RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

EMMA PREVIATO

Gruppi nel cui reticolo duale la relazione di Dedekind è transitiva

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 58 (1977), p. 287-308

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1977__58__287_0>

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (http://rendiconti.math.unipd.it/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 58 (1977)

Gruppi nel cui reticolo duale la relazione di Dedekind è transitiva.

EMMA PREVIATO (*)

Nel presente lavoro vengono esaminati i gruppi iperciclici (1) nel cui reticolo $\tilde{\mathfrak{L}}(G)$, duale del reticolo $\mathfrak{L}(G)$ di tutti i sottogruppi di G, la relazione di Dedekind è transitiva ($\breve{D}$-gruppi).

Si ottiene una descrizione completa di tali gruppi, contenuta negli enunciati dei teoremi 2.3, 3.8, 4.1 e 4.2 ; tali gruppi costituiscono una sottoclasse propria della classe dei gruppi iperciclici in cui la relazione di Dedekind è transitiva ([6]).

1. – Elementi di Dedekind-duali.

Un elemento h di un reticolo $\mathfrak{L}$ si dice elemento di Dedekind-duale in $\mathfrak{L}$ (brevemente $\breve{d}$-elemento) se e solo se h è elemento di Dedekind nel reticolo duale di $\mathfrak{L}$; in forma esplicita, dati comunque gli elementi a, b di $\mathfrak{L}$, sono soddisfatte le relazioni seguenti :

i) da $a \geq b$ segue $(b \cup h) \cap a = b \cup (h \cap a)$.

ii) da $h \geq b$ segue $(b \cup a) \cap h = b \cup (h \cap a)$.

(*) Indirizzo dell'A. : Seminario Matematico dell'Università, Padova.

Lavoro eseguito nell'ambito dei Gruppi di Ricerca Matematica del C.N.R.

(1) Un gruppo G si dice iperciclico se e solo se ogni immagine omomorfa non identica di G possiede un sottogruppo normale ciclico non identico.

OSSERVAZIONE 1. Da i), ii) si deduce immediatamente che h è $\breve{d}$-elemento in $\mathfrak{L}$ se per ogni $k \leq h$ risulta k di Dedekind in $\mathfrak{L}$.

OSSERVAZIONE 2. $\mathfrak{L}$ è un reticolo modulare se e solo se ogni elemento di $\mathfrak{L}$ è $\breve{d}$-elemento.

Ci saranno utili le seguenti proprietà dei $\breve{d}$-elementi di un reticolo, ottenute dualizzando proprietà analoghe relative ad elementi di Dedekind in un reticolo ([10], pp. 74-76, e [5], paragrafo 1).

1.1. Sia h un elemento del reticolo $\mathfrak{L}$.

i) h è $\breve{d}$-elemento in $\mathfrak{L}$ se e solo se per ogni $k \in \mathfrak{L}$ l'applicazione $\varphi^k : x \longmapsto x \cup k$ realizza un isomorfismo tra gli intervalli $[h/h \cap k]$ e $[h \cup k/k]$; il suo inverso è dato da $\varphi_h : x \longmapsto x \cap h$.

ii) se h e k sono $\breve{d}$-elementi, allora $h \cap k$ è $\breve{d}$-elemento.

iii) se h è $\breve{d}$-elemento in $\mathfrak{L}$ e se $k \leq h$ è $\breve{d}$-elemento nel reticolo $[h] = \{x \in \mathfrak{L} \mid x \leq h\}$, allora k è $\breve{d}$-elemento in $\mathfrak{L}$.

iv) se h è $\breve{d}$-elemento in $\mathfrak{L}$ e $k \in \mathfrak{L}$, allora $h \cap k$ è $\breve{d}$-elemento in $[k]$.

v) se h è $\breve{d}$-elemento in $\mathfrak{L}$ e $k \in \mathfrak{L}$, allora $h \cup k$ è $\breve{d}$-elemento nel reticolo $[\mathfrak{L}/k] = \{x \in \mathfrak{L} \mid x \geq k\}$.

Daremo ora alcune proprietà dei $\breve{d}$-elementi in un $\breve{D}$-reticolo, ossia un reticolo $\mathfrak{L}$ avente in $\breve{\mathfrak{L}}$ la relazione di Dedekind transitiva: se h è $\breve{d}$-elemento in $\mathfrak{L}$ e k è $\breve{d}$-elemento in $[\mathfrak{L}/h]$, allora k è $\breve{d}$-elemento in $\mathfrak{L}$.

1.2. PROPOSIZIONE. In un $\breve{D}$-reticolo $\mathfrak{L}$ l'insieme dei $\breve{d}$-elementi costituisce un sottoreticolo.

DIMOSTRAZIONE. Siano h, k $\breve{d}$-elementi in $\mathfrak{L}$. Allora $h \cup k$ è $\breve{d}$-elemento in $[\mathfrak{L}/h]$ (1.1 v)); poichè $\mathfrak{L}$ è un $\breve{D}$-reticolo, è dunque $h \cup k$ $\breve{d}$-elemento, come pure $h \cap k$ per 1.1 ii).

1.3. PROPOSIZIONE. In un $\breve{D}$-reticolo algebrico [2] $\mathfrak{L}$, una unione qualsiasi di $\breve{d}$-elementi, è un $\breve{d}$-elemento.

---

[2] Diremo algebrico un reticolo che sia completo, e in cui ogni elemento sia unione di elementi compatti (per una definizione di elemento compatto cfr. [2], p. 186). Ricordiamo che, se G è un gruppo, $\mathfrak{L}(G)$ è algebrico.

DIMOSTRAZIONE. Sia $\{h_\alpha\}$ una famiglia di $\breve{d}$-elementi, sia k un elemento qualunque di $\mathfrak{L}$, e poniamo $h = \cup_\alpha h_\alpha$. Usiamo la condizione i) di 1.1. Se $h \cap k \leq x \leq h$, risulta $(x \cup k) \cap h \geq x$; viceversa, se y è un elemento compatto contenuto in $(x \cup k) \cap h$, allora $y \leq (\bigcap_{\beta \in F} x_\beta) \cup k$, ove F è un insieme finito e $\{x_\beta\}$ è una famiglia di elementi compatti la cui unione è x. Sia ora F' un insieme finito tale che $\bar{h} = \bigcup_{\alpha \in F'} h_\alpha \geq y$, e $\bar{h} \geq \bar{x} = \bigcup_{\beta \in F} x_\beta$. Ora, tenuto conto di 1.2, risulta $y \leq (\bar{x} \cup k) \cap \bar{h} = \bar{x} \cup (k \cap \bar{h}) \leq x$, e in conclusione $(x \cup k) \cap h \leq x$. L'applicazione $\varphi^k : [h/h \cap k] \rightarrow [h \cup k/k]$ è pertanto iniettiva, e la sua inversa sinistra è data da φ_h; si dimostra analogamente che è suriettiva.

1.4. PROPOSIZIONE. Il prodotto cartesiano di una famiglia di $\breve{D}$-reticoli è un $\breve{D}$-reticolo.

DIMOSTRAZIONE. Verifica immediata.

1.5. PROPOSIZIONE. Sia $\mathfrak{L}$ un reticolo algebrico, e sia $\{g_\alpha\}_{\alpha \in I}$ la famiglia degli elementi compatti di $\mathfrak{L}$. Dato un elemento h di $\mathfrak{L}$, sia $\{h_\beta\}_{\beta \in J}$ la famiglia degli elementi compatti contenuti in h. Allora h è un $\breve{d}$-elemento in $\mathfrak{L}$ se e solo se per ogni insieme finito $F \subseteq I$, ed $F' \subseteq J$, posto $\bar{g} = \bigcup_{\alpha \in F} g_\alpha$, $\bar{h} = \bigcup_{\beta \in F'} h_\beta$, $s = h \cap \bar{g}$, l'applicazione $\varphi_{\bar{h} \cup s}$ risulta isomorfismo fra i reticoli $[\bar{h} \cup \bar{g}/\bar{g}]$ e $[\bar{h} \cup s/s]$.

DIMOSTRAZIONE. La necessità si prova osservando che la $\varphi_{\bar{h} \cup s}$ è una restrizione dell'isomorfismo $\varphi_h : [h \cup \bar{g}/\bar{g}] \rightarrow [h/s]$. Per la sufficienza, usiamo 1.1); sia k un qualunque elemento di $\mathfrak{L}$, e sia $h \cap k \leq x \leq h$. Allora $(x \cup k) \cap h \geq x$; viceversa, se $y \leq (x \cup k) \cap h$ è un elemento compatto, sia $y \leq (\bigcup_{\gamma \in F''} x_\gamma) \cup (\bigcup_{\alpha \in F} g_\alpha)$ con $x_\gamma \leq x$ compatti, $g_\alpha \leq k$ compatti, e sia $\bar{h} = \bigcup_{\beta \in F'} h_\beta \geq y$, $\bar{h} \geq \bar{x} = \bigcup_{\gamma \in F''} x_\gamma$; allora per ipotesi $y \leq (\bar{x} \cup \bar{g}) \cap (\bar{h} \cup s) = \bar{x} \cup s \leq x$, e in conclusione $(x \cup k) \cap h = x$. Analogamente si prova la suriettività della mappa $\varphi^k : [h/h \cap k] \rightarrow [k \cup h/k]$.

Si verifica infine, utilizzando 1.1:

1.6. PROPOSIZIONE. Se $\mathfrak{L}$ è un $\breve{D}$-reticolo e se h è $\breve{d}$-elemento in $\mathfrak{L}$, allora $[h]$ ed $[\mathfrak{L}/h]$ sono entrambi $\breve{D}$-reticoli.

2. – $\breve{D}$-gruppi ipercíclici aperiodici.

2.1. Proposizione. Sia G un $\breve{D}$-gruppo e sia $\{H_\alpha\}_{\alpha\leq\gamma}$ una serie ascendente di G, invariante e a fattori ciclici. Allora $H_\alpha \leq_{\breve{d}} G$ (H_α è $\breve{d}$-elemento in $\mathfrak{L}(G)$) per ogni $\alpha \leq \gamma$.

Dimostrazione. Usiamo induzione (transfinita) su α; se $\alpha=1$, H_1 è un sottogruppo normale ciclico di G, e $H_1 \leq_{\breve{d}} G$ (Osservazione 1), Se $\alpha = \beta + 1$, allora $H_{\beta+1}/H_\beta \leq_{\breve{d}} G/H_\beta$ (Osservazione 1), e dunque $H_{\beta+1} \leq_{\breve{d}} G$, in quanto G è $\breve{D}$-gruppo. Infine, se α è un ordinale limite, $H_\alpha \leq_{\breve{d}} G$ per 1.3.

2.2. Proposizione. Sia G un $\breve{D}$-gruppo aperiodico, e sia $\{H_\alpha\}_{\alpha\leq\gamma}$ una serie ascendente di G, invariante e a fattori ciclici. Se H_{α_0} è abeliano, per un $\alpha_0 \leq \gamma$, allora ogni elemento c di G induce su H_{α_0} un automorfismo potenza.

Dimostrazione. Usiamo induzione su α_0; H_1 è normalizzato da c, ed è ciclico, quindi l'affermazione è vera. Se α_0 è ordinale limite, c normalizza ogni sottogruppo ciclico di H_{α_0}, e questo prova di nuovo l'asserto. Sia dunque $\alpha_0 = \beta+1$, e sia $H_{\alpha_0} = \langle b, H_\beta\rangle$; c normalizza ogni sottogruppo di H_β (ipotesi iduttiva), inoltre ogni sottogruppo di $H_{\beta+1}$ è $\breve{d}$-elemento in G, essendo $H_{\beta+1}$ abeliano e $H_{\beta+1} \leq_{\breve{d}} G$(2.1). Se $b^n \in H_\beta$ per un $n > 0$, si conclude facilmente avendosi $c^{-1}bc = b^r h$, per un $h \in H_\beta$, e dunque $c^{-1}b^n c = b^{\pm n} = (b^r h)^n$, per cui $(b^{r\pm 1} h)^n = 1$, e dunque $h \in \langle b\rangle$. Se invece $H_{\beta+1}/H_\beta$ è aperiodico, risulta $c^{-1}bc = b^{\varepsilon_1} h$, con $\varepsilon_1 = \pm 1$, $h \in H_\beta$. Distinguiamo due casi:

a) $\langle c\rangle \wedge H_{\beta+1} = \{1\}$.

Da $h \in \langle b, c\rangle$ si deduce $\langle b, h\rangle \cup \langle c\rangle = \langle b\rangle \cup \langle c\rangle$ e poichè $\langle b, h\rangle \leq_{\breve{d}} G$ sarà $\langle b, h\rangle = \langle b\rangle$, come si voleva.

b) $\langle c\rangle \cap H_{\beta+1} = \langle c^s\rangle$, con $s > 1$.

Sarà $c^{-1}hc = h^{\varepsilon_2}$, e dunque $b = c^{-s}bc^s = b^{\varepsilon_1^s} h^{\varepsilon_1^{s-1} + \varepsilon_1^{s-2}\varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_2^{s-1}}$; risulta allora $\varepsilon_1^s = 1$, essendo $\langle b\rangle \cap \langle h\rangle = \{1\}$ e, se $h \neq 1$, $\varepsilon_1^{s-1} + \varepsilon_1^{s-2}\varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_2^{s-1} = 0$, quindi $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2$, ed s pari. Escludiamo anzitutto il caso $\varepsilon_2 = -1$. Infatti, posto $s = 2^m t$, con t dispari, è $(2^m + 1)t$ dispari, e dunque $(h \neq 1) \langle c^{2^m t} h\rangle \cap$

$\cap < c^{(2^m+1)t} h > = \{1\}$; d'altra parte, $< c^{2^m t} h > \cup < c^{(2^m+1)t} h > = < c^t, h >$, quindi essendo $< c^{2^m t} h > \leq_{\breve{d}} G$ risulta $[< c^{2^m t} h > / \{1\}] \simeq [< c^t, h > / < c^{(2^m+1)t} h >]$, mentre il fatto che $(c^t h)^{2^m+1} = c^{t(2^m+1)} h$ dice che il secondo reticolo ha elementi periodici non nulli, una contraddizione. Dovrà quindi essere $\varepsilon_2 = 1$, $\varepsilon_1 = -1$.

b_1) $< h > \nleq < c >$.

Allora $[< b, c > / < h, c >]$ è un reticolo finito, dato che $[< b, c > / < c >]$ è il reticolo di un gruppo ciclico; pertanto $| < b, c > : < h, c > | < \infty$ (come si può vedere ad esempio ragionando modulo $< h >$); $[< h, c > / < h, c^2 >]$ ha lunghezza ≤ 1 quindi in conclusione $| < b, c > : < h, c^2 > | < \infty$. Ma allora il gruppo aperiodico $< b, c >$ è abeliano perchè $< h, c^2 >$ è contenuto nel suo centro e un gruppo il cui centro ha indice finito ha il derivato di ordine finito ([7]. Theorem 4.12); assurdo.

b_2) $< h > \leq < c >$.

Risulta $c^{-1} bc = b^{-1} c^m$, $m \neq 0$; $b = c^{-m} bc^m = b^{(-1)^m}$, dunque m è pari. Risulta inoltre $(2+m)m+1$ dispari, dunque $< c^{(2+m)m} b > \cap < c^{(2+m)m+1} b > = \{1\}$, $< c^{(2+m)m} b > \cup < c^{(2+m)m+1} b > = < c, b >$, da cui, essendo $< c^{(2+m)m} b > \leq_{\breve{d}} G$, segue $[< c^{(2+m)m} b > / \{1\}] \simeq [< c, b > / c^{(2+m)m+1} b >]$, mentre si ha $(cb)^{2m+1} = c^{(2+m)m+1} b$, e dunque a $< cb >$ corrisponde un elemento ciclico finito in $\mathfrak{L} < c^{(2+m)m} b >$, una contraddizione. Pertanto $< b > \lhd < b, c >$.

2.3. Teorema. Un gruppo iperciclico aperiodico G è $\breve{D}$-gruppo se e solo se è abeliano.

Dimostrazione. Proviamo la necessità. Sia $\{H_\alpha\}_{\alpha \leq \gamma}$ una serie ascendente di G, invariante e a fattori ciclici, tale che $\bigcup_\alpha H_\alpha = G$. Proviamo, per induzione su α, che H_α è abeliano. Se $\alpha = 1$, H_α è ciclico; se α è ordinale limite, è possibile trovare un sottogruppo abelliano che contenga due elementi generici di H_α. Sia dunque $\alpha = \beta + 1$ e sia $H_\alpha = < H_\beta, c >$. Per 2.2, c induce su H_β un automorfismo potenza. Se tale potenza non è 1, allora c non induce su $< c^2, H_\beta >$ un automorfismo potenza, mentre $< c^2, H_\beta >$ è abeliano normale: ciò è in contraddizione con 2.2.

3. – $\breve{D}$-gruppi iperciclici periodici.

3.1. Lemma. Un gruppo finito supersolubile G è un $\breve{D}$-gruppo se e solo se è modulare.

Dimostrazione. Proviamo anzitutto, usando induzione sulla classe di nilpotenza, che un p-gruppo finito P che sia $\breve{D}$-gruppo è modulare. $P/Z(P)$ è modulare per ipotesi induttiva (per l'Osservazione 1 è $Z(P) \leq_{\breve{d}} P$); allora per la $\breve{D}$-proprietà è $< Z(P), x > \leq_{\breve{d}} P$ per ogni $x \in P$, e da $< x > \leq_{\breve{d}} < Z(P), x > \leq_{\breve{d}} P$ segue $x \leq_{\breve{d}} P$. Ne segue che ogni sottogruppo di P è $\breve{d}$-elemento (1.2), e dunque P è modulare (Osservazione 2).

Sia ora G un $\breve{D}$-gruppo supersolubile finito; proviamo che G è modulare per induzione sull'ordine di G. Sia $< g >$ un sottogruppo normale di ordine primo p di G. Allora $G/< g >$ è $\breve{D}$-gruppo, quindi è modulare, da cui per ogni $h \in G$ è $< g, h > \leq_{\breve{d}} G$. La conclusione si otterrà provando che $< h > \leq_{\breve{d}} < g, h >$, nè è restrittivo supporre $|h| = q^n$, q un numero primo (1.2). Se $p = q$, allora $< g, h >$ è modulare, essendo un p-gruppo con proprietà $\breve{D}$. Sia ora $p \neq q$; usiamo induzione su n per provare che $< h > \leq_{\breve{d}} < g, h >$. Se $n = 1$ $< g, h >$ è un gruppo modulare avendo ordine pq. Se $n > 1$, per la $\breve{D}$-proprietà e l'ipotesi induttiva si avrà $< h^q > \leq_{\breve{d}} < g, h^q > \leq_{\breve{d}} < g, h >$. Infine, il reticolo $[< g, h > / < h^q >]$ ha lunghezza due e dunque è modulare, così $< h >$ è $\breve{d}$-elemento in $[< g, h > / < h^q >]$, da cui $< h > \leq_{\breve{d}} < h, g >$, come si voleva.

3.2. Lemma. Sia G un $\breve{D}$-gruppo iperciclico periodico; se N è il sottogruppo di G generato dagli elementi $g \in G$ tali che $< g > \leq_{\breve{d}} G$, allora:

i) N è reticolarmente invariante in G,

ii) N è modulare,

iii) per $H \leq N$ è $H \leq_{\breve{d}} G$.

Dimostrazione. i) è ovvia. iii) ogni elemento x di N è contenuto in un sottogruppo $< g_1, \dots, g_t >$ con $< g_i > \leq_{\breve{d}} G$; ora $< g_1, \dots, g_t >$ è un $\breve{D}$-gruppo (1.2) ed è finito essendo G localmente finito. Per 3.1 $< g_1, \dots, g_t >$ è modulare, per cui $< x > \leq_{\breve{d}} < g_1, \dots, g_t > \leq_{\breve{d}} G$, da cui $< x > \leq_{\breve{d}} G$. Tenuto conto di 1.3, la iii) è dimostrata; ii) ne segue usando l'Osservazione 2.

3.3. PROPOSIZIONE. Un p-gruppo iperciclico G con $p \neq 2$ è $\breve{D}$-gruppo se e solo se è modulare.

DIMOSTRAZIONE. Dimostriamo la necessità. Il sottogruppo N di G generato dagli elementi $g \in G$ tali che $< g > \leq_{\breve{d}} G$ è modulare per 3.2. Supponiamo per assurdo $N \neq G$ e consideriamo un elemento $x \in G$ tale che $< x , N > / N \lhd G/N$ e $| < x , N > / N | = p$. Supponiamo anzitutto $|x| = p$. x normalizza ogni elemento y di N, avendosi $| < x , y > : < y > | = p$; essendo poi $p \neq 2$, il gruppo $< x , y >$ è modulare ([9]); ne segue $< x > \leq_q < x , y >$, dunque $< x > \leq_q < x , N >$ e infine $< x > \leq_{\breve{d}} < x , N >$ (Osservazione 1). Ma $< x > \leq_{\breve{d}} < x , N > \leq_{\breve{d}} G$ comporta $< x > \leq_{\breve{d}} G$, in contraddizione col fatto che $x \notin N$. Sia ora $|x| = p^n$, $n > 1$; possiamo usare induzione su n per dimostrare $< x > \leq_{\breve{d}} < x , N >$, nelle ipotesi $< x , N > \leq_{\breve{d}} G$ e $< y > \leq_{\breve{d}} G$ per ogni $y \in N$. Il caso $n = 1$ è risolto per quanto visto sopra. Consideriamo il sottogruppo $\Omega_1(N)$ di N generato dagli elementi di ordine p. N è modulare, quindi $\Omega_1(N)$ è abeliano elementare, inoltre $\Omega_1(N) \leq_{\breve{d}} G$, pertanto il gruppo $G/\Omega_1(N)$ è ancora un $\breve{D}$-gruppo, $N/\Omega_1(N)$ è tale che ogni suo sottogruppo è $\breve{d}$-elemento, quindi in $G/\Omega_1(N)$ si può applicare l'ipotesi induttiva per concludere $< x , \Omega_1(N) > / \Omega_1(N) \leq_{\breve{d}} < x , N > / \Omega_1(N)$, da cui per la $\breve{D}$-proprietà $< x , \Omega_1(N) > \leq_{\breve{d}} < x , N >$. Ma $< x >$ è normalizzato da ogni elemento z di $\Omega_1(N)$ essendo $| < x , z > : < x > | \leq p$, quindi è anche $< x > \leq_{\breve{d}} < x , \Omega_1(N) >$ e infine $< x > \leq_{\breve{d}} G$, come si voleva.

La sufficienza è ovvia.

3.4. PROPOSIZIONE. Un 2-gruppo iperciclico G non modulare è $\breve{D}$-gruppo se e solo se è un (q)-gruppo $G = < c , A >$, con A 2-gruppo divisibile (non identico), $c^{-1} a c = a^{-1}$ per ogni $a \in A$ (3).

DIMOSTRAZIONE. Necessità. Sia G un 2-gruppo iperciclico, non modulare con proprietà $\breve{D}$; consideriamo il sottogruppo N di G generato dagli elementi $g \in G$ tali che $< g > \leq_{\breve{d}} G$. N è modulare (3.2), quindi $N \neq G$. Sia c un elemento di G tale che $| < c , N > | N | = 2$ e $< c , N > \lhd G$; proviamo che, se N ha esponente finito, allora $< c > \leq_{\breve{d}} G$. Infatti, se $< g >$ è un $\breve{d}$-elemento di ordine 2, risulta

(3) Per una descrizione dei 2-gruppi (risolubili) con proprietà (q), cfr. [3]. Per gruppo divisibile si intende sempre gruppo abeliano divisibile.

$|<c, g>:<c>| \leq 2$; ne segue $<c, \Omega_{i-1}(N)> \leq_{\breve{d}} <c, \Omega_i(N)>$, e dunque $<c> \leq_{\breve{d}} <c, \Omega_1(N)> \leq_{\breve{d}} <c, \Omega_2(N)> \leq_{\breve{d}} \ldots \leq_{\breve{d}} <c, \Omega_t(N)> = <c, N>$; per la transitività, $<c> \leq_{\breve{d}} G$. Ma allora per definizione di N sarebbe $c \in N$, contro l'ipotesi. Pertanto N non ha esponente finito, ed essendo modulare è abeliano.

Possiamo quindi considerare il quoziente $<c, N>/<c> \cap N$, che è ancora $\breve{D}$-gruppo (3.2); per semplicità di scrittura, supponiamo $<c> \cap N = \{1\}$, quindi $|c| = 2$. Essendo $|<c, g>:<g>| = 2$ per ogni $g \in N$, c induce su N un automorfismo potenza di ordine 2. Supponiamo che sia $N^2 \neq N$, e sia $h \in N, h \in N^2$. Essendo $<c, N>/N^2$ un gruppo abeliano elementare, risulta $<c, N^2> \leq_{\breve{d}} <c, N>$; da $<ch> \cap <c, N^2> = \{1\}$ segue dunque $[<cg>/\{1\}] \simeq [<cg, ch>/<ch>]$ per ogni $g \in N$, mentre $|cg| = 2$ e, per $|g| > 2$, risulta $|<cg, ch>:<ch>| > 2$ in quanto $g^{-1}h \in <cg, ch>$, assurdo. N è dunque divisibile.

Abbiamo ragionato modulo $<c> \cap N$; nel caso generale, proviamo che c induce su A un automorfismo potenza, ove $N = A \times B$, ed A è il massimo sottogruppo divisibile di N. Infatti, sia $|c| = 2^n$ e sia $a \in A$ arbitrario. Se a_1 è tale che $a = a_1^{2^n}$, da $c^{-1} a_1 c = a_1^{-1} c^m$ ($c^m \in N$) segue $c^{-1} ac = (a_1^{-1} c^m)^{2^n} = (a_1^{2^n})^{-1} = a^{-1}$, come si voleva.

Proviamo infine che $G = <A, c>$; anzitutto è $<N, c> = <A, c>$, infatti, se $<c> \cap N = <ab>$, $a \in A$, $b \in B$ risulta $N = A \times <b>$. Supponiamo per assurdo che esista un $d \in G$ tale che $<c, N>$ ha indice 2 in $<d, c, N>$ e $<d, c, N>$ è un $\breve{D}$-gruppo (basta scegliere $<d, c, N> \lhd G$). Se $<d, c, N>/N$ è abeliano elementare, allora $<d, N> \leq_{\breve{d}} G$ e dunque, per quanto visto sopra per il gruppo $<c, N>$ d induce su A un automorfismo potenza non identico (se fosse identico, sarebbe $<d> \leq_{\breve{d}} G$); ma allora $<cd, A>$ è un gruppo abeliano, e dunque $<cd> \leq_{\breve{d}} <cd, A> \leq_{\breve{d}} <cd, N> \leq_{\breve{d}} G$, per cui $cd \in N$, assurdo. Sia dunque $<d, c, N>/N$ un gruppo ciclico; se si prova che d induce su A un automorfismo potenza, allora si perviene ad un assurdo, in quanto $c = d^2 h \in \mathcal{C}(A)$. A tale scopo possiamo ragionare modulo $<d> \cap N$, quindi supporre $|d| = 4$. Allora ogni elemento di $\Omega_1(N)$ induce su $<d>$ l'identità (diversamente non darebbe luogo a un $\breve{d}$-elemento). Supponiamo ora che d normalizzi ogni sottogruppo ciclico di N di ordine 2^s, e sia $|a| = 2^{s+1}$; allora $d^{-1} ad = aa_1$, con $|a_1| \leq 2^s$; ma essendo $<a, a_1> \cup <d> = <a> \cup <d>$ e $<d> \cap <a, a_1> = \{1\}$ deve risultare $<a, a_1> = <a>$, in quanto $<a, a_1>$ è $\breve{d}$-elemento; quindi d normalizza $<a>$, come si voleva. Risulta

dunque $< A , c > = G$, $\mathcal{C}_G(A) = < A , c^2 > = N$ ha indice 2 in G, ogni sottogruppo di N è $\breve{d}$-elemento, e qunque è quasi normale in G (è immediato verificare che in un p-gruppo finito un $\breve{d}$-elemento è quasi normale), ma allora G è un (q)-gruppo ([3], Teorema $C2$, sufficienza).

Sufficienza. Consideriamo nel (q)-gruppo $G = < A , c >$ un $\breve{d}$-elemento H, e in $[G/H]$ un $\breve{d}$-elemento K. Essendo $\mathcal{C}_G(A) = < A , c^2 >$ normale in G, e abeliano, ogni suo sottogruppo risulta quasi normale in G, e dunque $\breve{d}$-elemento (Osservazione 1). Non è pertanto restrittivo assumere $c \in K$. Se anche H contiene c, allora $A \leq H = G$; infatti supponiamo $a \notin H$, e scegliamo $a_1 \in A$ tale che $a = a_1^{2^r}$, $2^r > |c|$; allora $[< c > / < ca_1 > \cap H] \simeq [< c , a_1 > / < ca_1 >]$, ma il primo reticolo ha lunghezza 1 essendo $< ca_1 > \cap H = < c^2 >$, una contraddizione. Supponiamo ora $c \notin H$, dunque $H \leq \mathcal{C}_G(A)$. Anche in questo caso, vogliamo provare che $K \geq A$, ossia $K = G$. A tale scopo non è restrittivo suppore $|c| = 2$, infatti $c^2 \in K$, d'altra parte modulo $< c^2 > H$ è ancora $\breve{d}$-elemento e K è $\breve{d}$-elemento in $[G/H]$.

Supponiamo dunque $a \notin K$; il reticolo $[< c > \cup H/H]$, che ha lunghezza 1 essendo H quasinormale, deve essere isomorfo a $[< c , a > \cup H / < ca > \cup H]$; quest'ultimo reticolo, per la quasinormalità di H, è isomorfo a $\left[< c , a > / < ca > \cup (< c , a > \cap H)\right]$; poichè $H \leq \mathcal{C}_G(A)$ risulta $< c , a > \cap H = < a > \cap H$, e dunque, avendo $< ca >$ ordine 2, con una scelta opportuna di a si perviene a una contraddizione. Il teorema è quindi dimostrato.

3.5. Lemma. Un $\breve{D}$-gruppo iperciclico periodico G che sia privo di sottogruppi divisibili è modulare.

Dimostrazione. Consideriamo il sottogruppo N di G definito da $N = < g \in G / < g > \leq_{\breve{d}} G >$. Supponiamo per assurdo $N \neq G$ e scegliamo un p-elemento $x \in G$ tale che $< x , N > / N \lhd G/N$ e $| < x , N > / N | = p$. Proviamo che risulta $< x > \leq_{\breve{d}} G$, una contraddizione. Il gruppo N , essendo modulare (3.2) e risolubile, sarà prodotto diretto di P_0^*-gruppi generalizzati di tipo $A < g >$, con A abeliano elementare, di gruppi primari di esponente finito e di gruppi primari di esponente infinito, quindi abeliani ([9]). Tali sottogruppi sono caratteristici in N, e dunque normali in G ; consideriamo un tale sottogruppo L di N tale che, eventualmente, $x^p \neq 1$ appartenga ad L ; $< x > L$ è un $\breve{D}$-gruppo, essendo isomorfo al quoziente di $< x , N >$ su un $\breve{d}$-elemento (il complemento di L in N). Se L è

del tipo $A < g >$, risulta $< x > \leq_{\breve{d}} < x, A > \leq_{\breve{d}} < x > (A < g >)$, in quanto si posono formare quozienti finiti, che sono $\breve{D}$-gruppi e dunque modulari (3.1). Se L è q-gruppo, $L < x >$ risulta modulare in virtù di 3.3 e 3.4. Risulta dunque, detto L_1 il complemento di L in N, $< x, L_1 > / L_1 \leq_{\breve{d}} < x, N > / L_1 \, (= < x, L > \cup L_1 / L_1 \simeq < x, L >)$; quindi $< x, L_1 >$ è un $\breve{D}$-gruppo e $< x > \cap L_1 = \{1\}$. Possiamo considerare ora i $\breve{D}$-gruppi $< x > L_2$, ove L_2 è P_o^*-gruppo o gruppo primario modulare; se L_2 è P_o^*-gruppo, come sopra si conclude che $< x > L_2$ è modulare; se $L_2 = Q$ è q-gruppo di esponente finito si ha $< x > \leq_{\breve{d}} < x > \Omega_1(Q) \leq_{\breve{d}} < x > \Omega_2(Q) \leq_{\breve{d}} \ldots \leq_{\breve{d}} < x > Q$, da cui $< x > \leq_{\breve{d}} Q < x >$, e dunque $< x > Q$ è modulare; se $Q = L_2$ ha esponente infinito, allora x induce l'identità su Q poichè evidentemente $< x, Q > / Q^{q^n}$ è abeliano, non appena $n > 1$. D'altra parte, x centralizza ogni gruppo L_2, eccetto al più uno, infatti $< x > (L_2 \times \tilde{L}_2)$ deve risultare modulare non appena ha esponente finito. Il reticolo di $< x, L_1 >$ si scompone pertanto nel prodotto diretto di due reticoli, uno dei quali contiene $< x >$ come $\breve{d}$-elemento. Si può concludere che $< x > \leq_{\breve{d}} G$.

Facciamo a questo punto un'osservazione che ci sarà utile più volte nel seguito: sia N un sottogruppo normale del gruppo periodico iperciclico G. Se N è modulare, si può parlare del massimo sottogruppo divisibile di N, diciamolo N_1. Allora, se G/N è privo di sottogruppi divisibili, anche G/N_1 ne è privo. Infatti, se A/N_1 è divisibile, lo è anche A/N per cui $A \leq N$; ora A è abeliano perchè i suoi sottogruppi di Sylow non hanno esponente finito, e dunque A è divisibile $(A \ni a = x^n y = x^n z^n = (xz)^n, y \in N_1)$.

3.6. Lemma. Sia G un $\breve{D}$-gruppo iperciclico periodico. Posto $N = < g \in G / < g > \leq_{\breve{d}} G >$, G/N risulta modulare, inoltre ogni elemento non identico di G/N induce un automorfismo potenza non identico sul massimo sottogruppo divisibile di N.

Dimostrazione. Diciamo N_1 il massimo sottogruppo divisibile di N.

Sia inoltre M il sottogruppo di G/N generato dai $\breve{d}$-sottogruppi ciclici. Proviamo che $M/N \simeq \leq Aut N_1$; infatti se $x \in M$ ed $x \notin N$, allora $x \notin \mathcal{C}(N_1)$. Diversamente, si avrebbe $< x > \leq_{\breve{d}} < x, N_1 > \leq_{\breve{d}} < x, N > \leq_{\breve{d}} G$ (3.5 e osservazione successiva), e dunque $< x > \leq_{\breve{d}} G$, ma allora $x \in N$. Osserviamo inoltre che ogni elemento di M/N induce su N_1 un automorfismo potenza. Sia infatti $x \in M$-N

e $|x| = p^n$. Se $y \in N_1$ e $|y| = q^m$ con $p \neq q$, non può essere $< y >^{\times} \neq < y >$, altrimenti il gruppo $< y >^{\times} \cup < y >$ avrebbe ordine $q^m p^{\alpha}$, assurdo essendo contenuto nel q-sottogruppo di Sylow di N_1. Se $p = q$, consideriamo in N_1 il sottogruppo C, complemento del q-sottogruppo di Sylow; risulta $< x, N_1 > \leq_{\breve{d}} G$ (3.5) e dunque $< x, N_1 > / C$ un $\breve{D}$-gruppo primario. In virtù di 3.3, 3.4, x induce un automorfismo potenza su N_1/C. In conclusione M/N è isomorfo a un sottogruppo di $AutP(N_1)$, quindi non può avere un sottogruppo divisibile, e dunque M deve coincidere con G (3.5); questo prova entrambe le affermazioni.

3.7. Proposizione. Sia G un gruppo iperciclico periodico non modulare, con $\mathfrak{L}(G)$ indecomponibile. G è un $\breve{D}$-gruppo se e solo se soddisfa alle seguenti condizioni: G possiede un sottogruppo divisibile B, B è privo di 2-elementi, B è di Hall in G, ogni sottogruppo di B è normale in G (ma $\mathfrak{C}(B) \neq G$), e per G/B si verifica uno dei seguenti tre casi:

i) G/B è ciclico di ordine p^n, oppure;

ii) G/B è 2-gruppo (iperciclico) non modulare con proprietà $\breve{D}$, oppure;

iii) $G/B = < x > E/B$ è un P^*_o-gruppo (generalizzato), con $|x| = q^m$, $E \leq \mathfrak{C}(B)$ e, per ogni $b \in B$ di ordine r^s potenza di un primo r, risulta $x^{-1} bx = b^{m_s}$. con $m_s^q \not\equiv 1$ mod. r. (4).

Dimostrazione. Dato il gruppo G come nell'enunciato, dimostriamo la necessità; sia $N = < g \in G \mid < g > \leq_{\breve{d}} G >$, sia N_1 il massimo sottogruppo divisibile di N, e sia B il sottogruppo di N_1 generato dagli elementi di ordine dispari. Verifichiamo che il sottogruppo B soddisfa le condizioni enunciate.

Dalla definizione di B segue che esso è divisibile; per dimostrare che è di Hall in G vediamo anzitutto che:

(1) se $p \in \omega(G/N)$ e $p \neq 2$, allora $p \notin \omega(N_1)$.

Ricordiamo che, in conseguenza di 3.6, è $N_1 \neq \{1\}$ e ogni elemento di G induce su N_1 un automorfismo potenza. Ora, supponiamo per

(4) Poichè x induce su B un automorfismo potenza, per ogni intero positivo s esiste un intero m_s tale che $0 < m_s < r^s$, $m_s \equiv m_{s-1}$ mod. r^{s-1} e per ogni elemento di B di ordine p^s, è $x^{-1} bx = b^{m_s}$ ([8], 4.1.1).

assurdo che un sottogruppo (divisibile) di N_1 sia p-gruppo; sia P il p-Sylowgruppo di N e sia $1 \neq \bar{x} \in G/N$ tale che $|x| = p^n$ e $|< x, N >/N| = p$; risulta $P < x >$ un p-gruppo abeliano, infatti è $\breve{D}$-gruppo, essendo isomorfo al quoziente di $< x > N$ sul complemento di P in N, e $p \neq 2$. Sia Q un q-Sylowgruppo di N tale che x non centralizzi $Q \cap N_1$ (un tale Q esiste per 3.6); essendo $< x >$ $(Q \times P)$ un $\breve{D}$-gruppo, risulta $< Q, x > \leq_{\breve{d}} < Q, P, x >$. Non è restrittivo suppore $< x > \cap P = \{1\}$, essendo un $\breve{D}$-gruppo anche $< x > (Q \times P)/< x > \cap P$. Se ora $z \in P$ e $|z| > |x|$, risulta $< zx > \cap Q < x > = \{1\}$, e dunque i reticoli $[< yx >/\{1\}]$ e $[< yx, zx >/< zx >]$ sono isomorfi, per ogni $y \in Q$. Ma questo non è vero, non appena l'altezza di $< y >$ supera quella di $< x >$, infatti $|yx| = |x|$, mentre $yz^{-1} \in < yx, zx >$.

Sia ora $2 \neq p \in \omega(N/N_1)$; se risulta anche $p \in \omega(N_1)$, vediamo che P, il p-Sylowgruppo di N, è contenuto in $Z(G)$, quindi, essendo P di Hall per (1), il reticolo di G è decomponibile, assurdo. Sia x un elemento di G che non centralizza P, e sia $|x| = q^n$; risulta $q \neq p$, in virtù di (1), perchè $x \notin N$ e $p \neq 2$; inoltre x induce un automorfismo potenza su P, infatti: P è abeliano, ogni $< y > \leq P$ è $\breve{d}$-elemento, per cui $< x, y > = < x > < y >$, e $< x, y > \cap N = < x^t > \times < y >$, abeliano e normale in $< x, y >$. Detto P_1 il massimo sottogruppo divisibile di P, il $\breve{D}$-gruppo $< x > P/P_1$ risulta modulare (3.5), quindi $< x, P_1 > \leq_{\breve{d}} < x, P >$. Non è restrittivo supporre $|x| = q$, infatti si può ragionare modulo $\mathcal{C}(P)$, che è $\breve{d}$-elemento in $< x, P >$. Se $y \in P \setminus P_1$, risulta $< xy > \cap^{<x>} < x > P_1 = \{1\}$, e dunque $[< xz >/\{1\}] \simeq [< xz, xy >/< xy >]$ per ogni $z \in P_1$, assurdo perchè $< xz, xy >$ contiene zy^{-1} che può avere ordine comunque grande, mentre $|xz| = q = |xy|$.

Resta così provato che B è di Hall in G. G/N_1 per 3.5 e per l'osservazione seguente, è modulare. Supponiamo che in G/N_1 un fattore diretto sia un P_0^*-gruppo generalizzato $< x > E/N_1$, con E/N_1 p-gruppo abeliano elementare, $|x| = q^n$. Proviamo che

(3) $E \leq \mathcal{C}(N_1)$.

Supponiamo che un $a \in E$, $|a| = p$, non centralizzi un r-Sylowgruppo R di N_1. R non è un 2-gruppo, perchè $p > 2$ e a induce su R un automorfismo potenza; pertanto, $R \leq B$ è di Hall in G. Nel quoziente sul complemento di R in N_1, abbiamo un $\breve{D}$-gruppo $< x > E$ ove risulta $< a > R \leq_{\breve{d}} < x > E$, per cui $[< a >/\{1\}] \simeq [< a, x >/< x >]$, quindi $< a, x > = < a > < x >$ e infine $< a > \lhd$

$< a , x >$. Inoltre $[< za > / \{ 1 \}] \simeq [< za > \cup < x > / < x >]$, per $z \in R$; se $x \in \mathcal{C}(R)$, allora $< x > \cup < za > \ni x , x^{\partial}$ e dunque anche a, assurdo perchè $< za >$ ha ordine p . Se poi x non centralizza R, la contraddizione sta nel fatto che il gruppo $< z, a > < x >$ ha i sottogruppi di Sylow ciclici, mentre z non centralizza a e x non centralizza nè z nè a . Pertanto $E \leq \mathcal{C}(N_1)$.

Supponiamo ora che x non centralizzi un r-Sylowgruppo R di B ; se $x^{-1} zx = z^m$, per $z \in R$, dimostriamo che $m^q \not\equiv 1$ mod. r. Infatti, se ciò non avviene, non è restrittivo assumere $|z| = r$, e dunque $(xz)^q = x^q$; ma, essendo $< x , R >$ $\breve{d}$-elemento in $< x , E >$, allora $[< xz > / < x^q >] \simeq [< xz , xa > / < xa >]$, il che è assurdo perchè in $< xz , xa >$ c'è un sottogruppo in cui $< xa >$ ha indice p, e uno in cui ha indice r .

Vediamo ora che

(4) un p-gruppo P/N_1 che sia fattore diretto in G/N_1 è ciclico.

Nel caso $p = 2$ e P/B $\breve{D}$-gruppo non modulare, l'affermazione segue da 3.4.

Supponiamo dunque $p \neq 2$, oppure $p = 2$ e P/B modulare. In ogni caso P/B è fattore diretto in G/B . Se fosse $P \leq \mathcal{C}(B)$, il reticolo di G sarebbe decomponibile, quindi esiste un $k \in P$ che non centralizza un r-Sylowgruppo R di B, $|k| = p^n$. Ragioniamo nel quoziente di G sul complemento di R in B, e supponiamo che k^p centralizzi R . Ora supponiamo per assurdo di poter scegliere un elemento g tale che $|g| = p$ e $|< g , k > R/R| = p^{n+1}$. Poichè $< k , R >$ è $\breve{d}$-elemento, è $[< k > / \{ 1 \}] \simeq [< g , k > / < g >]$, quindi $|< g , k >| = p^{n+1}$ e g normalizza $< k >$. Allora possiamo ragionare modulo $< k^p >$, che è $\breve{d}$-elemento. Ora g centralizza k ; essendo anche $[< xk > / \{ 1 \}] \simeq [< xk , g > / < g >]$, g deve centralizzare x per ogni $x \in R$, e infine $[< xk > / \{ 1 \}] \simeq [< xk , gk > / < gk >]$, mentre $< xk , gk >$ contiene gx^{-1} che ha ordine $p|x|$, assurdo. Rimane da escludere la possibilità che P/B sia il gruppo dei quaternioni di ordine 8. Siano a , b generatori di P/B, con $|a| = |b| = 4$. Si possono scegliere a , b in modo che $a^2 = b^2$; infatti se $b^2 = a^2 z$, per $z \in B$, basta prendere per a un opportuno generatore di un sottogruppo di Sylow di $< a , z >$. Allora, essendo $[< a > / < a^2 >] \simeq [< a , b > / < b >]$, risulta $< a , b > \simeq P/B$. Sia R un Sylowgruppo di B che non è nel centro di P ; poichè il gruppo degli automorfismi potenza di R è abeliano, a^2 deve centralizzare R, dunque a induce su R l'inversione. Da $[< az > / < a^2 >] \simeq [< az , b > / < b >]$ segue che $|< az , b >| = 8$,

ossia b induce su az l'inversione, ma allora b centralizza z; sostituendo b con ab, si perviene ad un assurdo.

Vediamo ora che nel gruppo G/B c'è un solo fattore diretto. Innanzitutto, poichè G/N_1 è modulare, e quindi prodotto di gruppi coprimi modulari, allora G/B è prodotto di gruppi coprimi modulari e di un 2-gruppo, che è $\breve{D}$-gruppo non modulare oppure, come si è visto, è ciclico. Infatti non può presentarsi il caso di un P_0^*-gruppo $< x > E/N_1$ con $|x| = 2^n$, se il 2-sottogruppo T di N_1 è non banale. Altrimenti x, dovendo centralizzare gli elementi di ordine 2 in T, deve centralizzare T per la condizione vista in (3). Ma allora, ragionando modulo il complemento di T in N_1, ogni 2-sottogruppo è $\breve{d}$-elemento, essendo contenuto in $< x , T >$ che è abeliano, ogni p-sottogruppo è $\breve{d}$-elemento perchè $E \leq \mathcal{C}(N_1)$, quindi il gruppo $< x , E >$ sarebbe modulare, un assurdo. Ora, se $p \neq q$ sono elementi di $\omega(G/B)$, relativi a fattori distinti, allora ogni p-elemento k centralizza ogni q-elemento g. Infatti, sia $p > q$; risulta $< B , k > \leq_{\breve{d}} G$ e $< B , k > \cap < g > = \{1\}$, quindi $[< g , k > / < g >] \simeq [< k > / \{1\}]$, il che implica $| < g , k > | = |g| \cdot |k|$ e $< g , k > \simeq < g , k > B/B$, abeliano. Allora, siano P/B e Q/B due fattori diretti di G/B; P/B e Q/B possono essere gruppi primari o P_0^*-gruppi; in ogni caso, per quanto visto, esiste un p-elemento $k \in P$ che non centralizza B e tale che $P/B = < k , L > /B$, con $L \leq \mathcal{C}(B)$. Ma se diciamo $B_1 = \mathcal{C}_B(k)$, risulta $B = B_1 \times B_2$, e il sottogruppo S di G generato da tutti i p-elementi è un fattore diretto di Hall in G, che non contiene q-elementi: è di Hall in quanto contiene B_2 e centralizza B_1, ed ogni q-elemento centralizza ogni p-elemento. Allora $\mathfrak{L}(G)$ sarebbe decomponibile, una contraddizione. Anche iii) risulta ora completamente provata, nel senso che x non può centralizzare alcun Sylowgruppo di N_1, altrimenti (essendo anche $E \leq \mathcal{C}(N_1)$) tale sottogruppo sarebbe un sottogruppo di Hall centrale ed $\mathfrak{L}(G)$ sarebbe decomponibile, contro l'ipotesi.

Dimostriamo ora che la condizione è sufficiente. A tale scopo, consideriamo un $\breve{d}$-sottogruppo H di G e un sottogruppo K che sia d-elemento in $[G/H]$; il nostro scopo è provare $K \leq_{\breve{d}} G$. Diciamo N_1 il sottogruppo divisibile di G tale che, nel caso ii), N_1/B sia il massimo sottogruppo divisibile di G/B (tale « massimo » esiste data la struttura del gruppo, cfr. 3.4), negli altri casi $N_1 = B$. È chiaro che ogni sottogruppo di $\mathcal{C}_G(N_1)$ è quasinormale in G, essendo G un (q)-gruppo (cfr. [3]), e $\mathcal{C}_G(N_1)$ abeliano. Allora, per l'osservazione 1, ogni sottogruppo di $\mathcal{C}_G(N_1)$ è $\breve{d}$-elemento e dunque non è restrittivo

supporre $K \nleq \mathcal{C}_G(N_1)$. Allora esiste un $k \in K$ tale che $K = < k , T >$, con $R \leq \mathcal{C}_G(N_1)$; decomponiamo $N_1 = N_2 \times N_3$, ove $k \in \mathcal{C}(N_2)$, mentre k induce su ogni Sylowgruppo di N_3 un automorfismo potenza non identico. Vediamo anzitutto che $K \geq N_3$. Non è restrittivo supporre che N_3 si riduca ad un sottogruppo di Sylow P di N_1, ragionando in un opportuno quoziente; inoltre, sostituendo k con una sua potenza, possiamo supporre che l'automorfismo indotto su P sia di ordine primo q, e ragionare modulo $< k^q >$. Se anche H contiene k, devono essere isomorfi i reticoli $[< k > / \{1\}]$ e $[< k , z > / < hz >]$, per $z \in P$ e $z \notin K$; assurdo per z opportuno. Se H non contiene k, deve essere $[< H , k > / H] \simeq [< H , k , z > / < H , kz >]$, ma $[< H , k , z > / < H , kz >] \simeq [< k , z > / < kz > \cup (H \cap < k , z >)]$; essendo $< k , z > \cap H = < z > \cap H$, per una scelta opportuna di z abbiamo una contraddizione.

Dobbiamo ora provare che $K \leq_{\tilde{d}} G$, sapendo che $K \leq \mathcal{C}(N_2)$ e $N_3 \leq K$. In base alla proposizione 1.5, è sufficiente provare che, dato un insieme finito di elementi di K $k_1 , \dots , k_m$, e dato un insieme finito di elementi di G $h_1 , \dots , h_n$, risulta

(*) $[< k_1 , \dots , k_m > \cup S / S] \simeq [< k_1 , \dots , k_m , h_1 , \dots , h_n > / < h_1 , \dots , h_n >]$,

ove $S = K \cap < h_1 , \dots , h_n >$. Ma chiaramente è sufficiente provare che ogni sottogruppo di K contenente S è permutabile con $< h_1 , \dots , h_n >$, e dunque che $< S , k >$ è permutabile con $< h >$, se $< h > \cap K = S$. Trattiamo anzitutto i primi casi, i) e ii). Se $| k | = q^n$, $k_1^{q^m} = k$ e $< k_1 > N_1 = G$, allora consideriamo $< k_1^\beta y > \cap K$, per $y \in N_1$. Possiamo supporre $| < k_1^\beta y > |$ una potenza di q, dal momento che ogni sottogruppo di N_1 è quasinormale; sia $\beta = q^r \gamma$, con γ primo con q; se $r > m$, allora evidentemente $k_1^\beta y \in K$, poichè K contiene N_3. Se $r \leq m$, allora $(k_1^\beta y)^{q^{m-r}} = k^\gamma y'$, ove $y' \in N_3$, perchè k centralizza N_2. Ma allora nulla cambia sostituendo k con $k^\gamma y'$, e possiamo supporre che $< k_1^\beta y >$ contenga $< k >$; allora un sottogruppo ciclico di K unito con $< k > = S = < k_1^\beta y > \cap K$ dà un gruppo del tipo $< z > < k >$, $z \in N_1$, che è permutabile con $< k_1^\beta y >$, come si voleva. Rimane da trattare il caso iii). Supponiamo dapprima $x \notin K$, ma $x^{q^n} \in K$. Un elemento di R, di ordine potenza di q, è del tipo $x^\alpha a^\beta y$, con $|a| = p$, $y \in B$; naturalmente, se $\alpha \equiv 0$ mod. q, è $\beta \equiv 0$ mod. p. Allora, se $\alpha = q^m \gamma$, γ primo con q, e se $m < n$, risulta $(x^\alpha a^\beta y)^{q^{n-m}} = x^{q^n \gamma} y' \in K$, e si conclude come sopra. Se invece $x \in K$, non possiamo sperare di avere ancora la situazione $S \cup < k >$ permutabile con $< h >$, per ogni $k \in K$; basta pensare $a < x >$ e $< xa >$, che non sono permutabili per $|a| = p$, mentre se $a \notin K$ è $< xa > \cap$

$\cap K = < x^q >$. Dovremo quindi verificare direttamente l'isomorfismo tra i reticoli ($*$) ; osserviamo anzitutto che $N_1 \leq K$, e dunque se nella scrittura di $h_1, \ldots, h_n$ compaiono almeno potenze q-esime di x, il gruppo $< h_1, \ldots, h_n >$ è prodotto di un sottogruppo di K per un sottogruppo (normale) di ordine p^r. Pertanto supporremo $h_1 = x^\alpha ay$ con $a \not\equiv 0$ mod. q, $|a| = p$, $y \in N_1$; non è restrittivo, sostituendo x con $x^\alpha y$, assumere $a = 1$, $y = 1$.

In particolare, il gruppo $\bar{H} = < h_1, \ldots, h_n >$ contiene x^q. Ora, se $h_i = x^\beta a' y'$, con $|a'| = p$, $y' \in N_1$, $\beta \not\equiv 0$ mod. q, risulta $(x^\beta a' y')^q = x^{\beta q} y'^\gamma$ con $(\gamma, |y'|) = 1$ per ipotesi, dunque $y' \in \bar{H}$, ossia il gruppo $\bar{H}$ è generato da xa e da un sottogruppo $E_1 \times B_1$, ove $|E_1| = p^s$, $B_1 \leq B$. Analogamente, un sottogruppo $\bar{K}$ contenuto in K e contenente $S = \bar{H} \cap K$ e $x^\beta bz$, $|b| = p$, $z \in B$, $\beta \not\equiv 0$ mod. q (altrimenti $\bar{K}$ sarebbe permutabile con $\bar{H}$), conterrà in particolare $x^\beta b$, che non è restrittivo assumere uguale a x^β, e dunque $x \in \bar{K}$, per cui $\bar{K} = < x > (E_2 \times B_2)$, $|E_2| = p^t$, $B_2 \leq B$. Dobbiamo ora verificare che risultano isomorfi gli intervalli $[\bar{K}/S]$ e $[\bar{K} \cup \bar{H}/\bar{H}]$ (tramite gli isomorfismi $\varphi^{\bar{H}}$ e $\varphi_{\bar{K}}$). A tale scopo, verifichiamo che per $S \leq X \leq \bar{K}$ risulta $(X \cup \bar{H}) \cap K \leq X$ (condizione sufficiente per l'iniettività di $\varphi^{\bar{H}}$) ; poichè questo è ovvio se X è permutabile con $\bar{H}$, supponiamo che anche X sia del tipo $< x > (E_2 \times B_2)$; allora un elemento di $\big(< x > (E_2 \times B_2) \cup < ax > (E_1 \times B_1)\big) \cap K = (< x, a > \big((E_1 \cup E_2) \times (B_1 \cup B_2)\big) \cap K$ è del tipo $x^\alpha a^\beta cy \in K$ con $c \in E_1 \cup E_2$, $y \in B_1 \cup B_2 \leq K$, e dunque $a^\beta c \in K$. Poichè $B_1 \leq K$, allora $B_1 \leq \bar{H} \cap K = S \leq \bar{K}$, dunque $B_1 \leq B_2$. Per concludere che $x^\alpha a^\beta cy \in < x > (E_2 \times B_2)$, basterà quindi provare che $a^\beta c \in E_2$. Consideriamo a tale scopo il p-Sylowgruppo A di K, abeliano elementare. Poichè il gruppo $< x, A \cup E_1 \cup < a > >$ è modulare, e poichè $< xa > E_1 \cap < x > A \leq < x > E_2$, risulta $(< x > E_2 \cup < xa > E_1) \cap < x > A = < x > E_2$, come si voleva. Per provare la suriettività di $\varphi^{\bar{H}}$, scelto un $X = < ax > (E_3 \times B_3)$, tale che $< ax > (E_1 \times B_1) \leq X \leq < a, x > (E_1 E_2) \times (B_1 B_2)$, vediamo che risulta $B_3 \leq B_2$ e dunque $(B_3 \cap \bar{K}) \cup B_1 = B_3$; per gli elementi di $< ax > E_3$, si ragiona come sopra nel gruppo modulare $< x, a, A, E_1 >$.

3.8. Teorema. Sia G un gruppo iperciclico periodico. G è un $\check{D}$-gruppo se e solo se è un prodotto (discreto) di una famiglia $\{R_i\}$ di sottogruppi di Hall in G, ove R_i è un p-gruppo modulare o un P_o^*-gruppo (generalizzato), oppure ha la struttura descritta in 3.7.

DIMOSTRAZIONE. Si applica 1.4 ad una decomposizione di $\mathfrak{L}(G)$ in reticoli indecomponibili, e si conclude usando 3.7.

4. – $\breve{D}$-gruppi misti iperciclici.

È conveniente distinguere in due classi i gruppi misti: quelli separati, in cui l'insieme degli elementi periodici è un sottogruppo (e che sono dunque generati dagli elementi aperiodici), e quelli non separati.

Osserviamo che un gruppo iperciclico misto e separato G possiede un sottogruppo finito e non identico che sia $\breve{d}$-elemento; infatti il sottogruppo T generato dagli elementi periodici è normale in G, quindi esiste un sottogruppo normale ciclico, e non identico, contenuto in T ([1], Lemma 2); questo sottogruppo è un $\breve{d}$-elemento finito.

4.1. TEOREMA. Sia G un gruppo misto iperciclico, separato. G è un $\breve{D}$-gruppo se e solo se è modulare, oppure:

i) il sottogruppo periodico T di G è abeliano,

ii) G/T è abeliano di rango uno,

iii) ogni elemento aperiodico $g \in G$ induce sul p-Sylowgruppo T_p di T un automorfismo potenza $\alpha_p : x \longmapsto x^{m_p}$ tale che $m_p \equiv 1$ mod. p, $m_2 \not\equiv 1$ mod. 4 e T_2 è divisibile.

DIMOSTRAZIONE. Proviamo dapprima la necessità della condizione. Sia N il sottogruppo di G unione di tutti i sottogruppi ciclici finiti che sono $\breve{d}$-elementi, M il sottogruppo tale che M/N sia l'unione di tutti i sottogruppi ciclici finiti di G/N che sono $\breve{d}$-elementi. Il $\breve{D}$-gruppo G/M è aperiodico in virtù di 3.6, perciò abeliano (2.3), M è un $\breve{D}$-gruppo periodico. Proviamo che M è abeliano.

Decomposto M nel prodotto diretto di gruppi coprimi reticolarmente indecomponibili, se uno di tali gruppi, diciamolo R, è modulare, allora, modulo il complemento di R in M, ogni sottogruppo ciclico di R è $\breve{d}$-elemento; ma allora è normalizzato da ogni elemento aperiodico: infatti se a è aperiodico e $< g >$ è finito, nel gruppo $< a , g >$ anche il gruppo $< g > \cup < g >^a$ è $\breve{d}$-elemento, ma allora $[< a , g > / < a >] \simeq [< g > / \{1\}] \simeq [< g > \cup < g >^a / \{1\}]$; e dunque $< g >$ è normale. Allora, essendo il gruppo generato dagli ele-

menti aperiodici, ogni sottogruppo di R è normale, pertanto R è abeliano o Hamiltoniano. Poichè un gruppo Hamiltoniano è privo di automorfismi potenza, non è possibile che R sia Hamiltoniano, altrimenti sarebbe centralizzato dagli elementi aperiodici, e dunque nel centro di G. Supponiamo ora che R sia del tipo descritto in 3.7, quindi $R = < k > EN_1$, ove N_1 è divisibile (e coincide con il sottogruppo B nei casi i) e iii) di 3.7, mentre nel caso ii) N_1/B è il massimo sottogruppo divisibile di R/B), $|k| = q^n$, E è un p-gruppo, $p > q$, eventualmente identico. Consideriamo un $\breve{D}$-gruppo $<a>$ ($< k > EN_1$), con a aperiodico; non è restrittivo supporre che a centralizzi $<k> EN_1/N_1$, sostituendo eventualmente a con una sua potenza opportuna. Allora $<a> N_1 \leq_{\breve{d}} <a, k> EN_1$; ragionando modulo $< k > \cap N_1$, si ha $[< a > / \{1\}] \simeq [< a, k > / < k >]$, reticolo di un gruppo infinito, e dunque $< k >^a$ non può essere diverso da $< k >$ in quanto il gruppo $< k > \cup < k >^a$ è finito. Ma allora $< k >$ deve essere normale in $< k > N_1$, assurdo. Pertanto il sottogruppo di torsione $M = T$ di G è abeliano; inoltre ogni elemento aperiodico induce su T un automorfismo potenza. Se ora $p \neq 2$ e P è il p-Sylowgruppo di T, nel quoziente di G sul complemento di P in T consideriamo il $\breve{D}$-gruppo $< a > P$, con a apedico. Se a non induce su P una potenza $m \equiv 1$ mod. p, esiste un r primo con p tale che a induca su P una tale potenza ([8], 4.1.2). Allora $< a^r, P >$ è un gruppo quasi-Hamiltoniano, e dunque ogni suo sottogruppo è $\breve{d}$-elemento. Se $x \in P$, $|x| = p$, risulterà dunque $[< x a^r > / < a^{rp} >] \simeq [< xa^r, a^p > / < a^p >]$ un reticolo di lunghezza l. Ma, detti l ed n due numeri interi tali che $lr + np = 1$, si ha $(xa^r)^l a^{np} = x^l a^{rl} a^{np} = x^l a \in < xa^r, a^p >$; ora, se $a^{-1} xa = x^m$, risulta $(x^l a)^p = x^{l(1+m+\ldots+m^{p-1})} a^p$; ma $1 + m + \ldots + m^{p-1} = \dfrac{m^p - 1}{m - 1} \not\equiv 0$ mod. p, infatti $m^p \equiv m \not\equiv 1$ mod. p; allora $< xa^r, a^p >$ contiene $< x >$, e dunque anche $< a >$, quindi ci sono due gruppi diversi che contengono $< a^p >$, assurdo. Se ora P è un 2-gruppo, a centralizza i sottogruppi di ordine 2, poichè li normalizza; se la potenza indotta da a non è $\equiv 1$ mod. 4, deve risultare anzitutto $P^2 = P^4$, altrimenti il $\breve{D}$-gruppo periodico $< a, P > / < a^2, P^4 >$ non sarebbe modulare pur avendo esponente finito. Ora, se ci fosse un elemento $y \in P$ di ordine 2 non appartenente a P^2, essendo $< a, P^2 > \leq_{\breve{d}} < a, P >$ ($< a, P > / P^2$ è abeliano) dovrebbe risultare $[< ax > / < a^2 >] \simeq [ax, ay > / < ay >]$ per ogni $x \in P^2$, con $|x| = 4$, mentre $< ax, ay >$ contiene xy^{-1}, che ha ordine 4.

Proviamo ora che, se G non è abeliano, G/T ha rango uno. Sia a un elemento aperiodico che non centralizza T, e supponiamo per assurdo che esista un elemento aperiodico b tale che $< a > \cap < b > = \{1\}$. Possiamo supporre che $< b , T >$ sia quasi-Hamiltoniano, sostituendo eventualmente b con b^2. Risulta quindi $< bx > \leq_{\breve{d}} G$ per ogni $x \in T$; ora, se $a^{-1} ba = bt$ con $1 \neq t \in T$, risulta $t \in < a, b >$, mentre il reticolo $[< a , b > / < a >] \simeq [< b > / \{1\}]$ deve essere il reticolo di un gruppo ciclico infinito. Pertanto a centralizza b, e analogamente centralizza bx per ogni $x \in T$, il che è assurdo perchè ne segue che a centralizza T.

Sufficienza della condizione: consideriamo un gruppo G, non modulare e soddisfacente a i)-iii). Siano $H \leq_{\breve{d}} G$ e K $\breve{d}$-elemento in $[G/H]$. Proviamo che, se $K \nleq G^2$, allora K contiene il 2-Sylowgruppo P di T. K contiene un elemento aperiodico a che induce su P una potenza $\not\equiv 1$ mod. 4, e supponiamo che K non contenga x^2, $|x| = 4$. Se $a \in H$, risulta $[< a > / < a^2 >] \simeq [< a , ax > / < ax >]$, assurdo; allora sia $H \leq G^2$, e dunque $H \leq_q G$ ([4], Teorema 1.3). Dimostriamo che $< ax > \cap H = < a , x > \cap H$; infatti da $< a x > \cap H \lneq < a , x > \cap H$ segue $(< a , x > \cap H) \cup < ax > = < a , x > \cap (H \cup < ax >) \geq < ax , x^2 > \gneq < ax >$. Ma da $x^2 \in H \cup < ax >$ segue $x^2 = h(ax)^m$; se $(m , 2) \neq 1$, $x^2 = ha^m$ implica $x^2 \in K$, contro l'ipotesi se invece $(m , 2) = 1$, $x^2 = ha^m x$ e dunque $x \in K$, ancora contro l'ipotesi. Allora, essendo H un elemento di Dedekind, il reticolo $[< a , x > \cup H / < ax > \cup H] \simeq [< a , x > / < ax >]$ ha lunghezza due, mentre il reticolo $[< a > \cup H / < a^2 > \cup H]$ ha lunghezza minore di o uguale a uno, e dunque K, che contiene $< a >$, non può essere un $\breve{d}$-elemento in $[G/H]$. K deve pertanto contenere tutti gli elementi di ordine 2, ma lo stesso ragionamento vale in $G/\Omega_1(P)$, e per induzione si conclude $K \geq P$. Ora. per provare $K \leq_{\breve{d}} G$, in base alla proposizione 1.5 è sufficiente provare che, dato un insieme finito $h_1 , \dots , h_n$ di elementi di G, e posto $S = K \cap < h_1 , \dots , h_n >$, e dato un insieme finito di elementi di K $k_1 , \dots , k_m$, risulta $[< k_1 , \dots , k_m > \cup S / S] \simeq [< h_1 , \dots , h_n , k_1 , \dots , k_m > / < h_1 , \dots , h_n >]$. Ma chiaramente è sufficiente provare che ogni sottogruppo di K contenente S è permutabile con $< h_1 , \dots , h_n >$, e dunque che $< S , k >$ è permutabile con $< h >$, se $< h > \cap K = S$. Sia dunque $< h > \nleq G^2$ (altrimenti $< h > \leq_q G$), e anche $< k > \nleq G^2$, per cui h e k soso due elementi aperiodici. Poichè $< h , k > T/T$ è ciclico, sarà $h = c^r$, $k = c^s t$, con c aperiodico, $t \in T$, $(r , 2) = (s , 2) = 1$. Sia $t = t_1 t_2$, con $(|t_1| , |t_2|) = 1$, $|t_2|$ una potenza di 2. Poichè

$K \geq P$, allora $K \cap < h > \geq < c^{sm} >$, con m numero dispari opportuno tale che $(c^s t_1)^m = c^{sm} = c^{rn}$. Ma allora $< k > \cup S$ contiene $(c^s t_1 t_2)^m = c^{sm} t_2^{\alpha^{m-1}+\ldots+\alpha+1}$, se $c^{-s} t_2 c^s = t_2^{\alpha}$; essendo per ipotesi $a = -1 + 4\beta$, si avrà $t_2^{\alpha^{m-1}+\ldots+\alpha+1} = (t_2 t_2^{-1+4\beta})^{1+\gamma\ldots+\gamma^{(m-1)/2}} t_2$, e dunque $< k > \cup S$ contiene t_2, ossia $< k > \cup S = < c^s t_1 > < t_2 > S$; ma $< h >$ è permutabile con S, con $< t_2 >$ che è normale, e con $< c^s t_1 >$ perchè $c^s t_1$ e h sono contenuti nel gruppo $< c > < t_1 >$, quasi-Hamiltoniano. Si è quindi dimostrato che $K \leq_{\breve{d}} G$.

4.2 Teorema. Sia G un gruppo iperciclico misto non separato. G è $\breve{D}$-gruppo se e solo se G è un (q)-gruppo del tipo $< c, A >$, con A gruppo (misto) divisibile, $|c| = 2^m$, $c^{-1}ac = a^{-1}$ per ogni $a \in A$.

Dimostrazione. Proviamo dapprima la necessità della condizione. Sia N il sottogruppo di G generato da tutti i $\breve{d}$-sottogruppi ciclici finiti, M il sottogruppo tale che M/N sia generato da tutti i $\breve{d}$-sottogruppi ciclici finiti di G/N. Allora G/M non ha $\breve{d}$-sottogruppi ciclici finiti, ed è un gruppo misto, altrimenti G sarebbe separato. Poniamo, per comodità, $M = \{1\}$, e consideriamo una serie ascendente di G, invariante e a fattori ciclici, $\{G_\alpha\}_{\alpha \leq \gamma}$; sia β_o il minimo ordinale tale che G_{β_o} contiene un elemento periodico; chiaramente $\beta_o = \beta + 1$, e non è restrittivo assumere $|G_{\beta_o}/G_\beta| = p$, numero primo. Deve risultare $p = 2$ ([1]), e se $c \in G_{\beta_o}$, con $|c| = 2$, allora c induce un automorfismo potenza non identico su G_β (2.2, caso a)). G_β è divisibile, infatti se $G_\beta^q \neq G_\beta$ per qualche numero primo q, allora $< c, G_\beta > / G_\beta^q$ è $\breve{D}$-gruppo di esponente finito, quindi modulare, e dunque $< c, G_\beta^q >$ è $\breve{d}$-elemento, ma allora $[< c > / \{1\}] \simeq [< c, ca > / < ca >]$, reticolo infinito, non appena $a \notin G_\beta^q$ e a è aperiodico, assurdo. Vediamo ora che $|G : G_\beta| = 2$; infatti, se b è tale che $< b > G_{\beta o}/G_{\beta o}$ sia aperiodico, e normale in $G/G_{\beta o}$, allora al più b^2 centralizza G_β, e dunque si avrebbe il $\breve{D}$-gruppo $< c, < b^2 > \times G_\beta >$ con $< b^2 > \times G_\beta$ non divisibile, assurdo per quanto visto. Supponiamo dunque che vi sia un $\breve{D}$-gruppo $< b, c, G_\beta >$ con $| < b, c, G_\beta > / G_\beta > | = 2q$. Sia $q \neq 2$; $< b, G_\beta >$ è un $\breve{D}$-gruppo; non è aperiodico per quanto visto sopra, infatti non è divisibile; allora contiene un elemento di ordine q, ed è abeliano (2.2, caso a)), assurdo perchè ci sarebbe un $\breve{d}$-elemento ciclico finito in G/M. Sia $q = 2$. Ogni 2-Sylowgruppo di $< b, c, G_\beta >$ deve avere ordine 2, perchè se avesse ordine 4 ci sarebbe un 2-elemento che centrallizza G_β, e allora dovrebbe stare in M. $< b, G_\beta >$ è un $\breve{D}$-gruppo, e dunque non può

essere aperiodico ; sia dunque d un elemento periodico in $< b , G_\beta >$; sarà $|d| = 2$. Se ora $c^{-1} dc = da$, con a aperiodico $\neq 1$, e se $a_1^2 = a$, allora $|da_1| = 2$ e $c^{-1}(da_1)\, c = daa_1^{-1} = da_1$, così $< da_1 >$ è normalizzato da c, assurdo perchè darebbe luogo a un gruppo di ordine 4. Togliamo ora l'ipotesi $M = \{1\}$, e consideriamo il gruppo R tale che $R/M = G_\beta$; R è un $\breve{D}$-gruppo misto e separato, quindi sappiamo che la sua parte periodica è abelliana ; proviamo che R è abeliano. Se P è un p-Sylowgruppo di R con $p \neq 2$, possiamo considerare il gruppo quoziente rispetto al complemento di P in M ; $< c > \cap P = \{1\}$, c normalizza ogni sottogruppo di P (tali sottogruppi sono $\breve{d}$-elementi), dunque induce su P l'inversione. Ora $< a , P > \leq_{\breve{d}} G$ per ogni $a \in R$ aperiodico. Non può essere $c^{-1}ac = a^{-1} t$ con $1 \neq t \in P$, altrimenti risulterebbe $[< a > / \{1\}] \neq [< a , c > / < c >]$. Quindi, per a aperiodico qualunque, c induce l'inversione su ta e dunque a centralizza t. Vediamo ora che $R^p = R$, ossia P è divisibile (ricordiamo che R/P era divisibile). Infatti, se $y \in R \setminus R^p$ è periodico, e se $a \in R^p$ è aperiodico, da $< c , R^p > \leq_{\breve{d}} G$ segue $[< ca > / \{1\}] \simeq [< ca , cy > / < c\, y >]$, mentre cy ha ordine 2 e $< ca , cy >$ contiene $y^{-1} a$, aperiodico. Supponiamo ora che P sia il 2-Sylowgruppo di R ; ragioniamo anzitutto modulo $< c^2 > = < c > \cap P$. Applicando lo stesso ragionamento usato nel caso $p \neq 2$, e osservando che c induce su P l'inversione perchè induce l'inversione su ta, per ogni $t \in P$ e a aperiodico, in particolare un a che centralizza t, si conclude che R è abeliano ed $R^2 = R$. Abbandoniamo ora l'ipotesi $c^2 = 1$. Di nuovo R è abeliano ; infatti essendo $< c^2 >$ un sottogruppo normale finito ed $R / < c^2 >$ divisibile, si ha $< c^2 > \leq Z(R)$; ora per $x , y \in R$ e $x_1^n c^{2\alpha} = x$, ove $n = |c^2|$, è $x^{-1} yx = x_1^{-n} yx_1^n = y$. Allora $R = A \times < d >$, ove A è il massimo sottogruppo divisibile di R, $c^{-1}ac = a^{-1}$ per ogni $a \in A$ ed ogni sottogruppo di R è $\breve{d}$-elemento, e di conseguenza quasinormale in G (i sottogruppi finiti di ordine dispari sono normali, quelli di ordine pari sono normalizzati dagli elementi di R e sono quasinormali nei 2-gruppi ; se $< x >$ è aperiodico, allora x è centralizzato dagli elementi di R, mentre se y è un 2-elemento, allora $< x^{|d|} >$ è normalizzato da y, $< x , y > / < x^{|d|} >$ è un 2-gruppo, quindi $< x >$ è quasinormale in esso.). Quindi G è un (q)-gruppo ([4], sufficienza del teorema 2.3).

Sufficienza della condizione. Siano $H \leq_{\breve{d}} G$, K $\breve{d}$-elemento in $[G/H]$; dal momento che ogni sottogruppo di $\mathcal{C}_G(A)$ è $\breve{d}$-elemento in G, essendo G (q)-gruppo e $\mathcal{C}_G(A)$ abeliano, supponiamo $c \in K$, e dimostriamo che allora $K \geq A$, ossia $K = G$. Infatti, se anche H

contiene c, dato un elemento aperiodico $a \in A$, se $a \notin H$ è $[<c>/<c^2>] \simeq [<a, c>/<ac>]$, assurdo. Supponiamo invece $H \leq \mathfrak{C}_G(A)$, e ragioniamo modulo $<c^2>$. Supponiamo $a \notin K$, $a \in A$. Dovendo risultare $[<H, c>/<c^2, H>] \simeq [<H, c, a>/<H, ca>]$ ed essendo $H \leq_q G$, si ha pure $[<H, c, a>/<H, ca>] \simeq [<c, a>/<ca> \cup (<a> \cap H)]$; quindi $a^p \in H$ per qualche numero primo p dipendente da a; ma allora $A \leq H$, come si voleva.

BIBLIOGRAFIA

[1] R. Baer, *Supersoluble groups*, Proc. Amer. Math. Soc., **6** (1955), pp. 16-32.

[2] G. Birkhoff, *Lattice Theory*, Amer. Math. Soc. (1967).

[3] F. Menegazzo, *Gruppi nei quali la relazione di quasi-normalità è transitiva*, Rend. Sem. Mat. Padova, **40** (1968), pp. 1-15.

[4] F. Menegazzo, *Gruppi nei quali la relazione di quasi-normalità è transitiva*, II, Rend. Sem. Mat. Padova, **42** (1969), pp. 389-399.

[5] F. Menegazzo, *Dual-Dedekind subgroups in finite groups*, Rend. Sem. Mat. Padova, **45** (1971), pp. 99-111.

[6] E. Previato, *Gruppi in cui la relazione di Dedekind è transitiva*, Rend. Sem. Mat. Padova, **54** (1975), pp. 215-229.

[7] D. J. S. Robinson, *Finiteness conditions and generalized soluble groups*, Erg. der Mathematik, Band 62, Springer Verlag, Berlin.

[8] D. J. S. Robinson, *Groups in which normality is a transitive relation*, Proc. Cambridge Phil. Soc., 60, part 1 (1964), pp. 21-38.

[9] M. Suzuki, *Structure of a group and the structure of its lattice of subgroups*, Springer (1958).

[10] H. Zassenhaus, *The theory of groups*, Chelsea (1958).

Manoscritto pervenuto in redazione il 1° settembre 1977 e in forma revisionata il 29 maggio 1978.