Rendiconti
del
Seminario Matematico
della
Università di Padova

Renato Zanovello

Integrali di funzioni di Anger, Weber ed Airy-Hardy

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 58 (1977), p. 275-285
<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1977__58__275_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 58 (1977)

Integrali di funzioni di Anger, Weber ed Airy-Hardy (**)

RENATO ZANOVELLO (*)

SUNTO - In questo lavoro vengono esaminati gli integrali che si presentano in questioni di matematica applicata:

$$\int_0^\infty Ei_n(x)\,dx\,,\int_0^\infty x^{\lambda-1}\,\boldsymbol{J}_\nu(x)\,dx\,,\int_0^\infty x^{\lambda-1}\,\boldsymbol{E}_\nu(x)\,dx\,,$$

ove i simboli sono specificati nel contesto del lavoro stesso.

Per la risoluzione di alcuni problemi fisici, si fa ricorso agli integrali di Airy-Hardy [1, p. 320 e segg.]; in relazione ad essi, esamino nel presente lavoro, l'integrale

$$\int_0^\infty Ei_n\,(x)\,dx \quad , \quad (n = 2\,,3\,,4,\ldots) \;, \tag{1}$$

ove

$$Ei_n(x) = \int_0^\infty e^{-T_n(t,x)}\,dt\,, \tag{2}$$

(*) Indirizzo dell'A.: Centro di Calcolo Scientifico, Università - Via Belzoni 7 - Padova.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito dei Gruppi di Ricerca Matematica del C.N.R.

$$T_n(t, x) = t^n \, {}_2F_1\left(-\frac{n}{2}, \frac{1-n}{2}; 1-n; -\frac{4x}{t^2}\right), \tag{3}$$

e ove ${}_2F_1$ indica la classica funzione ipergeometrica di Gauss. Ricordo che $Ei_n(z)$ è una funzione intera di z.

Noto subito che dalle (2), (3) e' :

$$Ei_n(0) = \frac{1}{n} \Gamma\left(\frac{1}{n}\right). \tag{4}$$

Per la soluzione del mio problema, sarà necessario valutare preliminarmente anche gli integrali $\int_0^\infty x^{\lambda-1} \boldsymbol{J}_\nu(x)\, dx$, $\int_0^\infty x^{\lambda-1} \boldsymbol{E}_\nu(x)\, dx$, che non mi risultano esplicitati in letteratura, con il significato dei simboli specificato nel § 1.

§ **1.** Innanzitutto considero allora, in generale, i seguenti integrali :

$$\int_0^\infty x^{\lambda-1} \boldsymbol{J}_\nu(x)\, dx \quad , \quad \int_0^\infty x^{\lambda-1} \boldsymbol{E}_\nu(x)\, dx, \tag{5}$$

ove $\boldsymbol{J}_\nu(x)$ ed $\boldsymbol{E}_\nu(x)$ indicano rispettivamente le classiche funzioni di Anger e di Weber [1, p. 308 e segg.], con ν reale e λ variabile nell'intervallo aperto $(0, 3/2)$.

Comincio dal primo dei due integrali che figurano in (5) e ricordo che è, in generale :

$$\boldsymbol{J}_\nu(x) = \frac{\sin(\nu\pi)}{\pi}\left[-\nu \cdot s_{-1,\nu}(x) + s_{0,\nu}(x)\right], \tag{6}$$

ove $s_{-1,\nu}$ e $s_{0,\nu}$ indicano particolari funzioni di Lommel [1, p. 345 e segg.].

Distinguo quattro casi:

I) $\lambda \neq 1\,, \nu \neq 0\,, \pm 1\,, \pm 2\,, \dots$

Moltiplico ambo i membri di (6) per $x^{\lambda-1}$ ed integro in $(0\,,\infty)$; ottengo, tenuto conto di [2]:

$$(7)\quad \int_0^\infty x^{\lambda-1}\, \boldsymbol{J}_\nu(x)\, dx = -\frac{\nu\, sin(\nu\pi)}{\pi}\, \frac{\Gamma\left(\frac{\lambda}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{\lambda}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\Gamma\left(-\frac{\nu}{2}\right)}{2^{3-\lambda}\Gamma\left(1+\frac{\nu-\lambda}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{\nu+\lambda}{2}\right)} +$$

$$+\frac{sin(\nu\pi)}{\pi}\, \frac{\Gamma\left(\frac{1+\lambda}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-\lambda}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-\nu}{2}\right)}{2^{2-\lambda}\Gamma\left(1+\frac{\nu-\lambda}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{\nu+\lambda}{2}\right)}\,.$$

II) $\lambda \neq 1\,, \nu = 0\,, \pm 1\,, \pm 2\,, \dots$

Poichè è [3]:

$$(8)\qquad \boldsymbol{J}_\nu(x) = J_\nu(x)\,, \qquad (\nu = 0\,, \pm 1\,, \pm 2, \dots)\,,$$

ove $J_\nu(x)$ è la classica funzione di Bessel di prima specie, ricavo per ν intero positivo o nullo:

$$(9)\qquad \int_0^\infty x^{\lambda-1}\, \boldsymbol{J}_\nu(x)\, dx = \frac{2^{\lambda-1}\,\Gamma\left(\frac{\nu+\lambda}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu-\lambda}{2}+1\right)}\,,$$

come risulta mediante la formula [3, p. 49].

Per ν intero negativo, ricordo che è

$$(10)\qquad J_\nu(x) = (-1)^{-\nu}\, J_{-\nu}(x)\,,$$

dal che deduco che, in tale circostanza, posso scrivere:

$$(11)\quad \int_0^\infty x^{\lambda-1} J_\nu(x)\,dx = (-1)^{-\nu}\int_0^\infty x^{\lambda-1}\, J_{-\nu}(x)\,dx = (-1)^{-\nu}\frac{2^{\lambda-1}\Gamma\left(\dfrac{\lambda-\nu}{2}\right)}{\Gamma\left(1-\dfrac{\lambda+\nu}{2}\right)}\,.$$

III) $\lambda = 1\,, \nu = 0\,, \pm 1\,, \pm 2\,, \ldots$

In questo caso, per ν intero positivo o nullo, posso scrivere, ricordando la (8) ed un noto risultato [4, p. 486]:

$$(12)\qquad \int_0^\infty J_\nu(x)\,dx = 1\,,$$

mentre, per ν intero negativo, tenendo presente anche la (10), ho:

$$(13)\qquad \int_0^\infty J_\nu(x)\,dx = (-1)^{-\nu}\int_0^\infty J_{-\nu}(x)\,dx = (-1)^{-\nu}\,.$$

IV) $\lambda = 1\,, \nu \neq 0\,, \pm 1\,, \pm 2\,, \ldots\,.$

In tal caso, il primo integrale che figura in (5) diverge, come si può vedere dalla (6), ricordando noti teoremi e tenendo presente che per [2], $\int_0^\infty s_{-1,\nu}(x)\,dx$ converge, mentre $\int_0^\infty s_{0,\nu}\,(x)\,dx$ diverge.

§ 2. Passo ora all'esame del secondo integrale di (5), ricordando che è, in generale [1, p. 310]:

$$(14)\quad E_\nu(x) = \frac{\nu\,[\cos\,(\nu\pi) - 1]}{\pi}\,s_{-1,\nu}(x) - \frac{1+\cos\,(\nu\pi)}{\pi}\,s_{0,\nu}(x)\,,$$

con il solito significato dei simboli.

Anche ora distinguerò i seguenti casi:

I') $\lambda \neq 1, \nu \neq 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Moltiplicando ambo i membri di (14) per $x^{\lambda-1}$ ed integrando successivamente in $(0, \infty)$, ricavo, tenendo conto di [2]:

$$\int_0^\infty x^{\lambda-1} \boldsymbol{E}_\nu(x)\, dx = \frac{\nu\,[\cos(\nu\pi) - 1]}{\pi} \frac{\Gamma\left(\frac{\lambda}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{\lambda}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\Gamma\left(-\frac{\nu}{2}\right)}{2^{3-\lambda}\Gamma\left(1+\frac{\nu-\lambda}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{\nu+\lambda}{2}\right)} -$$

(15)

$$-\frac{1+\cos(\nu\pi)}{\pi} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1+\lambda}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-\lambda}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-\nu}{2}\right)}{2^{2-\lambda}\Gamma\left(1+\frac{\nu-\lambda}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{\nu+\lambda}{2}\right)}.$$

II') $\lambda \neq 1, \nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Dalla definizione della funzione di Weber:

$$\boldsymbol{E}_\nu(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin(\nu\vartheta - x\sin\vartheta)\, d\vartheta,$$

ricavo, tenuto conto rispettivamente di [5, p. 401, (7) e (5)], per ν pari positivo, negativo o nullo:

$$\boldsymbol{E}_\nu(x) = -\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin(x\sin\vartheta)\cos(\nu\vartheta)\, d\vartheta \tag{16}$$

e per ν dispari positivo:

$$\boldsymbol{E}_\nu(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(x\sin\vartheta)\sin(\nu\vartheta)\, d\vartheta, \tag{17}$$

mentre per ν dispari negativo, posso scrivere:

$$\boldsymbol{E}_\nu(x) = -\boldsymbol{E}_{-\nu}(x)\,. \tag{18}$$

Per note formule che legano gli integrali di (16) e (17) alle funzioni $s_{0,\nu}(x)$ e $s_{-1,\nu}(x)$ [1, p. 310], ottengo dalla (16), tenendo conto che ν è pari positivo, negativo o nullo:

$$\boldsymbol{E}_\nu(x) = -\frac{2}{\pi}\, s_{0,\nu}(x)\,, \tag{19}$$

e dalla (17), ove è ν dispari positivo:

$$\boldsymbol{E}_\nu(x) = -\frac{2\nu}{\pi}\, s_{-1,\nu}(x)\,. \tag{20}$$

Ciò premesso, ricordando [2], dalla (19) ricavo per ν pari positivo, negativo o nullo:

$$\int_0^\infty x^{\lambda-1}\boldsymbol{E}_\nu(x)\,dx = -\frac{2}{\pi}\int_0^\infty x^{\lambda-1}\, s_{0,\nu}(x)\,dx = \tag{21}$$

$$= -\frac{1}{\pi}\,\frac{\Gamma\left(\frac{1+\lambda}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-\lambda}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-\nu}{2}\right)}{2^{1-\lambda}\,\Gamma\left(1-\frac{\lambda+\nu}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{\lambda-\nu}{2}\right)}\,,$$

e dalla (20) ottengo per ν dispari positivo:

$$\int_0^\infty x^{\lambda-1}\boldsymbol{E}_\nu(x)\,dx = -\frac{2\nu}{\pi}\int_0^\infty x^{\lambda-1}\, s_{-1,\nu}(x)\,dx = \tag{22}$$

$$= -\frac{\nu}{\pi}\,\frac{\Gamma\left(\frac{\lambda}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{\lambda}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\Gamma\left(-\frac{\nu}{2}\right)}{2^{2-\lambda}\,\Gamma\left(1-\frac{\lambda+\nu}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{\lambda-\nu}{2}\right)}\,,$$

mentre per ν dispari negativo, tenendo presente la (18), ritrovo la coincidenza tra primo e terzo membro della (22).

Pertanto le (21), (22) risolvono completamente il presente caso.

III') $\lambda = 1 , \nu = 0 , \pm 1 , \pm 2 , \dots$

Dalla (19), integrando e tenendo conto al solito di [2], ricavo che per ν pari positivo, negativo o nullo, il secondo integrale di (5) con $\lambda = 1$ è divergente. Invece, per ν dispari positivo o negativo, dalla (20), tenuto conto eventualmente di (18) ed applicando la solita formula citata, ottengo che il secondo integrale di (5) con $\lambda = 1$ è nullo.

IV') $\lambda = 1 , \nu \neq 0 , \pm 1 , \pm 2 , \dots$

In questo caso, il secondo integrale che figura in (5) diverge, tenuto conto di (14) e delle considerazioni svolte nell'analogo caso IV) del § 1.

§ **3.** Ciò premesso, al fine della valutazione di (1), distinguerò due casi, a seconda che n sia pari o dispari.

Per n pari, è noto che per x positivo, è [1, p. 321]:

$$Ei_n(x) = \frac{2x^{\frac{1}{2}}}{n} K_{\frac{1}{n}} \left(2x^{\frac{n}{2}}\right), \tag{23}$$

dove $K_\nu(z)$ indica al solito, la funzione di Macdonald. Tenendo conto delle proprietà delle funzioni che figurano in (23), posso scrivere:

$$\int_0^\infty Ei_n(x)\, dx = \frac{2}{n} \int_0^\infty x^{\frac{1}{2}} K_{\frac{1}{n}} \left(2x^{\frac{n}{2}}\right) dx = \tag{24}$$

$$= \frac{1}{n^2 \cdot 2^{\frac{3}{n}-2}} \int_0^\infty t^{\frac{3}{n}-1} K_{\frac{1}{n}}(t)\, dt = \frac{1}{n^2} \Gamma\left(\frac{2}{n}\right) \Gamma\left(\frac{1}{n}\right) \cdot$$

§ **4.** Per n dispari, sempre per x positivo, è [1, p. 323]:

$$(25)\qquad Ei_n(x) = \frac{\pi x^{\frac{1}{2}}}{n}\left\{ tg\left(\frac{\pi}{2n}\right) \boldsymbol{J}_{\frac{1}{n}}\left(2x^{\frac{n}{2}}\right) - \boldsymbol{E}_{\frac{1}{n}}\left(2x^{\frac{n}{2}}\right)\right\} +$$

$$+ \frac{\pi x^{\frac{1}{2}}}{n \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}\left\{ J_{-\frac{1}{n}}\left(2x^{\frac{n}{2}}\right) - J_{\frac{1}{n}}\left(2x^{\frac{n}{2}}\right)\right\},$$

ove J_ν, $\boldsymbol{J}_\nu$ ed $\boldsymbol{E}_\nu$ hanno il significato già detto nel § 1.

Tenendo conto delle proprietà delle funzioni che figurano in (25), ricavo, dopo aver posto, come in (24), $x = \left(\frac{t}{2}\right)^{\frac{2}{n}}$:

$$\int_0^\infty Ei_n(x)\,dx = \frac{\pi}{n^2}\, tg\left(\frac{\pi}{2n}\right)\frac{1}{2^{\frac{3}{n}-1}}\int_0^\infty t^{\frac{3}{n}-1}\,\boldsymbol{J}_{\frac{1}{n}}(t)\,dt -$$

$$(26) - \frac{\pi}{n^2}\,\frac{1}{2^{\frac{3}{n}-1}}\int_0^\infty t^{\frac{3}{n}-1}\,\boldsymbol{E}_{\frac{1}{n}}(t)\,dt + \frac{\pi}{n^2 \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) 2^{\frac{3}{n}-1}}\int_0^\infty t^{\frac{3}{n}-1}\,J_{-\frac{1}{n}}(t)\,dt -$$

$$- \frac{\pi}{n^2 \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) 2^{\frac{3}{n}-1}}\int_0^\infty t^{\frac{3}{n}-1}\,J_{\frac{1}{n}}(t)\,dt,$$

avendo, per il momento, escluso il valore $n = 3$, dati i casi IV) e IV′), trattati in precedenza. Ciò fatto, ricordo che e′ [4, p. 486]:

$$(27)\qquad \int_0^\infty t^\mu J_\nu(t)\,dt = \frac{2^\mu \Gamma\left(\frac{\nu+\mu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu-\mu+1}{2}\right)}, \qquad \left(\mu+\nu > -1, \mu < \frac{1}{2}\right).$$

Allora, ricorrendo alla (27) per gli ultimi due integrali di (26) e alle (7), (15) rispettivamente per il primo e secondo integrale a secondo membro in (26), ricavo in definitiva, con alcuni passaggi:

$$\int_0^\infty Ei_n(x)\,dx =$$

$$(28)\quad = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2n}\right)\Gamma\left(1-\frac{3}{2n}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2n}\right)\Gamma\left(-\frac{1}{2n}\right)}{4n^3\,\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(1-\frac{2}{n}\right)}\left\{-tg\left(\frac{\pi}{2n}\right)\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)+ +1-\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\right\}+$$

$$+\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2n}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{2n}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}\right)}{2n^2\,\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(1-\frac{2}{n}\right)}\cdot \left\{tg\left(\frac{\pi}{2n}\right)\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)+1+\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\right\}+$$

$$+\frac{\pi}{n^2\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}\left\{\frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(1-\frac{2}{n}\right)}-\frac{\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)}{\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)}\right\}.$$

Rimane ora da considerare il caso $n = 3$. A tal fine, so che per x positivo, è [6]:

$$(29)\quad Ei_3(x) = \frac{2\pi}{3^{3/2}}x^{\frac{1}{2}}\left[J_{-\frac{1}{3}}\left(2x^{\frac{3}{2}}\right)-J_{\frac{1}{3}}\left(2x^{\frac{3}{2}}\right)\right]+\frac{4x^{\frac{1}{2}}}{3^{3/2}}\,\sigma_{11}\left(2x^{\frac{3}{2}}\right),$$

con

$$(30)\qquad \sigma_{11}(t) = \int_0^\pi \sin\,(t\sin\vartheta)\,\sin\frac{\vartheta}{3}\,d\vartheta\,.$$

Esprimendo la (30) mediante funzioni di Lommel [1, p. 310], ho:

$$\sigma_{11}(t) = \frac{3^{\frac{1}{2}}}{2}\, s_{0,\frac{1}{3}}(t) . \tag{31}$$

Ora, in riferimento al secondo membro di (29), ottengo, posto $x = \left(\frac{t}{2}\right)^{2/3}$ e tenendo conto di (27) per $\mu = 0$:

$$\frac{2\pi}{3^{3/2}} \int_0^\infty x^{\frac{1}{2}} \left[J_{-\frac{1}{3}}\left(2x^{\frac{3}{2}}\right) - J_{\frac{1}{3}}\left(2x^{\frac{3}{2}}\right)\right] dx = \frac{2\pi}{3^{5/2}} \left\{ \int_0^\infty J_{-\frac{1}{3}}(t)\, dt - \int_0^\infty J_{\frac{1}{3}}(t)\, dt \right\} = 0 ,$$

mentre, per la (31), è:

$$\frac{4}{3^{3/2}} \int_0^\infty x^{\frac{1}{2}}\, \sigma_{11}\left(2x^{\frac{3}{2}}\right) dx = \frac{2}{3} \int_0^\infty x^{\frac{1}{2}}\, s_{0,\frac{1}{3}}\left(2x^{\frac{3}{2}}\right) dx ,$$

che risulta divergente, tenuto conto della [2].

Da quanto sopra, avendo presenti le proprietà delle funzioni che figurano in (29), posso concludere che $\int_0^\infty Ei_3(x)\, dx$ diverge.

BIBLIOGRAFIA

[1] G. N. Watson, *A Treatise on the Theory of Bessel functions*, Cambridge Univ. Press, 1966.

[2] A. Erdélyi, W. Magnus, F. Oberhettinger, F. G. Tricomi, *Tables of Integral Transforms*, vol. II, McGraw-Hill, 1954, p. 385 (17).

[3] V. ad es. A. Erdélyl, W. Magnus, F. Oberhettinger, F. G. Tricomi, *Higher transcendental functions*, vol. II, McGraw-Hill, 1953.

[4] M. ABRAMOWITZ, I. A. STEGUN, *Handbook of mathematical functions*, Dover, New York, 1965.
[5] I. S. GRADSHTEYN, I. W. RYZHIK, *Table of Integrals, Series and Products*, Academic Press, 1965.
[6] G. H. HARDY, *On certain definite integrals considered by Airy and by Stokes*, Quarterly Journal, XLI, 1910, pp. 226-240.

Manoscritto pervenuto in redazione il 15 aprile 1978.