t \alpha(\xi) d\xi, & [\alpha(\xi) \neq 0], \\ \eta(t) \equiv \int_0^t (\lambda a - f(\xi)) d\xi + c. \end{cases}$$

Invece, condizione necessaria e sufficiente affinché sia costante la velocità di rotazione propria è che risulti

$$(9) \quad \left( f - \frac{a\lambda}{\sqrt{1 + \lambda^2}} \right) \exp \left[ \int_0^t \beta(\tau) d\tau \right] \equiv \text{cost} \equiv \gamma.$$

La (9), in base a (3,1), equivale alla duplice condizione

$$(10) \quad b = \frac{a\lambda}{\sqrt{1 + \lambda^2}}, \quad \alpha(t) \equiv -\gamma\beta(t),$$

da cui segue (vedi anche (3,2))

$$(11) \quad \begin{cases} f(t) = \frac{a\lambda}{\sqrt{1 + \lambda^2}} + \gamma \exp \left[ - \int_0^t \beta(\tau) d\tau \right], \\ \eta(t) = -\gamma t + \frac{a\lambda}{\sqrt{1 + \lambda^2}} (\sqrt{1 - \lambda^2} - 1) \int_0^t \left[ \exp \left[ \int_0^\xi \beta(\tau) d\tau \right] \right] d\xi. \end{cases}$$

\* \* \*

La ricerca di moti di precessione dinamicamente possibili si può effettuare eliminando  $\dot{\omega}$  tra la (2) e le equazioni dinamiche. In particolare, le equazioni di Eulero, tenuto conto di (2), divengono

$$(12) \quad [\lambda|\omega \times u| - \omega \cdot u]\sigma(u \times \omega) + \alpha\sigma u + \beta\sigma\omega + \omega \times \sigma\omega = M,$$

ove con  $\sigma$  si denota l'operatore d'inerzia e con  $M$  il momento risultante delle forze esterne rispetto ad  $O$ .

L'esistenza di precessioni dinamicamente possibili è subordinata alla compatibilità delle (2), (12), tenuto conto delle altre equazioni che eventualmente il particolare problema che si considera richiede (ad es., nel caso del solido pesante, delle equazioni di Poisson, ecc.).

Particolarmente interessante si presenta il caso del solido autoeccitato (giroscopio a reazione) per il fatto che  $M$  dipende soltanto dalla velocità angolare (con direzione invariabile nel corpo). In generale, se  $M$  dipende soltanto da  $\omega$  la (12) fornisce l'espressione che deve avere il momento  $M$  affinché tutti i moti dinamicamente possibili siano moti di precessione.

#### BIBLIOGRAFIA

- [1] U. T. BODEWADT, *Der symmetrische Kreisel bei zeitfester Drehkraft*, Math. Z., **55** (1952), pp. 310-320.
- [2] R. GRAMMEL, *Die stationären Bewegungen des selbsterregten Kreisels und ihre Stabilität*, Ing.-Arch., **21** (1953), pp. 149-156.
- [3] G. GRIOLI, *Qualche teorema di cinematica dei moti rigidi*, Rend. Acc. Naz. dei Lincei, Ser. VIII, **34**, fasc. 6 (1963).

Manoscritto pervenuto in redazione il 15 novembre 1978.