Rendiconti
del
Seminario Matematico
della
Università di Padova

Edmondo Morgantini

Su di un problema di Ph. Straffin

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 59 (1978), p. 1-10

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1978__59__1_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 59 (1978)

Su di un problema di Ph. Straffin.

EDMONDO MORGANTINI (*)

1. – Ph. Straffin ha proposto in « The Am. Math. Montly » (Vol. **84**, p. 216) il seguente problema (1):

E 2641 – *Dato un poligono convesso ed un suo punto interno P, sia d(P) la somma delle distanze di P dalle rette lati del poligono. Caratterizzare quei poligoni convessi per i quali d(P) rimane costante al variare di P.*

Nelle pagine seguenti si mostra che la caratterizzazione richiesta si può anche esprimere come la *esistenza di un poligono convesso equilatero con i lati ordinamente paralleli ai k lati del poligono dato.*

Quindi ad es. godono della proprietà di Straffin tutti i poligoni regolari. Solo per $k = 3$ (triangoli equilateri) e per $k = 4$ (parallelogrammi) vi è un solo tipo (metrico od affine) di soluzione.

La questione posta nel piano di Straffin e la sua risoluzione vettoriale si possono generalizzare ad uno spazio euclideo di dimensione > 2.

Nelle pagine seguenti (nn. 7-10) in particolare si prova che nello spazio ordinario gli unici tetraedri che godono della proprietà di Straffin sono quelli « *isosceli* ».

(*) Indirizzo dell'A.: Seminario Matematico, Università - Via Belzoni 3, 35100 Padova.

(1) Nel frattempo (a pag. 493 del Vol. **85** (1978) del « Monthly ») è stata pubblicata una soluzione (di F. B. Strauss) del problema, limitatamente alla nostra (2.2), cosicchè il contenuto e le conclusioni di questa Nota non perdono il loro interesse.

2. – Il problema di Straffin appare come un caso particolare del seguente:

Caratterizzare le m-ple $r_1, r_2, \dots, r_m$ di rette del piano e le orientazioni delle loro normali $n_1, n_2, \dots, n_m$, tali che sia costante al variare di P la somma:

$$d(P) = d_1 + d_2 + \dots + d_m \tag{2.1}$$

delle distanze con segno di $r_1, r_2, \dots, r_m$ di un punto P del piano.

Se ciò accade diremo che vale la « proprietà di Straffin ». È chiaro che se per più gruppi di rette vale la proprietà di Straffin, essa *vale anche per la loro riunione.*

Poichè si suppone fissata (arbitrariamente) l'unità di misura delle lunghezze, si potranno considerare i « *versori* » (vettori di lunghezza unitaria) $\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2, \dots, \boldsymbol{n}_m$ di quelle normali orientate.

Inoltre, sostituendo ad una della m rette date una sua parallela, si viene ad alterare la somma $d(P)$ solo per un addendo costante. Sicchè è lecito supporre che le m rette date r_i passino per uno stesso punto 0.

Allora la distanza d_i è data dal prodotto scalare:

$$d_i = (P - 0) \cdot \boldsymbol{n}_i\,, \qquad (i = 1, 2, \dots, m)\,,$$

e quindi:

$$d(P) = \sum_{i=1}^{m} (P - 0) \cdot \boldsymbol{n}_i = (P - 0) \cdot \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{n}_i$$

può rimanere costante solo a patto che sia $d(P) = 0$, e ciò accade *se e solo se è nullo il vettore*:

$$\boldsymbol{n}_1 + \boldsymbol{n}_2 + \dots + \boldsymbol{n}_m = \boldsymbol{0} \tag{2.2}$$

La (2.2) fornisce già la caratterizzazione richiesta

3. – Applichiamo gli m versori $\boldsymbol{n}_i$ al punto 0. Si può supporre di averli *ordinati circolarmente,* concordemente ad una orientazione del fascio di raggi di centro 0. Supponiamo anche che siano tutti *distinti,* e cioè che tra le rette r_i non ve ne siano 2 parallele con le normali orientate concordemente ([2]) (v. Fig. 3.1).

Diremo « *semplice* » una m-pla siffatta.

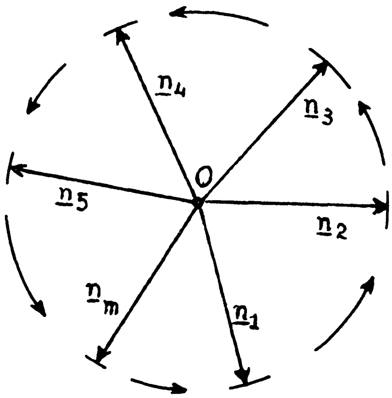

Figura 3.1

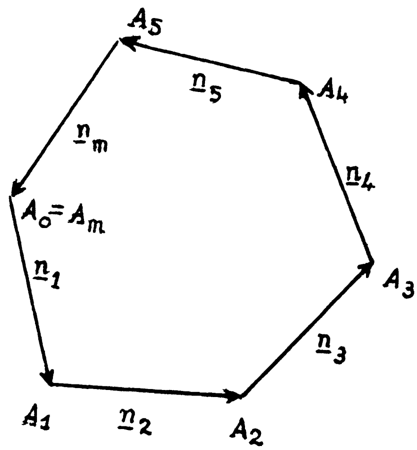

Figura 3.2

Fissato nel piano un punto A_0 (Fig. 3.2), sia:

$$(3.1)\qquad \begin{cases} A_1 = A_0 + \boldsymbol{n}_1\,, \\ A_2 = A_1 + \boldsymbol{n}_2 = A_0 + \boldsymbol{n}_1 + \boldsymbol{n}_2\,, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ A_m = A_{m-1} + \boldsymbol{n}_m = A_0 + (\boldsymbol{n}_1 + \boldsymbol{n}_2 + \dots + \boldsymbol{n}_m)\,. \end{cases}$$

Dire che sussiste la (2.2) equivale a supporre che sia:

$$(3.2)\qquad A_m = A_0\,.$$

La (3.2) significa che la « *spezzata equilatera* » $A_0A_1 \dots A_m$ è « chiusa ».

Si noti che l'ordinamento prescelto fa sì che la spezzata equilatera chiusa $A_0A_1 \dots A_m$ sia anche « *convessa* ». Infatti i 2 lati adiacenti ad

([2]) Questo è quanto accade ad es. quando le rette r_i sono i sostegni dei lati di un poligono convesso, e le loro normali sono orientate verso l'interno del poligono.

un lato qualsiasi stanno dalla stessa parte rispetto alla retta che lo sostiene (1).

Sicchè $A_1A_2 \dots A_m$ è un «*poligono equilatero convesso*».

Inoltre le m rette r_i sono parallele ai lati del poligono equilatero convesso $B_1B_2 \dots B_m$ che si ottiene facendo *ruotare* $A_1A_2 \dots A_m$ *di un angolo retto.*

Viceversa, se la m rette r_i sono parallele ai lati di un poligono equilatero convesso $B_1B_2 \dots B_m$ e le loro normali n_i sono orientate concordemente ai lati $A_{i-1}A_i$ del poligono che si ottiene facendo ruotare $B_1B_2 \dots B_m$ di un angolo retto, allora la somma delle distanze $d(P) = \sum_{i=1}^{m} d_i$ resta costante al variare del punto P. In particolare, $d(P) = 0$ se le m rette r_i passano tutte per uno stesso punto 0. Dunque:

Le m-ple semplici di rette $r_1, r_2, \dots, r_m$ del piano per le quali vale la proprietà di Straffin sono caratterizzate dall'essere parallele ai lati di un m-agono equilatero convesso $B_1B_2 \dots B_m$ e dall'essere le loro normali (parallele e) orientate concordemente ai lati $A_{i-1}A_i$ di un poligono $A_1A_2 \dots A_m$ che si ottenga da quello $B_1B_2 \dots B_m$ facendolo ruotare di un angolo retto.

Si è già osservato (n. 2) che la proprietà di Straffin vale anche per gruppi di rette composti con la *riunione* di più m-ple semplici.

4. – La caratterizzazione precedente vale anche per le m-ple (necessariamente semplici) delle rette r_i *lati* degli m-agoni convessi

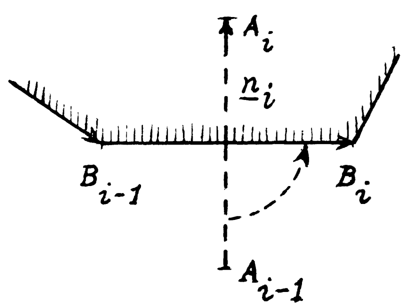

Figura 4.1

(1) Ciò perchè ognuno degli angoli $\widehat{n_i n_{i+1}}$ deve essere inferiore ad un angolo piatto. Altrimenti non potrebbe essere verificata la (2.2).

$C_1, C_2, \ldots, C_m$ considerati da Straffin e per la somma delle *distanze assolute* di un punto *interno* dai lati.

Per convincersene basta osservare che in tal caso le orientazioni delle normali ai lati si possono assegnare in modo che i punti interni abbiano *positiva* la distanza con segno di ciascun lato.

Conviene perciò riferirsi al poligono *equilatero* convesso ed orientato $B_1 \ldots B_m$ con i lati ordinatamente paralleli a quelli di $C_1 C_2 \ldots C_m$.

Si orienti il piano *concordemente* a $B_1 B_2 \ldots B_m$. Allora un osservatore in piedi sulla pagina positiva del piano lascia i punti interni del poligono alla sua sinistra, quando ne percorre il perimetro nel verso dell'orientazione $B_1 B_2 \ldots B_m$. Sicchè, se $A_1 A_2 \ldots A_m$ si ottiene da $B_1 B_2 \ldots B_m$ con una rotazione di un angolo retto *nel verso antiorario* (v. Fig. 4.1), allora la normale $\boldsymbol{n}_i$ al lato $B_{i-1} B_i$ è rivolta *verso l'interno* del poligono, e la distanza con segno di un punto interno P da quel lato è positiva, c.v.d.

5. – La (2.2) ha senso anche quando $m = 2$, ed allora esprime che la proprietà di Straffin vale per una *coppia di rette* se e solo se queste sono parallele e con le normali orientate in versi opposti ($\boldsymbol{n}_2 = -\boldsymbol{n}_1$). Del resto è ad es. banale che la somma delle distanze di un punto interno P dai lati di una striscia sia sempre uguale alla larghezza della striscia. E *la striscia è l'unica figura convessa di Straffin con* 2 *lati rettilinei.*

Per $m = 3$, la (2.2) si scrive:

$$\boldsymbol{n}_1 + \boldsymbol{n}_2 + \boldsymbol{n}_3 = \boldsymbol{0}\,,$$

ed esprime che $A_1 A_2 A_3$ è un *triangolo equilatero*. Dunque (n. 3) *i triangoli di Straffin sono* (*tutti e*) *solo quelli equilateri.*

Per $m = 4$, la (2.2) si scrive:

$$\boldsymbol{n}_1 + \boldsymbol{n}_2 + \boldsymbol{n}_3 + \boldsymbol{n}_4 = \boldsymbol{0}\,,$$

ed esprime che il quadrangolo $A_1 A_2 A_3 A_4$ è un *rombo*. Dunque *i quadrangoli convessi di Straffin sono* (*tutti e*) *solo i parallelogrammi.*

6. – Sfruttando il criterio enunciato sopra (n. 3), è facile:

1) *Controllare se la proprietà di Straffin sia verificata da un poligono dato.*

2) *Costruire tutti i poligoni* (*convessi o no*) *che godano della proprietà di Straffin.*

Così ad es. (v. Fig. 6.1) la proprietà di Straffin non è verificata per il pentagono 12345. Infatti la spezzata equilatera $1'2'3'4'5'6'$, con i lati paralleli a quelli della precedente, non si chiude: $6' \neq 1'$.

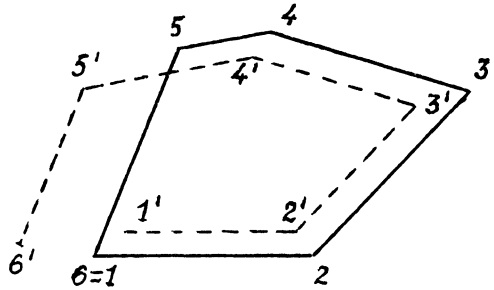

Figura 6.1

La Fig. 6.2. mostra come si possa costruire ogni poligono convesso con 6 lati di ugual lunghezza. Fissato ad es. il lato 12, si possono scegliere in ∞^1 modi i vertici 3, 4, 5 (compatibilmente con la convessità).

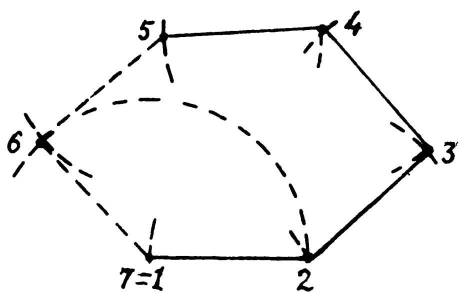

Figura 6.2

Infine il 6° vertice (ossia *gli ultimi due* lati 56 e 61) restano determinati dai precedenti, purchè sia soddisfatta una condizione qualitativa, derivante dalle diseguaglianze triangolari.

7. – È chiaro che la impostazione vettoriale usata nel precedente n. 2 e la conseguente condizione (2.2) non dipendono dalla dimensione dello spazio ambiente, cosicchè la (2.2) si può anche pensare come la *condizione necessaria e sufficiente affinchè sia costante* (in particolare nulla, se quegli m iperpiani passano tutti per uno stesso punto 0) *la somma* (2.1) *delle distanze con segno di un punto* P *mobile in un* S_r *euclideo da* m *iperpiani fissati, per i quali* $n_1, \dots, n_m$ *siano i versori delle normali orientate.*

In particolare, nello spazio ordinario, dopo i casi banali in cui $m = 2, 3$, il primo caso significativo si ha per $m = 4$, quando i 4 piani non sono paralleli ad una stessa retta. Nasce allora anche il problema di *caratterizzare i tetraedri per i quali è costante la somma delle distanze delle* 4 *facce di un punto interno variabile. V*edremo che essi sono solo quelli « *isosceli* ».

8. – La caratterizzazione delle quaterne di piani dell'S_3 suddette non può essere che una interpretazione della condizione:

$$\boldsymbol{n}_1 + \boldsymbol{n}_2 + \boldsymbol{n}_3 + \boldsymbol{n}_4 = \boldsymbol{0}\,. \tag{8.1}$$

La (8.1) non determina completamente (come nel piano) la forma della spezzata equilatera chiusa $A_1A_2A_3A_4$ che si ottiene applicando successivamente, a partire da un punto iniziale arbitrario A_1, i 4 vettori $\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2,, \boldsymbol{n}_3, \boldsymbol{n}_4$.

Infatti (v. Fig. 8.1), mentre le lunghezze dei 4 spigoli A_1A_2, A_2A_3,

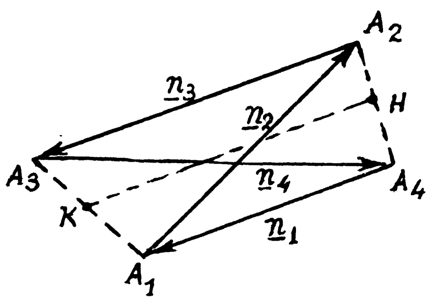

Figura 8.1

A_3A_4, A_4A_1 sono uguali (e unitarie), rimangono arbitrarie (anche se inferiori al doppio dell'unità di misura) le lunghezze dei 2 spigoli opposti A_2A_4, A_1A_3. Comunque si riconosce facilmente che questi 2 spigoli sono *ortogonali* fra loro (come nel caso piano) ed alla congiungente HK dei loro punti medi.

Sicchè (v. Fig. 8.1) sono ortogonali i 2 vettori:

$$\boldsymbol{n}_1 + \boldsymbol{n}_2 = -(\boldsymbol{n}_3 + \boldsymbol{n}_4) = \boldsymbol{v}_2 \,, \tag{8.2}$$

$$\boldsymbol{n}_2 + \boldsymbol{n}_3 = -(\boldsymbol{n}_4 + \boldsymbol{n}_1) = -\boldsymbol{v}_4 \,. \tag{8.3}$$

D'altra parte è lecito permutare comunque l'ordine degli addendi nella (8.1). Così, scambiando gli indici 3 e 4, si riconosce il vettore $\boldsymbol{v}_2$ è perpendicolare a quello:

$$\boldsymbol{n}_2 + \boldsymbol{n}_4 = -(\boldsymbol{n}_1 + \boldsymbol{n}_3) = -\boldsymbol{v}_3 \,, \tag{8.4}$$

e analogamente che $\boldsymbol{v}_3$ è perpendicolare a $\boldsymbol{v}_4$. Dunque ($\boldsymbol{v}_3$ è parallelo ad HK, e):

I 3 vettori v_2, v_3, v_4 sono a 2 a 2 ortogonali.

9. – Fissiamo nello spazio un punto O, applichiamo ad esso i 4 *versori* $\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2, \boldsymbol{n}_3, \boldsymbol{n}_4$ soddisfacenti alla (8.1) ed indichiamo con N_1, N_2, N_3, N_4 i loro estremi. Siano x, y, z le 3 rette, a 2 a 2 ortogonali, uscenti da O e parallele rispettivamente a $\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$. Le espressioni (8.2), (8.3), (8.4) di $\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_4, \boldsymbol{v}_3$ ci dicono che:

(9.1)
- tanto N_1 ed N_2 quanto N_4 ed N_3 sono ortogonalmente simmetrici rispetto ad x
- tanto N_1 ed N_4 quanto N_3 ed N_2 sono ortogonalmente simmetrici rispetto ad y
- tanto N_1 ed N_3 quanto N_2 ed N_4 sono ortogonalmente simmetrici rispetto ad z.

Sicchè la configurazione O, N_1, N_2, N_3, N_4 è mutata in sè da ciascuna delle 3 simmetrie ortogonali rispetto agli assi x, y, z. D'altra parte è noto che queste 3 simmetrie sono tali che una di esse coincide col prodotto delle altre due.

Dunque, delle relazioni di simmetria (9.1) solo 3 sono indipendenti, ad es. le 3 della 1ª colonna, in quanto le altre 3 sono loro conseguenza.

Viceversa, scelti ad arbitrio 2 punti distinti O ed N_1 dello spazio ed una terna di rette x, y, z a 2 a 2 ortogonali, uscenti da 0 e non passanti per N_1, siano N_2, N_3, N_4 i simmetrici di N_1 rispetto alle rette x, y, z.

Allora (v. Fig. 9.1) i 4 vettori:

$$\tag{9.2} \begin{cases} n_1 = N_1 - O\,, & n_2 = N_2 - O\,, \\ n_3 = N_3 - O\,, & n_4 = N_4 - O\,, \end{cases}$$

hanno lo stesso modulo e soddisfano alla (8.1).

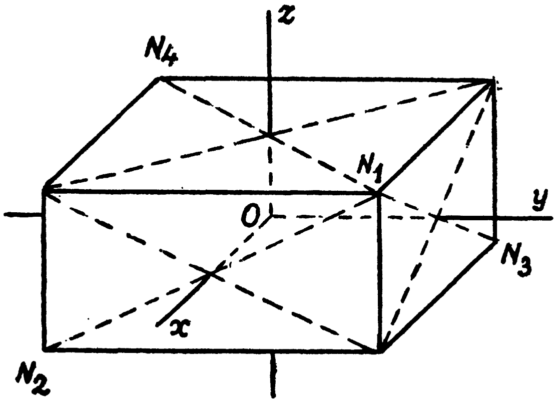

Figura 9.1

Ciò consente una diversa *caratterizzazione delle quaterne di piani dello spazio ordinario* (3) *per i quali vale la proprietà di Straffin*: sono tutte e solo le *quaterne di piani ortogonali alle* 4 *diagonali di un parallelepipedo rettangolo.* Per quanto riguarda le loro *normali,* se il parallelepipedo è quello della Fig. 9.1, la loro *orientazione è concorde* (o discorde) *con quella dei* 4 *vettori* (9.2).

10. – Da quanto precede si deducono tanto la *caratterizzazione* quanto la *costruzione* dei *tetraedri per i quali è costante la somma delle distanze dalle facce di un punto interno*: Uno qualsiasi di essi si può ottenere a partire da un arbitrario parallelepipedo rettangolo e da 4 dei suoi vertici N_1, N_2, N_3, N_4, a 2 a 2 non adiacenti. Allora le facce del tetraedro sono i piani passanti per N_1, N_2, N_3, N_4 e perpendicolari alle diagonali del parallelepipedo uscenti da quei 4 punti.

(3) Non paralleli ad una stessa retta. Del resto a questo caso si perviene anche come limite del precedente, quando il parallelepipedo si appiattisce.

È chiaro che la figura non cambia (a meno di una omotetia) se uno di quei piani si sostituisce con un piano parallelo.

D'altra parte si tenga presente che ciascuna delle 3 simmetrie (ortogonali) rispetto agli assi x, y, z trasforma in sé non solo la configurazione $ON_1N_2N_3N_4$ ma anche il nostro tetraedro, trasformando anzi uno nell'altro spigoli opposti (di 2 coppie, mentre trasforma ciascuno in sè gli spigoli opposti della 3ª coppia). Fra l'altro si riconosce così che spigoli opposti sono congruenti e che gli assi x, y, z sono quelli che sostengono i segmenti mediani.

Si tratta dunque dei ben noti *tetraedri « isosceli »* od *« equifacciali »* di J. Neuberg [4], aventi congruenti le 4 facce, i 4 triedri, le 4 altezze, per i quali la proprietà di Straffin era già nota a *C. F. A. Jacobi* (1834).

Si noti che un tetraedro siffatto resta determinato (a meno di una congruenza) quando se ne assegni (arbitrariamente) una faccia.

Dall'esame della Fig. 9.1 si riconosce che un tale tetraedro può essere *ortocentrico solo nel caso che sia regolare*, caso che si presenta solo quando il nostro parallelepipedo è un *cubo*.

[4] Vedi G. BIGGIOGGERO, *La geometria del tetraedro*, n. 30 (in « Enciclop. d. Matem. Elementari », Vol. II, P. I (Milano, Heopli, 1937)).

Manoscritto pervenuto in redazione il 1° Ottobre 1977.