RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

MAURIZIO EMALDI

Una caratterizzazione reticolare dei gruppi completamente fattorizzabili

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 59 (1978), p. 17-18
<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1978__59__17_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 59 (1979)

Una caratterizzazione reticolare dei gruppi completamente fattorizzabili.

MAURIZIO EMALDI (*)

Ricordiamo che un gruppo G si dice completamente fattorizzabile [1] se e solo se per ogni sottogruppo H di G esiste un sottogruppo K di G tale che $H \cap K = 1$ e $HK = G$; un gruppo G lo diremo poi supercomplementato se e solo se ogni sottogruppo H di G ha un supercomplemento in G nel senso che esiste un sottogruppo K di G tale che $H \cap K = 1$ e $\langle H, X \cap K \rangle = X$ per ogni sottogruppo X di G contenente H.

Come è facile vedere, la classe dei gruppi supercomplementati è chiusa rispetto alla formazione dei sottogruppi e dei gruppi fattoriali. Ora, poichè il reticolo dei sottogruppi di un gruppo ciclico è complementato se e solo se il gruppo è hölderiano cioè d'ordine finito non divisibile per quadrati di numeri primi, un gruppo supercomplementato dovrà avere i sottogruppi ciclici tutti hölderiani e i sottogruppi di Sylow dei suoi sottogruppi finiti dovranno essere abeliani elementari.

LEMMA. *I sottogruppi normali minimali e abeliani di un gruppo supercomplementato sono ciclici d'ordine primo.*

DIMOSTRAZIONE. Sia N un sottogruppo normale minimale e abeliano del gruppo supercomplementato G. Allora N è un gruppo primario abeliano elementare. Sia M un sottogruppo massimale di N e sia C un supercomplemento di M in G. Abbiamo $N = M \times (N \cap C)$

(*) Indirizzo dell'A.: Istituto di Algebra e Geometria, Seminario Matematico, Padova.

Lavoro eseguito nell'ambito dei gruppi matematici di ricerca del C.N.R.

con $N \cap C$ normale in $NC = G$. Perciò $N = N \cap C$, quindi $M = 1$ ed N risulta ciclico d'ordine primo.

Tenuto presente che un gruppo finito è risolubile se tutti i suoi sottogruppi propri sono supersolubili [3], dal lemma è facile dedurre, usando induzione, che è supersolubile un gruppo finito e supercomplementato. In particolare un gruppo finito e supercomplementato è metabeliano.

Diamo ora la seguente caratterizzazione reticolare dei gruppi completamente fattorizzabili:

TEOREMA. *Un gruppo è completamente fattorizzabile se e solo se è localmente finito e supercomplementato.*

DIMOSTRAZIONE. I gruppi completamente fattorizzabili sono localmente finiti [1] e, come è facile vedere, supercomplementati. Inversamente, supponiamo che G sia un gruppo localmente finito e supercomplementato. Allora G è metabeliano poichè tale è ogni suo sottogruppo finitamente generato. Allora ogni gruppo fattoriale non identico di G contiene un sottogruppo normale minimale [2]. Perciò, per il lemma, G risulta iperciclico e, quindi [2], completamente fattorizzabile.

BIBLIOGRAFIA

[1] S. N. CERNIKOV, *Groups with systems of complemented subgroups*, Mat. Sbornik, **35** (1954), pp. 93-128.

[2] M. EMALDI, *Sui gruppi risolubili complementati*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **42** (1969), pp. 123-128.

[3] B. HUPPERT, *Normalteiler und maximale Untergruppen endlicher*, Gruppen Math. Z., **60** (1954), pp. 409-434.

Manoscritto pervenuto in redazione il 18 febbraio 1978.