RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

CATERINA CUMINO

Sulla seminormalità delle superficie algebriche

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 58 (1977), p. 91-100

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1977__58__91_0>

Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, Vol. 58 (1977)

Sulla seminormalità delle superficie algebriche.

Caterina Cumino (*)

Summary: We give a characterization of seminormal surfaces in 4-space, in terms of their singularities. From this we deduce that, if char $\hat{k} = 0$, a generic projection in $\mathbf{P}^4(k)$ of a smooth projective surface is seminormal.

Introduzione.

In questa nota ci proponiamo di caratterizzare le superficie seminormali dello spazio a quattro dimensioni in termini di singolarità.

Il primo risultato a cui perveniamo (Teor. 1) asserisce che tali superficie possono avere solo: (1) curve al più triple e di tipo generale; (2) punti normali isolati; (3) punti singolari isolati in cui il cono tangente si spezza in due piani incontrantisi in un punto.

Da questo risultato si deduce (Teor. 2) che la proiezione generica in $\mathbf{P}^4(k)$ di una superficie non singolare è, se k ha caratteristica 0, una superficie seminormale.

La dimostrazione del Teor. 1 si fonda su un risultato di E. Davies per gli anelli seminormali di dimensione 1, (per quanto riguarda le curve multiple, cfr. Prop. 2), e su uno studio degli anelli locali, eccellenti, seminormali, di profondità 1, di dimensione 2 e dimensione di immersione non maggiore di 4, per i punti isolati non normali. Questo studio è riassunto nella Prop. 3 e si fonda essenzialmente sulla nozione di incollamento introdotta in [T],

---

(*) Indirizzo dell'A: Istituto Matematico del Politecnico, Torino.
Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.S.A.G.A. del C.N.R.
Durante lo svolgimento del presente lavoro l'A. ha usufruito di un assegno M.P.I.

(cfr. Prop. 1), e ci permette, tra l'altro, di dare delle equazioni analitiche esplicite per tali singolarità.

Notiamo infine che risultati analoghi per le curve e per le ipersuperficie sono già noti, mentre nulla si sa ancora per le superficie di spazi di dimensione maggiore di 4, o per varietà algebriche di dimensione superiore. Per maggiori dettagli si veda il paragrafo 1.

1. – In questo paragrafo ricordiamo esplicitamente alcuni fatti preliminari ed enunciamo i risultati principali del lavoro.

Tutti gli anelli che consideriamo sono noetheriani, commutativi e dotati di identità.

DEFINIZIONE 1. Sia A un anello, B un sopraanello di A, intero su A. Diciamo *seminormalizzazione di* A *in* B l'anello:

$$ {}_B^{+}A = \{ b \in B \mid \forall\ x \in \operatorname{spec}(A)\,,\ b_x \in A_x + \operatorname{Rad}(B_x) \} $$

(dove $\operatorname{Rad}(B_x)$ è l'intersezione di tutti gli ideali massimali di B_x). Se $A = {}_B^{+}A$, allora A è detto *seminormale* (abbreviato: SN) *in* B. Se B è la normalizzazione di A (cioè la chiusura di A nel suo anello totale delle frazioni) si pone ${}^{+}A = {}_B^{+}A$ e se $A = {}^{+}A$, A è detto SN.

DEFINIZIONE 2. Sia A un anello, B un sopraanello di A, finito su A (cioè intero e di tipo finito), sia $x \in \operatorname{spec}(A)$, $x_1, \dots, x_n$ i punti di $\operatorname{spec}(B)$ sopra x e $\omega_i : k(x) \to k(x_i)$ gli omomorfismi canonici. Sia A' il sottoanello di B contenente A che consiste di tutti i $b \in B$ tali che per ogni i, $b(x_i) \in \omega_i k(x)$ e per ogni i, $j, \omega_i^{-1}(b(x_i)) = \omega_j^{-1}(b(x_j))$; si dice che A' *si ottiene da* B *per incollamento sopra il punto* x *di* $\operatorname{spec}(A)$.

Vale il seguente risultato (cfr. [T], Teor. 2.1):

PROPOSIZIONE 1. *Sia* A *un anello ridotto avente normalizzazione* $\bar{A}$ *finita.* A *è* SN *se e solo se esiste una successione* $\bar{A} = A(0) \supseteq \supseteq A(1) \supseteq \dots \supseteq A(n) = A$; *dove* $A(i+1)$ *è ottenuto da* $A(i)$ *con un numero finito di incollamenti sopra ideali primi di altezza* $i+1$.

Useremo inoltre le definizioni seguenti:

DEFINIZIONE 3. Sia C una curva irriducibile di una superficie V e sia x il suo punto generico (nel senso degli schemi). Sia $A = \boldsymbol{O}_x$, allora:

1) la molteplicità di C (o di x) è la molteplicità dell'anello locale A ;

2) diciamo che C è *di tipo generale* se la dimensione di immersione di A coincide con la sua molteplicità e il cono tangente spec $\big(gr(A)\big)$ nel punto generico è ridotto.

Osservazione 1. In particolare se C contiene un punto semplice di V, allora C è di tipo generale (di molteplicità 1).

Osservazione 2. Supponiamo che il corpo base k abbia caratteristica 0, allora la Def. 3 vuol dire che il cono tangente nel punto generico x di C, pensato nella chiusura algebrica di $k(x)$, si spezza in rette distinte il cui numero è uguale alla molteplicità di C, (cfr. [*D*], caso (*b*), del Cor. 1, Teor. 1).

Queste considerazioni fanno pensare che la Def. 3 equivalga a dire che esiste un aperto non vuoto $U \subseteq C$ tale che per ogni punto chiuso $y \in U$ il cono tangente a V in y si spezzi in piani distinti il cui numero è eguale alla molteplicità di C e che inoltre questi piani siano disposti in posizione « sufficientemente generica ». Torneremo su questo argomento in un successivo lavoro.

Definizione 4. Sia $(V, \boldsymbol{O}_V)$ una varietà algebrica ; diciamo che è SN se $\boldsymbol{O}_x$ è SN per ogni x di V.

Per gli altri concetti e notazioni usati nel seguito, rimandiamo a [*M*] e [*ZS*].

Nel presente lavoro ci proponiamo di studiare le singolarità delle superficie SN, dimostrando tra l'altro, i seguenti risultati:

Teorema 1. *Sia k un corpo algebricamente chiuso, V una superficie di $\mathbf{A}^4(k)$, $\big($o $\mathbf{P}^4(k)\big)$. Allora V è SN se e solo se le sue singolarità sono :*

(a) *curve di tipo generale e al più triple* ;

(b) *punti doppi isolati dove il cono tangente si spezza in due piani che si incontrano in un punto* ;

(c) *punti normali* (*isolati*).

Se inoltre k ha caratteristica O:

TEOREMA 2. *La proiezione generica in* $\mathbf{P}^4(k)$ *di una superficie non singolare è una superficie* SN, *le cui singolarità si ottengono con un incollamento.*

OSSERVAZIONE 1. Per varietà SN generiche non sono noti risultati completi, salvo che in dimensione 1. (Infatti in [D] e in [Bo] si trova una caratterizzazione degli anelli locali SN di dimensione 1).

Qualche informazione sulle superficie SN di $\mathbf{P}^3(k)$ (k algebricamente chiuso e di caratteristica O) si può trarre dal:

TEOREMA: una ipersuperficie è SN se e solo se le sue sottovarietà singolari di codimensione 1 sono biiperplanari. (cfr. [GT], 9.1). Ossia: una superficie di $\mathbf{P}^3(k)$ è SN se e solo se contiene soltanto singolarità isolate o curve doppie biplanari; (cfr. [C]).

OSSERVAZIONE 2. Per le proiezioni generiche di varietà proiettive non singolari su un corpo k algebricamente chiuso e di caratteristica O, è noto il seguente fatto:

TEOREMA: una ipersuperficie complessa, proiezione generica di una varietà non singolare, è SN; (cfr. [GT] e [Bo] per le superficie).

Per curve (cfr. [Bo]) e superficie complesse (cfr. Teor. 2) non singolari, la proiezione generica è SN; invece in generale non si sa.

OSSERVAZIONE 3. Il Teor. 2 asserisce che una superficie di $\mathbf{P}^4(k)$ che sia una proiezione generica di una superficie di $\mathbf{P}^5(k)$ non singolare si ottiene da questa per incollamento. Un simile risultato vale per le curve. Non è noto se ciò sia vero in generale.

2. – In questo paragrafo studiamo le curve irriducibili di una superficie di $\mathbf{A}^n(k)$ e ne diamo una caratterizzazione applicando un risultato di E. Davies (cfr. [D], Teor. 1) sugli anelli SN di dimensione 1.

PROPOSIZIONE 2. *Sia* V *una superficie ridotta di* $\mathbf{A}^n(k)$, *(*k *anche non algebricamente chiuso). Sia* C *una curva irriducibile di* V; *se* V *è* SN, C *è una curva di tipo generale avente molteplicità al più* $n-1$.

Dimostrazione. Sia A l'anello delle coordinate di V; poniamo $B = k[X_1, \dots, X_n]$, allora risulta $A = B/I$, con I ideale di B; e, per ogni ideale primo $\mathfrak{p}$ di A, $\mathfrak{p} = \mathfrak{P}/I$, dove $\mathfrak{P}$ è un ideale primo di B che contiene I. Come è noto la dimensione di immersione di un anello locale è il minimo numero di generatori del suo ideale massimale; si ha quindi, se $\mathfrak{p}$ è un ideale primo di altezza 1, $\dim(A_\mathfrak{p}) = 1$ e $\dim(B_\mathfrak{P}) = \mathrm{ht}(\mathfrak{P}) = n - 1$; da cui, essendo B regolare:

$$1 \leq \mathrm{endim}(A_\mathfrak{p}) \leq n - 1 .$$

Inoltre $A_\mathfrak{p}$ è SN (cfr. [T] Cor. 2.2); d'altra parte $A_\mathfrak{p}$ è SN (cfr. [D] Teor. 1) se e solo se $gr(A_\mathfrak{p})$ è ridotto e $e(A_\mathfrak{p}) = \mathrm{emdim}(A_\mathfrak{p})$, dunque:

$$1 \leq e(A_\mathfrak{p}) \leq n - 1$$

ossia quanto si voleva, tenendo conto della Def. 3.

Esempio. Per ogni n esiste una superficie SN di $\mathbf{A}^n(k)$, avente una curva di tipo generale di molteplicità massima, ossia $n-1$. Ad esempio consideriamo la sottovarietà di $\mathbf{A}^{n-1}(k)$ costituita dagli assi coordinati, cioè la sottovarietà associata all'ideale $I = (\dots, X_iX_j, \dots)$, $(i \neq j)$. Sia A l'anello delle coordinate della sottovarietà, allora abbiamo:

$$A = k[X_1, \dots, X_{n-1}]/I = k[x_1, \dots, x_{n-1}]$$

e $\dim(A) = 1$. Sia poi $\mathfrak{m} = (x_1, \dots, x_{n-1})$ l'ideale massimale di A corrispondente all'origine; si ha:

$$\mathrm{emdim}(A_\mathfrak{m}) = e(A_\mathfrak{m}) = n - 1$$

ne segue, per [D], che la sottovarietà considerata è SN, essendo normali tutti gli altri suoi punti. Consideriamo ora l'anello dei polinomi nella indeterminata X_n:

$$A[X_n] = k[x_1, \dots, x_{n-1}]\,[X_n] = k[X_1, \dots, X_n]/J .$$

Abbiamo che $\dim(A[X_n]) = 2$ e inoltre, (cfr. [GT]5.1 e 5.2), $A[X_n]$ è SN. La superficie che ha $A[X_n]$ come anello delle coordinate possiede una curva di tipo generale e di molteplicità $n - 1$, cioè l'asse X_n.

3. – Per poter giungere alla dimostrazione dei teoremi enunciati nel paragrafo 1, prendiamo ora in esame alcune proprietà degli anelli locali; in particolare caratterizziamo gli anelli locali *SN* di punti di profondità 1 di una superficie di $\mathbf{A}^4(k)$.

LEMMA 1. *Sia A un anello locale con ideale massimale $\mathfrak{m}$ e corpo residuo k, B un sopraanello di A finito su A; siano $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_n$ gli ideali massimali di B. Se A è ottenuto incollando $m_1, \ldots, \mathfrak{m}_n$ sopra $\mathfrak{m}$, allora, posto $K_i = B/\mathfrak{m}_i$, si ha.*

$$\operatorname{emdim}(A) = \Sigma_i \operatorname{emdim}(B_{\mathfrak{m}_i})\,[K_i : k].$$

DIMOSTRAZIONE. Dall'ipotesi che A sia un incollamento segue subito che $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{m}_n$. D'altra parte, poichè B è finito su A, il corpo K_i è, per ogni i, una estensione di grado finito del corpo k; sia $[K_i : k]$ il grado di questa estensione e $\{a_{ij} | 1 \leq j \leq [K_i : k]\}$ una k-base per K_i. Consideriamo il k-spazio vettoriale $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$; si ha $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathfrak{m}_i/\mathfrak{m}_i^2$, dove $\mathfrak{m}_i/\mathfrak{m}_i^2$ è uno spazio vettoriale su K_i per ogni i. Sia poi $\{e_{is} | 1 \leq s \leq K_i\text{-}\dim(\mathfrak{m}_i/\mathfrak{m}_i^2)\}$ una K_i-base per $\mathfrak{m}_i/\mathfrak{m}_i^2$; allora $\{a_{ij}\, e_{is}\}$ è, per ogni i, una k-base per $\mathfrak{m}_i/\mathfrak{m}_i^2$. Siccome ogni elemento di questa base si può identificare con un elemento di $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$, l'insieme $\{a_{ij}\, e_{is}\}_{1 \leqslant i \leqslant n}$ può essere assunto come k-base per $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$. Segue allora che:

$$k - \dim(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) = \Sigma_i\, K_i - \dim(\mathfrak{m}_i/\mathfrak{m}_i^2)\,[K_i : k]$$

e quindi la tesi per definizione di dimensione di immersione.

COROLLARIO 1. *Sia A un anello locale quoziente di un anello regolare, di dimensione d, con ideale massimale m, corpo residuo k, normalizzazione $\bar{A}$ finita e regolare. Siano poi $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_n$ gli ideali massimali di $\bar{A}$. Se A è ottenuto incollando $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_n$ sopra $\mathfrak{m}$, allora, posto $K_i = \bar{A}/\mathfrak{m}_i$, si ha:*

(a) $$\operatorname{emdim}(A) = d\ \Sigma_i\, [K_i : k]$$

(b) $$e(A) = \Sigma_i\, [K_i : k]$$

DIMOSTRAZIONE. Risulta, per ogni i, $\dim(\bar{A}_{\mathfrak{m}_i}) = d$, (cfr. EGA, IV, parte 2ª, 5.4.3); essendo poi gli $\bar{A}_{\mathfrak{m}_i}$ regolari per ipotesi, posto

$B = \bar{A}$, la (a) segue subito dal Lemma 1 precedente. Siamo inoltre nelle ipotesi del Cor. 1 del Teor. 24, Vol. II, [ZS] e quindi:

$$e(A) = \Sigma_i \, e(\bar{A}_{\mathfrak{m}_i}) \; [K_i : k]$$

da cui, visto che per ogni i $e(\bar{A}_{\mathfrak{m}_i}) = 1$, segue immediatamente la (b).

COROLLARIO 2. *Con le notazioni del Lemma* 1 *sia* A *un anello locale ridotto, quoziente di un anello regolare. Supponiamo che* $\dim(A) = 2$ *e* $\operatorname{emdim}(A) \leq 4$, *allora se* A *si ottiene incollando* $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_n$ *su* $\mathfrak{m}$, *vale uno e uno solo dei seguenti casi*:

(a) $A = B$.

(b) B *è locale regolare con* $[K : k] = 2$ (*e quindi* $\operatorname{emdim}(A) = 4$).

(c) B *è regolare e ha due ideali massimali* $\mathfrak{m}_1$ *e* $\mathfrak{m}_2$ *con* $K_1 = K_2 = k$ (*e quindi* $\operatorname{emdim}(A) = 4$).

DIMOSTRAZIONE. Infatti si ha per ogni i, (cfr. EGA, IV, parte 2[a], 5.4.3), $\operatorname{emdim}(B_{\mathfrak{m}_i}) \geq \dim(B_{\mathfrak{m}_i}) = 2$; e per il Lemma 1 può verificarsi solo una delle seguenti possibilità:

(a) $n = 1$; $\operatorname{emdim}(B_{\mathfrak{m}_1}) = 2, 3, 4$; $K_1 = k$ e quindi $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_1$.

(b) $n = 1$; $\operatorname{emdim}(B_{\mathfrak{m}_1}) = 2$; $[K_1 : k] = 2$.

(c) $n = 2$; $\operatorname{emdim}(B_{\mathfrak{m}_1}) = \operatorname{emdim}(B_{\mathfrak{m}_2}) = 2$; $K_1 = K_2 = k$.

PROPRIETÀ 3. *Sia* A *un anello locale eccellente con ideale massimale* $\mathfrak{m}$ *e corpo residuo* k; *supponiamo che* $\dim(A) = 2$, $\operatorname{prof}(A) = 1$ *e* $\operatorname{emdim}(A) \leq 4$. *Sono equivalenti*:

1) A *è* SN;

2) A *è ottenuto da* $\bar{A}$ *per incollamento sul massimale* $\mathfrak{m}$;

3) $\mathfrak{m} = \operatorname{rad}(\bar{A})$ *e vale uno dei casi seguenti*:

   (a) $\bar{A}$ *è locale regolare e il corpo residuo è una estensione quadratica di* k;

   (b) $\bar{A}$ *è regolare con due ideali massimali e i corpi residui coincidono con* k;

4) $A = k[[X, Y, Z, T]]/(Z^2 + bXZ + cX^2, T^2 + bTY + cY^2, dXY\text{-}ZT, XT\text{-}YZ)$ *con* $b, c, d \in k$ *e* $(b^2 - ac) \neq 0$ *oppure* char $k = 2$, $b = 0$, c *non quadrato in* k;

5) $\mathrm{gr}(A)$ *è ridotto,* $e(A) = 2$, $\mathrm{emdim}(A) = 4$.

DIMOSTRAZIONE. (1) $\Rightarrow$ (2). Infatti A è SN se e solo se esiste una successione del tipo $\bar{A} = A(0) \supseteq A(1) \supseteq A(2) = A$, (cfr. Prop. 1); inoltre se $A = A(i)$, allora gli ideali primi di A di profondità 1 hanno altezza al più i (cfr. [T], Teor. 2.3), e quindi nel nostro caso deve essere $A = A(2)$. Abbiamo poi $A(1) = \bar{A}$; altrimenti $\mathfrak{m}$ conterrebbe ideali primi di altezza 1 sui quali c'è stato incollamento, ma allora avremmo per il Lemma 1:

$$\mathrm{emdim}(A) = \Sigma_i \ \mathrm{emdim}\big(A(1)_{\mathfrak{p}_i}\big)\ [K_i : k] \leq 4$$

(dove $\mathfrak{p}_i$ sono gli ideali massimali di $A(1)$ sopra $\mathfrak{m}$), e quindi, posto $B = A(1)$, per il Cor. 2 si avrebbe un assurdo. Ne segue che A si ottiene da $\bar{A}$ con un incollamento sopra $\mathfrak{m}$.

(2) $\Rightarrow$ (3). Per il Cor. 2 e per il fatto che non può essere $A = \bar{A}$, altrimenti (cfr. [M] cap. 6), non sarebbe $\mathrm{prof}(A) = 1$.

(3) $\Rightarrow$ (4). In queste ipotesi non è restrittivo supporre A completo, infatti, siccome $\mathfrak{m} \subseteq \mathrm{rad}(\bar{A})$, le proprietà ($a$) e ($b$) valgono per $\hat{\bar{A}}$ se e solo se valgono per $\bar{A}$ (cfr. [GS], Prop. 6.4 e Teor. 8.3); e $\hat{\bar{A}} = \bar{\hat{A}}$; allora, nell'ipotesi ($b$) $\bar{A} = k[[X, Y]] \oplus k[[Z, T]]$ e quindi

$$A = A + \mathrm{rad}(\bar{A}) = k[[X, Y, Z, T]]/(XZ, XT, YZ, YT);$$

nell'ipotesi (a), $\bar{A} = k(u)\,[[U, V]]$, dove u è un elemento algebrico di grado 2 su k; quindi $\mathrm{rad}(\bar{A}) = (U, V)\bar{A}$ e $A = A + \mathrm{rad}(\bar{A}) = k + (U, V)\bar{A}$. Sia $C = k[[U, V, uU, uV]]$; se $F \in A$, $F = f_0 + f_1 + \dots + f_i + \dots$, dove $f_0 \in k$ e per $i > 0$, f_i è un polinomio omogeneo di grado i di $k(u)[U, V]$; poichè F si può identificare con un elemento di C e viceversa, abbiamo $A = C$. Inoltre per le relazioni:

$$u^2 + bu + c = 0\,;\ u^2UV = (uU)\,(uV)\,;\ U(uV) = (uU)V,$$

si ha: $C = k[[X, Y, Z, T]]/(Z^2 + bXZ + cX^2,\ T^2 + bTY + cY^2,\ dXY - ZT,\ XT - YZ)$ con $b, c, d \in k$.

(4) $\Rightarrow$ (5). È noto che se $\mathfrak{m} = (m_1, \dots, m_q)$, posto $R = \mathrm{gr}(A)$, gli elementi $\bar{m}_i = m_i \bmod \mathfrak{m}^2$ generano l'ideale massimale omogeneo $\mathfrak{M}$ di R e che inoltre si ha:

$$\mathfrak{M}\, R_{\mathfrak{M}}/(\mathfrak{M}\, R_{\mathfrak{M}})^2 = \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2\,; \quad e\big(\mathrm{gr}(A)_{\mathfrak{M}}\big) = e(A)\,.$$

(5) $\Rightarrow$ (1). Siano ${}^+A$ la seminormalizzazione di A, $\mathfrak{m}'$ il suo ideale massimale. L'inclusione $\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{m}'$ ci permette di definire una applicazione di k-spazi vettoriali $f\colon \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \to \mathfrak{m}'/\mathfrak{m}'^2$ con $\operatorname{Ker} f = (\mathfrak{m}'^2 \cap \mathfrak{m})/\mathfrak{m}^2$. Per il lemma di Nakayama abbiamo che A è SN se e solo se f è un isomorfismo. Siccome poi $e(A) = e({}^+A)$, (cfr. [ZS], vol. II, Cor. 1 del Teor. 24, pag. 299) e $\dim(A) = 2$, si ha, per il Lemma 1, emdim $({}^+A) = 4$ e perciò dalle ipotesi segue che k-$\dim(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) = k$-$\dim(\mathfrak{m}'/\mathfrak{m}'^2)$. Supponiamo ora per assurdo che A non sia SN; allora deve essere $\mathfrak{m}'^2 \cap \mathfrak{m} \not\supseteq \mathfrak{m}^2$ e quindi esiste $x \in \mathfrak{m}$, $x \in \mathfrak{m}'^2$, con $x \notin \mathfrak{m}^2$. Allora $x^n \in \mathfrak{m}'^{2n}$, ma per n abbastanza grande $\mathfrak{m}'^n \subseteq \mathfrak{m}$, in quanto ${}^+A$ è un incollamento di $\bar{A}$ su $\mathfrak{m}$ e perciò $\mathfrak{m}'$ è il radicale del conduttore di A in $\bar{A}$. Per un tale n si ha $x^n \in \mathfrak{m}$, $x^n \in \mathfrak{m}^2$, ossia la forma iniziale di x in gr(A) è nilpotente, contro l'ipotesi che $\mathrm{gr}(A)$ sia ridotto.

Corollario 1. *Se x è un punto k-razionale di profondità 1 di una superficie ridotta di $\mathbf{A}^4(k)$, allora O_x è SN se e solo se x è un punto doppio in cui il cono tangente è spezzato in due piani distinti che si incontrano in un punto.*

Dimostrazione. Infatti posto $A = O_x$, se $\mathfrak{m}$ è l'ideale massimale di A, abbiamo $A/\mathfrak{m} = k$ ed emdim$(A) \leq 4$; allora siamo nel caso 4) della Prop. 3.

Corollario 2. *Sulle curve multiple di una superficie ridotta e SN di $\mathbf{A}^4(k)$ non esistono punti di profondità* 1.

Dimostrazione. Segue dal Teor. 2.3, [T].

Dimostriamo ora i teoremi enunciati nel paragrafo 1.

Dimostrazione del Teor. 1. È noto che un anello A è SN se e solo se lo sono gli anelli $A_{\mathfrak{p}}$, quando $\mathfrak{p}$ è un ideale primo di A di profondità 1 $\big([GT]$ Cor. 2.7$\big)$. La tesi del teorema segue quindi dal precedente Cor. 1 e dalla Prop. 2.

Dimostrazione del Teor. 2. Consideriamo una superficie V' non singolare di $\mathbf{P}^5(k)$, (k algebricamente chiuso e di caratteristica O). Si sa che, considerata la sua proiezione generica V in $\mathbf{P}^4(k)$, V' risulta essere la normalizzazione di V, ([*S*], cap. III). Se inoltre x è un punto singolare di V, allora x è un punto doppio isolato in cui il cono tangente è spezzato in due piani distinti che si incontrano in un punto e al di sopra di x ci sono esattamente due punti di V' (cfr. [*B*], cap. IX, § 12). D'altra parte la proiezione generica di una superficie non singolare di $\mathbf{P}^N(k)$, $N > 5$, in $\mathbf{P}^5(k)$, è non singolare; si ha quindi la tesi per il Teor. 1 e per la Prop. 3.

BIBLIOGRAFIA

[B] E. Bertini, *Complementi di geometria proiettiva*, Zanichelli, Bologna 1927.

[Bo] E. Bombieri, *Seminormalità e singolarità ordinarie*, Symp. Math. XI (1973), 205-210.

[C] N. Chiarli, *Sulla seminormalità di certe superfici algebriche*, Atti Acc. Scienze di Torino 108 (1973-74), 605-611.

[D] E. Davies, *On the geometric interpretation of seminormality*, Proc. AMS (to appear).

[GS] S. Greco, P. Salmon, *Topics in $\mathfrak{m}$-adic topologies*, Springer-Verlag, Berlin 1971.

[GT] S. Greco, C. Traverso, *On seminormal schemes* (in preparation).

[EGA] A. Grothendieck, J. Dieudonné, *Eléments de Géométrie Algébrique*, ch. IV, Publ. Math. 20, 24, 28, 32; I.H.E.S. 1964-67.

[M] H. Matsumura, *Commutative Algebra*, Benjamin, New York 1970.

[S] I. R. Shafarevich, *Basic Algebraic Geometry*, Springer-Verlag, Berlin 1974.

[T] C. Traverso, *Seminormality and Picard Group*, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, 24(1970), 585-595.

[ZS] O. Zariski, P. Samuel, *Commutative Algebra*, vol. II, Van Nostrand Company, Princeton 1965.

Manoscritto pervenuto in redazione il 27 giugno 1977.