Giuliano Bratti

Risoluzione di una congettura di De Giorgi in R^2

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 58 (1977), p. 87-90

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1977__58__87_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 58 (1977)

Risoluzione di una congettura di De Giorgi in R^2.

GIULIANO BRATTI (*)

1. – In (3) De Giorgi propone la seguente congettura: se A e B_n sono aperti di R^n, $B_n \subset A$ per ogni $n \in N$, se P e Q sono operatori differenziali in A, *se le quaterne* (A, B_n, P, Q) *sono* C^∞-*compatibili allora è* C^∞-*compatibile anche la quaterna* $(A, \cup_n B_n, P, Q)$.

È già stato dimostrato che se P e Q sono a coefficienti costanti, la congettura è, in generale, falsa se su Q si suppone la sola ipoellitticità (4). A mia conoscenza rimane aperto il caso in cui Q è ellittico e, più in particolare il caso in cui Q è l'operatore di Laplace.

Lo scopo di questo articolo è di dimostrare che: *se* Q *è l'operatore di Laplace, in* R^2 *la congettura è vera.*

Per richiamare il problema e porre la simbologia:

a) nel seguito si porrà: $D_x^2 + D_y^2 = (D_x + iD_y)(D_x - iD_y) = Q\bar{Q}$; se f è una funzione $\bar{f}$ indicherà la sua coniugata;

b) se A e B sono aperti con $B \subset A$, la quaterna (A, B, P, Q) si dice C^∞-compatibile se e solo se: per ogni f per cui il sistema $Pu = f$, $Qu = 0$ è C^∞-localmente risolubile, (per ogni punto p di A esiste un suo intorno W_p e una $u \in C^\infty(W_p)$ tale che $Pu = f$, $Qu = 0$), il sistema $Pu = f$, $Qu = 0$ è C^∞risolubile in B.

Per un teorema di Lojasiewicz-Malgrange, se P e Q sono primi tra di loro, le f di cui al punto *b*) sono tutte e solo quelle di ker $Q_{/A} = \{f \in C^\infty(A): Qf = 0\}$ se $P = PQ_1$ e $Q = Q_1 Q_2$, quelle f sono quelle di ker $Q_{2/A}$, (1).

(*) Indirizzo dell'A.: Seminario Matematico, Via Belzoni, 7; 1-35100 PD.

(1) Si trascura il caso che P e Q non abbiano zeri complessi comuni. A sarà supposto connesso.

2. – LEMMA, *Le seguenti proposizioni sono equivalenti*:

a) *la quaterna* (A, B, P, Q) *è* C^∞*-compatibile*;

b) *se cè una curva continua semplice e chiusa in* B, *allora c è la frontiera di un compatto* K *tale che*: $K \subset A$.

DIMOSTRAZIONE. *a*) $\Rightarrow$ *b*). $P(D_x, D_y)$ con la sostituzione: $D_x = d/dz$ e $D_y = id/dz$ diviene un operatore lineare nella derivata complessa d/dz: $a_n d^n/dz^n + \ldots + a_0$. Se $c_1, \ldots, c_k$, sono gli zeri dell'equazione caratteristica dell'operatore $L(d/dz)$, di molteplicità $r_1, \ldots, r_k$, si ha: $L(d/dz) = (d/dz - c_1)M(d/dz)$.

Allora, se vale *a*), per ogni $f \in Ker\, Q_{/A}$ esiste, in B, una soluzione olomorfa dell'equazione $d/dz(u) - c_1(u) = f$.

Sia c la curva continua semplice e chiusa contenuta in B e tale che: se K è il compatto di cui c è la frontiera esista $z_0 \in K$ ma $z_0 \notin A$. Si può supporre per semplicità $z_0 = 0$. Se $f(z) = \dfrac{e^{c_1 z}}{z}$, poichè $f \in ker\, Q_{/A}$ dovrebbe esistere una soluzione dell'equazione $d/dz(u) - c_1(u) = \dfrac{e^{c_1 z}}{z}$ $/z$ in B. Ciò è assurdo [2].

b) $\Rightarrow$ *a*). Si ponga: $L = B \cup Z_B$, dove Z_B è la riunione delle componenti connesse e compatte del complementare di B.

L è aperto e semplicemente connesso (5); per la *b*), $L \subset A$.

Ovvio allora che l'equazione $L(d/dz)u = f$ è risolubile con una u olomorfa in L, per ogni olomorfa f in L. Ciò implica che la quaterna (A, B, P, Q) è C^∞-compatibile.

LEMMA. *La quaterna* $(A, B, P, Q\bar{Q})$ *è* C^∞*-compatibile se e solo se* B *ha la proprietà b) del lemma di sopra.*

DIMOSTRAZIONE. Se $f \in ker\, Q_{/A}$; sia $g \in C^\infty(A)$ tale che: $\bar{Q}g = f$. Allora il sistema $Pu = g$, $\bar{Q}Qu = 0$ è risolubile in B; quindi: $P\bar{Q}u = \bar{Q}g = f$, $Q\bar{Q}u = 0$ in B; vale allora la proprietà voluta per B.

---

[2] Che l'equazione: $d/dz(u) - cu = \dfrac{e^{c_1 z}}{z}$ non possa essere risolta in B si vede così: la restrizione sull'asse reale positivo contenuto in B di u sarebbe del tipo: $u(x)/e^{c_1 x} - a = \log x$, con qualche $a \in C$. Allora $\log z$, $z = x + iy$ sarebbe prolungabile come funzione olomorfa a tutto un intorno della curva c. Ciò è assurdo.

Viceversa: $L = B \cup Z_B$ è un aperto semplicemente connesso contenuto in A. In L si ha: $ker\, Q_{/L} + ker\, \bar{Q}_{/L} = ker\, Q\bar{Q}_{/L}$, poichè il sistema $\bar{Q}u = f$, $Qu = 0$ è risolubile per ogni $f \in ker Q_{/L}$.

Se $f \in ker\, Q\bar{Q}_{/L}$ ciò implica che in L sia ha: $f = g_1 + g_2$ con $g_1 \in ker\, \bar{Q}_{/L}$ e $g_2 \in ker\, Q_{/L}$. Il sistema $Pu_2 = g_2$, $Qu_2 = 0$ è ovviamente risolubile in L; così come lo è il sistema $\bar{P}u_1 = \bar{g}_1$, $Qu_1 = 0$, e dunque $P\bar{u}_1 = g_1$, $\bar{Q}\bar{u}_1 = 0$.

Allora in L si ha:

$$P(\bar{u}_1 + u_2) = g_1 + g_2 = f, \; Q\bar{Q}(\bar{u}_1 + u_2) = 0 .$$

Le quaterne $(A, B_n, P, Q\bar{Q})$ *siano* C^∞*-compatibili per ogni* $n \in N$, con i B_n che costituiscono una successione crescente.

Se c è una curva continua semplice e chiusa contenuta in $\cup_n B_n$ esiste n_0 tal che c è contenuta in B_{n_0} e quindi il compatto K di cui c è frontiera è tutto contenuto in A.

Ciò implica che per $B = \cup_n B_n$ soddisfa la proprietà b) del lemma di sopra e quindi *la quaterna* $(A, B, P, Q\bar{Q})$ *è* C^∞*-compatibile.*

Fin qui si è dimostrato che la congettura di De Giorgi relativa ai sistemi $Pu = f$, $Q\bar{Q}u = 0$ è vera in R^2, a patto che P e $Q\bar{Q}$ non abbiano fattori comuni.

Si supponga $P = P_1 Q$; se la quaterna $(A, B, P_1 Q, \bar{Q}Q)$ è C^∞-compatibile, il sistema $P_1 u = f$, $\bar{Q}u = 0$ è risolubile in B per ogni $f \in ker\, \bar{Q}_{/L}$.

Allora: se $g \in ker\, \bar{Q}_{/A}$, in B è risolubile il sistema: $P_1 v = \bar{g}$, $\bar{Q}v = 0$, così che: $P_1 \bar{v} = g$ e $Q\bar{v} = 0$, per ogni g come sopra. Allora B ha la proprietà b) del primo lemma.

Viceversa: se B ha la proprietà b) del primo lemma: in $L = B \cup Z_B$, per ogni $f \in ker\, \bar{Q}_{/A}$ è risolubile il sistema $\bar{P}_1 v = \bar{f}$, $Qv = 0$. Ponendo: $\bar{v} = Qu$, si ha: $P_1 Qu = f$ e $\bar{Q}Qu = 0$.

Così che *la congettura di De Giorgi è vera*, con i ragionamenti di sopra, *anche se* P *e* $Q\bar{Q}$ *non sono primi tra di loro* (ovvio: P non multiplo di $Q\bar{Q}$).

(Ragionamenti analoghi nel caso $P = P_1 \bar{Q}$).

BIBLIOGRAFIA

[1] A. Andreotti, M. Nacinovich, *Complexes of partial differential operators,* Ann. Scuola Normale Superiore di Pisa, 1976.

[2] G. Bratti, *A density teorem for some system,* in corso di stampa su : Rendiconti del Seminario Matematico di Padova.
[3] E. De Giorgi, *Sulle soluzioni globali di alcuni sistemi di equazioni differenziali,* Boll. UMI, 1975.
[4] M. Nacinovich, *Una osservazione su una congettura di De Giorgi,* Boll. UMI, (4) 12, 1975.
[5] R. Narasimhan, *Analysis on real and complex Manifolds,* Masson e Cie, Paris, 1968.

Manoscritto pervenuto in redazione il 22 giugno 1977.