RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

ROBERTO MORESCO

Sui gruppi e corpi ordinati

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 58 (1977), p. 175-190

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1977__58__175_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 58 (1977)

Sui gruppi e corpi ordinati

ROBERTO MORESCO (*)

SUMMARY: In this paper, results due to Alling concerning η_α ordered abelian groups and fields are reproved, in a different (and perhaps more illuminating) way: η_α-structures and α-maximality are related to completeness (with respect to the order uniformity) of the structure and its quotients (§ 1, 2). Results are proved concerning the cardinality of complete α-maximal (and η_α) groups.

§ 0. Ogni struttura considerata in questo lavoro è commutativa e la parola « ordinato » significherà sempre « totalmente ordinato ».

DEF. 1. Una valutazione v su un gruppo ordinato G è una mappa da G in un insieme ordinato P dotato di un massimo p, che soddisfa:

i) $v(a) = p$ se e solo se $a = 0$.

ii) $|a| \leq |b| \Leftrightarrow v(a) \geq v(b)$.

iii) $v(a+b) \geq \min. \{v(a), v(b)\} = v(a) \wedge v(b)$, e l'eguaglianza vale se $v(a) \neq v(b)$,

iv) se $\exists\, n \in N : n|a| \geq |b|$, $n|b| \geq |a|$, è $v(a) = v(b)$.

Se per P si prende l'insieme dei sottogruppi convessi principali (i.e. $A \in P$ se e solo se $A = \{x|\ |x| < n|a|$ per qualche $n \in N$ ed un certo $a \in G$ fissato$\}$), ordinato da: $A \leq B$ se $A \supseteq B$, la mappa che associa ad ogni elemento di G il più piccolo sottogruppo convesso

(*) Indirizzo dell'A.: Istituto di Matematica Applicata, Via Belzoni, 7 - 35100 Padova.

che lo contiene è una valutazione che gode inoltre delle seguenti proprietà:

iv') $v(a) = v(b)$ se e solo se $\exists \; n \in N$ tale che $n|a| \geq |b|$, $n|b| \geq |a|$

v) v è suriettiva.

DEF. 2. Una valutazione che verifica la iv') e v) si chiama valutazione naturale.

Si dimostra che una valutazione naturale è essenzialmente unica e d'ora in poi mi riferirò al modello di valutazione naturale precedentemente esposto.

Se K è un corpo si può introdurre nell'insieme dei sottogruppi convessi principali questa operazione: $v(a) + v(b) = v(ab)$. In questo caso la valutazione naturale è una valutazione anche secondo la solita definizione, che richiede in più, appunto, che sia $v(ab) = v(a) + v(b)$.

DEF. 3. I fattori di un gruppo G, che si indicano con $G(a)$, sono i quozienti $v(a)/\{g \in G : n|g| < a \; \forall \; n \in \mathrm{N}\}$, indicando con a un elemento di G e con v la valutazione naturale.

DEF. 4. Una struttura S ordinata da $<$ si dice η_α se per ogni coppia di sottoinsiemi A, B tali che $|A \cup B| < \aleph_\alpha$ e $A < B$, esiste $u \in S$ che soddisfa: $A < u < B$.

$A < B$ vuol dire: $a < b \; \forall \; a \in A$, $b \in B$; $u < A$ vuol dire $\{u\} < A$.

DEF. 5. S si dice quasi η_α $(q \cdot \eta_\alpha)$ se per ogni coppia di sottoinsiemi A, B non vuoti e tali che $|A \cup B| < \aleph_\alpha$ e $A < B$, esiste $u \in S$ tale che $A \leq u \leq B$.

DEF. 6. S si dice strettamente quasi η_α (s.q.η_α) se per ogni coppia di sottoinsiemi non vuoti A, B tali che $|A \cup B| < \aleph_\alpha$ e $A < B$, esiste $u \in S$ tale che $A < u < B$.

NOTA. Nella definizione di insieme η_α si permette agli insiemi A, B di essere vuoti: questo vuol dire che prendendo $B = \varnothing$ (rispettivamente $A = \varnothing$) il tipo di cofinalità (rispettivamente: coinizialità) di S è $\geq \omega_\alpha$.

NOTA. Il concetto di insieme η_α si inserisce nel contesto più generale delle strutture $\aleph_\alpha$–sature, studiate p.e. da Keisler in [Ke1], [Ke2], di cui sono un caso particolare: un insieme η_α non è altro infatti che una struttura con una relazione di ordine totale denso in sè che sia $\aleph_\alpha$–satura.

Nello studio delle strutture η_α si è rivelato particolarmente utile il concetto di pseudoconvergenza, introdotto da Ostrowski e studiato da Kaplansky in (K): innanzitutto ricordo che in un gruppo G ogni topologia (compatibile) genera canonicamente una uniformità: se V è una base del filtro degli intorni di zero e $V \in V$, sia $V' = \{(x, y): x, y \in G,\ x - y \in V\}$; allora $\{V'\}_{V \in V}$ forma una base di una uniformità su G. Se G è un gruppo ordinato, G si può pensare dotato della topologia dell'ordine (e quindi della uniformità dell'ordine).
Se sull'insieme dei sottogruppi convessi, ordinato come in precedenza, si mette la topologia dell'ordine, la valutazione naturale v è continua se non c'è un minimo sottogruppo convesso non banale oppure se tale sottogruppo è (isomorfo a) $\mathbf{Z}$. In entrambi i casi la topologia debole di v e quella dell'ordine, coincidono: nel primo questa topologia è $T_{3\frac{1}{2}}$ ma non discreta, è invece la topologia discreta nel secondo caso. Comunque se w è una valutazione da G in P, dotato della topologia dell'ordine, si può considerare su G la topologia debole di w, T_w, e la uniformità ad esso associata U_w. La pseudoconvergenza (relativa a w) è, in qualche modo, una «convergenza fino ad un certo punto» per la U_w. Precisamente:

DEF. 7 Sia G un gruppo ordinato con valutazione w, $(a_\varrho)_{\varrho<\gamma}$, $a_\varrho \in G$ una sequenza transfinita indiciata in γ con γ ordinale limite; γ si chiama la lunghezza della sequenza, e $(a_\varrho)_{\varrho<\gamma}$ si dice pseudoconvergente se per $\varrho < \sigma < \tau < \gamma$ si verifica: $w(a_\sigma - a_\varrho) < w(a_\tau - a_\sigma)$.

Se $(a_\varrho)_{\varrho<\gamma}$ è pseudoconvergente, $\forall\ \varrho < \sigma < \gamma$ si ha $w(a_\sigma - a_\varrho) = w(a_{\varrho+1} - a_\varrho)$ e possiamo quindi porre $w(a_\sigma - a_\varrho) = \alpha_\varrho$.

DEF. 8 $(a_\varrho)_{\varrho<\gamma}$ è pseudoconvergente in G, un elemento $g \in G$ si dice pseudolimite di $(a_\varrho)_{\varrho<\gamma}$ se $w(g - a_\varrho) > \alpha_\varrho\ \forall\ \varrho < \gamma$. L'insieme degli x di G tali che $w(x) > \alpha_\varrho\ \forall\ \varrho < \gamma$ è un sottogruppo convesso di G e si chiama la larghezza di $(a_\varrho)_{\varrho<\gamma}$.

A proposito dell'intendere intuitivamente la pseudoconvergenza come « convergenza fino ad un certo punto », si vede subito che :

0.1. TEOREMA. Sia G un gruppo ordinato con valutazione w. Se L è un sottogruppo convesso di G, ogni sequenza pseudoconvergente di larghezza L ha uno pseudolimite se e solo se G/L è completo nell'uniformità indotta naturalmente dalla valutazione $\overline{w}$ così definita : $\overline{w}(g+L) = \overline{w}(g)$ se $g \notin L$, $\overline{w}(L) = w(0)$.

DIM. : banale.

NOTA. Se w è la valutazione naturale di G, $\overline{w}$ è la valutazione naturale di G/L.

DEF. 9. Sia G un gruppo ordinato con valutazione w. G si dice α–massimale per w se ogni sequenza pseudoconvergente di lunghezza $< \omega_\alpha$ ha uno pseudolimite in G. G è massimale per w se è α–massimale $\forall\, \alpha$. Sottointenderò « per w » se è chiaro di quale valutazione si parla.

Ci serve ancora un'altra costruzione, introdotta da Hahn e studiata ulteriormente da Kaplansky [K] che ne ha dimostrato una relazione fondamentale con il concetto di pseudoconvergenza.

Sia S un insieme ordinato, H un gruppo ; si indica con $H\{S\}$ l'insieme delle funzioni da S in H il cui supporto ($=$ l'insieme degli elementi con immagine non nulla) è bene ordinato : $H\{S\}$ è un gruppo definendo l'addizione sulle componenti. Per comodità adottiamo questa scrittura : $\sum\limits_{s \in S} a_s t^s$ è la funzione che manda $s \in S$ in $a_s \in H$, dove gli a_s sono diversi da zero solo su un insieme bene ordinato.

Se G è un gruppo ordinato a K un corpo, $K\{G\}$ è un corpo definendo così la moltiplicazione :

$$\sum_{g \in G} k_g\, t^g . \sum_{h \in G} k_h\, t^h = \sum_{f \in G} \Big(\sum_{g+h=f} k_g\, k_h \Big) t^f .$$

Se H e K sono rispettivamente un gruppo ed un corpo ordinato, $H\{S\}$ e $K\{G\}$ sono ordinati dall'ordine lessicografico : cioè un elemento è maggiore di 0 ($=$ la funzione nulla) se è maggiore di 0 l'immagine del primo elemento del supporto.

Si può definire una mappa w da $H\{S\}$ in $S' = S \cup \{\infty\}$ che manda una funzione non nulla nel minimo del suo supporto, e la costante 0 in ∞. In S' l'ordine è prolungato ponendo $\infty > s \ \forall \ s \in S$; questa mappa è una valutazione e si chiama valutazione usuale ; coincide con la valutazione naturale se e solo se H è archimedeo. Nel caso del corpo $K\{G\}$, la valutazione è una valutazione anche secondo la solita definizione.

0.2. Teorema $H\{S\}$ con la valutazione usuale è massimale.

Dim. : vedi [K].

§ 1. Def. 10. In un insieme ordinato S, un taglio di Dedekind $[A, B]$ è una coppia di sottoinsiemi A, B non vuoti tali che $A < B$, e $A \cup B = S$.

Sia $[A , B]$ un taglio di Dedekind in un gruppo G dove A non ha massimo e B non ha minimo. Poniamo $L = \{g \in G : \ |g| < b - a \ \forall \ b \in B, \ a \in A\}$. L è un sottogruppo convesso di G e diciamo che :

Def. 11 $[A, B]$ è un taglio di Cauchy se $L = 0$; altrimenti diciamo che $[A, B]$ è un taglio di ampiezza positiva e che L è la sua ampiezza.

I tagli di ampiezza positiva caratterizzano i gruppi non archimedei : un gruppo è non archimedeo se e solo se ha dei tagli di ampiezza positiva (ricordando che un gruppo ordinato completo alla Dedekind è archimedeo).

Def. 12 Se $[A, B]$ è un taglio di Dedekind in un insieme S, il carattere sinistro del taglio è la confinalità di A, quello destro la coinizialità di B. Il carattere sinistro di un punto è la cofinalità dell'insieme $\{y : y < x\}$, quello destro la coinizialità di $\{y : y < x\}$.

In un gruppo carattere sinistro e destro di un punto coincidono, e sono uguali per ogni punto : li chiamiamo quindi carattere puntuale ; il carattere puntuale inoltre è uguale al carattere destro e sinistro di ogni taglio di Cauchy, come si vede subito pensando al completamento (per l'uniformità indotta dall'ordine) del gruppo.
Si può dire allora che condizione necessaria e sufficiente perchè un gruppo sia η_α è che siano maggiori o uguali a $\aleph_\alpha$ la cofinalità,

il carattere puntuale e almeno un carattere per ogni taglio di ampiezza positiva.

1.1. LEMMA. Siano G un gruppo ordinato con valutazione naturale v, α un ordinale > 0. Sono equivalenti:

i) G è η_α.

ii) $P = v(G \setminus \{0\})$ è η_α e G/L è completo per l'uniformità dell'ordine ereditato canonicamente da G se L è un sottogruppo convesso e G/L ha carattere puntuale minore di ω_α.

DIM.: 1) $\Rightarrow$ ii): prendiamo $A, B \subseteq P$ tali che $|A \cup B| < \aleph_\alpha$ e $A < B$.

Dato $p \in P$ indichiamo con $\overleftarrow{p}$ un elemento di G positivo e tal che $v(\overleftarrow{p}) = p$. Ora se A non ha massimo, esiste $g \in G$ tale che:

$$\{n \overleftarrow{b} : n \in N,\ b \in B\} < g < \{\overleftarrow{a} : a \in A\} \text{ perchè } G \text{ è } \eta_\alpha .$$

Se A ha un massimo a_0, l'insieme $Y(\overleftarrow{a}_0) = \{c \in G ;\ v(c) > a_0\}$ ha carattere superiore almeno ω_α e quindi si trova un $g \in Y(\overleftarrow{a}_0)$ tale che $g > \{n\overleftarrow{b} : n \in \mathrm{N},\ b \in B\}$.

In ogni caso: $A < v(g) < B$.

Supponiamo ora che il carattere puntuale di G/L, che è uguale a quello dei tagli di Cauchy, sia $\beta < \omega_\alpha$. Prendiamo un elemento a che stia nel completamento (per l'uniformità dell'ordine) di G/L e due sequenze $(a_\varrho)_{\varrho<\beta}$, $(b_\varrho)_{\varrho<\beta}$ di elementi di G/L tali che a sia l'unico elemento del completamento per cui $a_\varrho < a < b_\varrho \ \forall \varrho < \beta$.

Se consideriamo due sequenze $(\overleftarrow{a}_\varrho)_{\varrho<\beta}$, $(\overleftarrow{b}_\varrho)_{\varrho<\beta}$ dove $L(\overleftarrow{a}_\varrho) = a_\varrho$, $L(\overleftarrow{b}_\varrho) = b_\varrho$, siccome G è η_α esiste un $g \in G$ tale che $\overleftarrow{a}_\varrho < g < \overleftarrow{b}_\varrho$ per ogni $\varrho < \beta$.

Allora $a = L(g)$ e quindi $a \in G/L$.

ii) $\Rightarrow$ i): intanto notiamo che: cofinalità di G = coinizialità di G = coinizialità di $P \geq \omega_\alpha$ e: carattere puntuale di G = coinizialità dell'insieme $\{g \in G | g > 0\}$ = carattere dei tagli di Cauchy di G = cofinalità di $P \geq \omega_\alpha$. Ci restano quindi da esaminare solo i tagli di ampiezza positiva. Sia allora $[A, B]$ uno di questi tagli e L la sua ampiezza. Supponiamo che cof.$(A) = \lambda$, cof.$(B) = \mu$, $\lambda + \mu = \gamma < \omega_\alpha$. Allora la coinizialità di $\{g \in G \setminus L,\ g > 0\}$, che è uguale al carattere puntuale di G/L, è uguale a $\gamma < \omega_\alpha$ e perciò per ipotesi G/L è completo nell'uniformità indotta dall'ordine.

Sia $L(A) = \{L(a) : a \in A\}$, $L(B) = \{L(b) : b \in B\}$; allora $[L(A), L(B)]$ è un taglio di Cauchy in G/L, dove $L(A)$ non ha massimo (se no cof. (L) = cof. (A) e L determinerebbe in P un taglio con entrambi i caratteri minori di ω_α) e $L(B)$ non ha minimo (per lo stesso motivo), quindi $\exists\, x$ tale che $L(A) < x < L(B)$ e una qualsiasi controimmagine di x in G è compresa tra A e B.

Adoperando le stesse notazioni del lemma precedente:

1.1$'$ LEMMA. Siano G un gruppo ordinato con valutazione naturale v, α un ordinale > 0. Sono equivalenti:

i) G è s.q. η_α.

ii) P è s. q. η_α, cof. $(P) \geq \omega_\alpha$ e G/L è completo per l'uniformità dell'ordine ereditato canonicamente da G se L è un sottogruppo convesso e G/L ha carattere puntuale minore di ω_α.

DIM.: Del tutto analoga alla precedente.

1.1$''$ LEMMA. Siano G un gruppo ordinato con valutazione naturale v, α un ordinale > 0. Sono equivalenti:

i) G è q.η_α.

ii) P è s.q.η_α e G/L è completo per l'uniformità dell'ordine ereditato canonicamente da G se L è un sottogruppo convesso e G/L ha carattere puntuale minore di ω_α.

DIM.: analoga alla precedente; per ii) $\Rightarrow$ i) basta prendere A, $B \neq \varnothing$ e notare che la seconda condizione dice che se il carattere puntuale di G è $< \omega_\alpha$ allora (per $L = 0$) G è completo e quindi non ci sono tagli Cauchy.

NOTA. Nei lemmi precedenti non si può sostituire «completo per l'uniformità indotta dall'ordine» con «completo per l'uniformità della valutazione naturale». Per esempio se S è un insieme η_α con $\alpha > 0$, $\mathbf{Q}\{S\}$ ha insieme dei valori η_α e tutti i quozienti richiesti sono completi per l'uniformità indotta dalla valutazione naturale ma non per quella dell'ordine: e $\mathbf{Q}\{S\}$ non è nemmeno q. η_1: per $s \in S$ fissato, si prende il taglio $[A, B]$ così costruito:

$$A = \{a \in \mathbf{Q}\{S\} : a < \sqrt{2} \cdot t^s\}, \quad B = \mathbf{Q}\{S\} \setminus A .$$

1.2 Teorema. Siano G un gruppo ordinato con valutazione naturale v, α un ordinale > 0. Sono equivalenti:

i) G/L è completo per l'uniformità dell'ordine ereditato canonicamente da G se L è un sottogruppo convesso e G/L ha carattere puntuale minore di ω_α;

ii) i fattori di G sono completi alla Dedekind e G è α-massimale.

Dim.: i $\Rightarrow$ ii): i fattori di G sono completi alla Dedekind perchè se $v(a_0)/L$ è un fattore, G/L ha carattere puntuale $< \omega_\alpha$ e quindi G/L è completo per l'uniformità indotta dall'ordine; ma $v(a_0)/L$ è un sottogruppo chiuso di G/L e quindi completo per la uniformità dell'ordine; in più è archimedeo e quindi completo alla Dedekind.

Sia poi L la larghezza di una sequenza pseudoconvergente di lunghezza minore di ω_α; allora G/L è completo per la uniformità dello ordine che coincide con quella della valutazione naturale perchè $\{v(a): a \in G/L\}$ non ha massimo e quindi per il Teorema 0.1 è α-massimale.

ii) $\Rightarrow$ i): Sia L un sottogruppo convesso tale che G/L abbia carattere puntuale minore di ω_α; allora se in G/L topologia dello ordine e topologia indotta dalla valutazione coincidono, si può concludere sempre per il teorema 0.1. Se no vuol dire che $v(G \setminus L)$ ha un massimo $p = v(a_0)$; allora $v(a_0)/L$ è un fattore e quindi è completo per la topologia dell'ordine, e questo implica che è completo anche G/L.

Così si è dimostrato in maniera più facile ed istruttiva un teorema di Alling, molto utile per riconoscere gruppi e corpi η_α, che enuncio esplicitamente:

1.3 Teorema. Sia α un ordinale > 0. Un gruppo ordinato G con valutazione naturale v è η_α se e solo se:

i) il suo insieme dei valori P privato del massimo è η_α;

ii) G è α-massimale;

iii) i fattori di G sono completi alla Dedekind.

È del tutto ovvio il seguente corollario:

1.4 Corollario. Sia α un ordinale > 0. Un corpo ordinato K con valutazione naturale v è η_α se e solo se:

i) il gruppo $v(K \setminus \{0\})$ è η_α;

ii) K è α-massimale;

iii) i fattori di K sono (isomorfi a) $\mathbb{R}$.

§ 2. – Ricordo che un corpo ordinato K è realchiuso se verifica uno dei seguenti quattro fatti equivalenti:

i) K non possiede estensioni algebriche proprie ad un corpo ordinato;

ii) $K[\sqrt{-1}]$ è algebricamente chiuso;

iii) ogni positivo è un quadrato ed ogni polinomio di grado dispari in una indeterminata a coefficienti in K ha uno zero in K;

iv) ogni polinomio in una indeterminata a coefficienti in K che assume valori positivi e negativi ha uno zero in K.

Ci servono inoltre i seguenti teoremi:

2.1 TEOREMA. Se K è realchiuso, $K\{G\}$ è realchiuso se e solo se G è divisibile. $([A2], [M])$.

2.2 TEOREMA. Sia α un ordinale < 0. Due insiemi ordinati (due corpi realchiusi) η_α di cardinale $\aleph_\alpha$ sono isomorfi. $([GJ])$.

Grazie al teorema 1.3 abbiamo subito pronti degli esempi di gruppi e corpi η_α: se E è un insieme η_α, $\mathbb{R}\{E\}$ e $\mathbb{Z}\{E\}$ sono gruppi η_α non isomorfi perchè il primo è divisibile ed il secondo no; $\mathbb{R}\{\mathbb{R}\{E\}\}$ e $\mathbb{R}\{\mathbb{Z}\{E\}\}$ sono corpi η_α ancora non isomorfi perchè non sono isomorfi i gruppi dei valori; oppure perchè il primo è realchiuso ed il secondo no.

Se poi poniamo $E^\wedge = E \cup$ un minimo, $\bar{E} = E \cup$ un massimo, $E^+ = E \cup$ un predecessore (o un successore) (in maniera cioè che ci sia un salto), si ha:

$\mathbb{R}\{E^\wedge\}$ è s.q.η_α e non η_1;

$\mathbb{R}\{\bar{E}\}$ è q.η_α e non s.q.η_1;

$\mathbb{R}\{E^+\}$ non è neanche q.η_1.

Si può migliorare un poco la situazione: indichiamo con $G\{F\}_\alpha$ l'insieme $\{f \in G\{F\}$: il supporto di f ha cardinale minore di $\aleph_\alpha^- \}$ e vediamo che se E è η_α e $\mathrm{cof}(\omega_\beta) \geq \omega_\alpha$, $\mathbf{R}\{E\}_\beta$ e $\mathbf{Z}\{E\}_\beta$ sono ancora η_α. Due delle condizioni del teorema 1.3 sono ovvie: la terza ci è fornita da questo teorema:

2.3 Teorema. $\mathbf{R}\{E\}_\alpha$ e $\mathbf{Z}\{E\}_\alpha$ sono $\mathrm{cof}(\omega_\alpha)$ -massimali.

Dim.: ricordo che in questi gruppi la valutazione naturale e la valutazione usuale coincidono; abbiamo già notato che i gruppi $\mathbf{R}\{E\}$ e $\mathbf{Z}\{E\}$ sono massimali; allora se abbiamo una successione pseudoconvergente $(a_\delta)_{\delta<\omega_\alpha}$, con $\omega_\beta < \mathrm{cof}(\omega_\alpha)$, di elementi di $\mathbf{R}\{E\}_\alpha$ (o $\mathbf{Z}\{E\}_\alpha$), questa ha uno pseudolimite in $\mathbf{R}\{E\}$ (in $\mathbf{Z}\{E\}$). È chiaro che c'è uno pseudolimite a tale che $\mathrm{supp(a)} \subseteq \bigcup_{\delta<\omega_\beta} \mathrm{supp}(\mathrm{a}_\delta)$ e quindi se $|\mathrm{supp}(\mathrm{a}_\delta)| = \aleph_\delta < \aleph_\sigma$ viene che $|\mathrm{supp(a)}| \leq \sum_{\delta<\omega_\beta} \aleph_\delta \leq$ $\leq \aleph_\beta \cdot \aleph_\gamma < \aleph_\alpha$ dove $\aleph_\gamma$ è tale che $\aleph_\delta \leq \aleph_\gamma \lneq \aleph_\alpha$ ed esiste perchè l'insieme degli $\aleph_\delta$ non può essere cofinale in ω_α.

2.4 Teorema. Sia K un corpo realchiuso, α un ordinale maggiore di 0. $K\{G\}_\alpha$ è realchiuso se e solo se G è divisibile.

Dim.: la sufficienza è dovuta ad Alling; la necessità è banale.

Ora indichiamo con $\mu(\alpha)$ il più piccolo cardinale per cui esiste un insieme η_α di cardinale $\aleph_{\mu(\alpha)}$; poniamo poi $\nu(\alpha) = \alpha$ se $\aleph_\alpha$ è regolare, altrimenti $\nu(\alpha) = \alpha + 1$. Sono stati dimostrati per gli insiemi η_α i seguenti teoremi ([S]):

2.5 Teorema. Esiste un insieme $S\,\eta_\alpha$ di cardinale $\aleph_\alpha$ se e solo se $\aleph_\alpha$ è regolare e $2^{\aleph_\alpha} \leq \aleph_\alpha \ \forall\, \gamma < \alpha$.

2.6 Teorema. Esistono due insiemi η_α di cardinale $\aleph_\delta$ che non sono simili se e solo se $\delta \geq \mu(\alpha)$, $\delta > \nu(\alpha)$.

Si può quindi cercare di dimostrare qualche teorema analogo per i corpi realchiusi (ed ovviamente i gruppi divisibili). Infatti si può dire questo:

2.7 Teorema. Se $\aleph_\gamma \geq \aleph_{\mu(\alpha)}$, $\aleph_\gamma$ è regolare e $\sum_{\delta<\gamma} 2^{\aleph_\delta} \leq \aleph_\gamma$, esiste un corpo realchiuso η_α di cardinale $\aleph_\gamma$.

DIM : Sia E un insieme η_α di cardinale $\aleph_\gamma$: questo è facile da ottenere : se A è un insieme η_α di cardinale $\aleph_{\mu(\alpha)}$, si può prendere $E = \omega_\gamma$ (prodotto cartesiano) A con l'ordine lessicografico. Consideriamo $\mathbf{R}\{E\}_\gamma$: questo gruppo è γ-massimale e quindi α-massimale, l'insieme dei valori E è η_α, i fattori sono $\mathbf{R}$ e quindi il gruppo è η_α. Vediamo qual'è il suo cardinale : identifichiamo E con ω_γ. Per $\pi < \omega_\gamma$ sia $A_\pi = \{f \in \mathbf{R}\{E\}_\gamma : \operatorname{supp}(f) \subseteq \pi\}$. Siccome $\aleph_\gamma$ è regolare e $|\operatorname{supp}(f)| < \aleph_\gamma$ per ogni f esiste π tale che $f \in A_\pi$. Quindi : $|\mathbf{R}\{E\}_\gamma| \leq \sum_{\pi<\omega_\gamma} |A_\pi| \leq | \sum_{\pi<\omega_\gamma} 2^{\aleph_\delta |\pi|} \leq \sum_{\delta<\gamma} \aleph_{\delta+1} 2^{\aleph_\delta} = \sum_{\delta<\gamma} 2^{\aleph_\delta} \leq \aleph_\gamma$. D'altra parte è chiaro che $|\mathbf{R}\{E\}_\gamma| \geq \aleph_\gamma$ e quindi concludendo $\mathbf{R}\{E\}_\gamma$ è un gruppo divisibile η_α di cardinale $\aleph_\gamma$. Ripetendo lo stesso discorso naturalmente viene che $\mathbf{R}\{\mathbf{R}\{E\}_\gamma\}_\gamma$ è un corpo realchiuso η_α di cardinale $\aleph_\gamma$.

Questo teorema ha dei corollari molto interessanti :

2.8 COROLLARIO. Sia α un ordinale > 0. Due gruppi ordinati divisibili η_α di cardinale $\aleph_\alpha$ sono (ordinatamente) isomorfi.

DIM. : siano G e H due gruppi divisibili η_α di cardinale $\aleph_\alpha$.

Per il teorema 2.5 deve essere $\aleph_\alpha$ regolare e $2^{\aleph_\delta} \leq \aleph_\alpha$ $\forall\, \delta < \alpha$.

Da quanto abbiamo appena dimostrato viene quindi che $\mathbf{R}\{G\}_\alpha$ e $\mathbf{R}\{H\}_\alpha$ sono corpi realchiusi η_α di cardinale $\aleph_\alpha$ e come tali sono isomorfi ; ma allora sono isomorfi anche i loro gruppi dei valori.

NOTA. Evidentemente questo corollario si poteva dimostrare direttamente seguendo la dimostrazione data in [*GJ*] del teorema 2.2.

2.9 COROLLARIO. Sia α un ordinale > 0. L'esistenza di un insieme η_α di cardinale $\aleph_\alpha$ è equivalente a quella di un corpo realchiuso η_α di cardinale $\aleph_\alpha$.

DIM. : Se S è η_α e $|S| = \aleph_\alpha$ allora $\aleph_\alpha$ è regolare e $2^{\aleph_\delta} \leq \aleph_\alpha$ $\forall\, \delta < \alpha$. Quindi si può applicare il teorema appena dimostrato. Inoltre possiamo dire che se $\aleph_\alpha$ soddisfa queste ipotesi, il corpo realchiuso in questione è $\mathbf{R}\{\mathbf{R}\{S\}_\alpha\}_\alpha$.

NOTA : Nelle stesse ipotesi del teorema 2.7 si può provare che esiste un corpo η_α di cardinale $\aleph_\gamma$ che non è realchiuso : $\mathbf{R}\{\mathbf{Z}\{E\}_\gamma\}_\gamma$.

Possiamo continuare l'analogia con gli insiemi con questo corollario:

2.10 Corollario. Se è $\gamma \geq \mu(\alpha)$, $\nu > \gamma(\alpha)$, $\aleph_\gamma$ regolare e $2^{\aleph_\delta} \leq \leq \mathscr{K}_\gamma \ \forall\, \delta < \gamma$, esistono due corpi realchiusi η_α di cardinale $\aleph_\gamma$ che non sono isomorfi.

Dim.: in queste ipotesi abbiamo visto che esistono due insiemi E e F η_α di cardinale $\aleph_\gamma$ che non sono simili. Quindi non sono isomorfi $\mathbb{R}\{\mathbb{R}\{E\}_\gamma\}_\gamma\}$ e $\mathbb{R}\{\mathbb{R}\{F\}_\gamma\}_\gamma$.

§ 3. – Osservazione: Sia G un gruppo ordinato valutato. Se $(g_\alpha)_{\alpha<\beta}$ è una sequenza pseudoconvergente e se $(g_{\alpha_\nu})_{\alpha_\nu<\beta}$ è una sequenza estratta dalla precedente che ammette g_ν come pseudolimite, allora g_ν è pseudolimite anche della $(g_\nu)_{\nu<\beta}$: se $\alpha_\nu > \alpha$, $v(g_\nu - g_\alpha) = v(g_\nu - g_{\alpha_\nu} + g_{\alpha_\nu} - g_\alpha) = v(g_{\alpha_\nu} - g_\alpha)$.

Indichiamo ora con $G^\wedge$ il più piccolo sovragruppo divisibile di G e scriviamo i suoi elementi come classi laterali modulo la solita relazione di equivalenza, rappresentate da coppie ordinate (g, n) con $g \in G$, $n \in \mathbb{N}$. Se v è una valutazione su G, definiamo $v^\wedge : G^\wedge \to v(G)$, $v^\wedge \overline{(g, n)} = v(g)$. Questa è una buona definizione e $v^\wedge$ è una valutazione su $G^\wedge$. Se v è la valutazione naturale, anche $v^\wedge$ è la valutazione naturale.

3.1 Lemma. Se G è α-massimale anche $G^\wedge$ è α-massimale.

Dim.: sia $\overline{(g_\alpha, n_\alpha)}_{\alpha<\beta}$ una sequenza pseudoconvergente. Almeno un naturale n è cofinale nella sequenza $(n_\alpha)_{\alpha<\beta}$ e sia $\overline{(g_{\alpha_\nu}, n)}_{\alpha_\nu<\beta}$ la sequenza cofinale estratta. Questa ha uno pseudolimite $\overline{(g, n)}$ dove g è pseudolimite di $(g_{\alpha_\nu})_{\alpha_\nu<\beta}$ in G, e si conclude per l'osservazione precedente.

3.2 Teorema. Sia G un gruppo $\alpha+1$-massimale per una valutazione v e tale che in $v(G)$ ci sia un insieme bene ordinato di cardinale $\aleph_\alpha$, che chiamiamo $(p_\lambda)_{\lambda<\omega_\alpha}$. Allora $|G| \geq 2^{\aleph_\alpha}$.

Dim.: per il lemma non è restrittivo supporre G divisibile.

Indichiamo con S l'insieme $\{0,1\}^{\omega_\alpha}$. Scegliamo in G due intervalli aperti V_0^0 e V_0^1 tali che $\overline{V}_0^0 \cap \overline{V}_0^1 = \varnothing$, e che in V_0^i $(i = 0,1)$ esistano x_0^i, y_0^i per cui $p_0 = v(y_0^i - x_0^i)$.

Poniamo : $W_{s,0} = V_0^0$, $x_{s,0} = x_0^0$, $y_{s,0} = y_0^0$ se $s(0) = 0$;
$W_{s,0} = V_0^1$, $x_{s,0} = x_0^1$, $y_{s,0} = y_0^1$ se $s(0) = 1$.

Per ogni V_0^i scegliamo poi due aperti convessi $V_1^{i,j}$ (j $= 0,1$) tali che $\overline{V_1^{i,0}} \cap \overline{V_1^{i,1}} = \varnothing$, che $V_1^{i,j}$ sia compreso tra $x_0^i + (y_0^i - x_0^i)/3$, $y_0^i - \dfrac{y_0^i - x_0^i}{3}$ e che in $V_1^{i,j}$ esistano $x_1^{i,j}$, $y_1^{i,j}$ per cui $p_1 = v\,(y_1^{i,j} - - x_1^{i,j})$. Poniamo : $W_{s,1} = V_1^{i,j}$, $x_{s,1} = x_1^{i,j}$, $y_{s,1} = y_1^{i,j}$ se $s(0) = i$, $s(1) = j$.

Ora sia $s \in S_\alpha$ e supponiamo che $\forall \beta < \xi < \alpha$ e $s \in S_\alpha$ siano stati definiti degli aperti convessi non vuoti $W_{s,\beta}$ e degli elementi $x_{s,\beta}$, $y_{s,\beta}$ appartenenti a $W_{s,\beta}$ in modo tale che :

i) $\overline{W_{s,\beta+1}} \cap \overline{W_{t,\beta+1}} = \varnothing$ se $\beta + 1 < \xi$, s e t coincidono sugli ordinali più piccoli di $\beta + 1$ e $s(\beta + 1) \neq t(\beta + 1)$.

ii) $W_{s,\beta} = \bigcap\limits_{\gamma < \beta} W_{s,\gamma}$ se β è limite.

iii) $v(y_{s,\beta} - x_{s,\beta}) = p_\beta$.

iv) $W_{s,\beta+1}$ sia compreso tra $x_{s,\beta} + \dfrac{y_{s,\beta} - x_{s,\beta}}{3}$ e

$$y_{s,\beta} - \frac{y_{s,\beta} - x_{s,\beta}}{3} \quad \text{se } \beta + 1 < \xi \ .$$

Dobbiamo ora definire $W_{s,\xi}$, $x_{s,\xi}$ e $y_{s,\xi}$, $\forall\, s \in S_\alpha$ in modo tale che le quattro proprietà elencate siano ancora valide sostituendo β con ξ . Distinguiamo due casi, secondo che ξ sia o no limite. Se ξ è limite poniamo $W_{s,\xi} = \bigcap\limits_{\gamma < \xi} W_{s,\gamma}$, che è un aperto convesso perchè le successioni $(x_{s,\gamma})_{\gamma<\xi}$ e $(y_{s,\gamma})_{\gamma<\xi}$ sono seudoconvergenti e tutti i loro pseudolimiti sono compresi in ogni $W_{s,\gamma}$. In $W_{s,\xi}$ esistono chiaramente $x_{s,\xi}$ e $y_{s,\zeta}$ tali che $v(y_{s,\xi} - x_{s,\xi}) = p_\xi$. Se $\xi = \delta + 1$, prendiamo in $W_{s,\delta}$ due aperti convessi A_0 ed A_1 compresi tra $x_{s,\delta} + \dfrac{y_{s,\delta} - x_{s,\delta}}{3}$, $y_{s,\delta} - \dfrac{y_{s,\delta} - x_{s,\delta}}{3}$ tali che $\bar{A}_0 \cap \bar{A}_1 = \varnothing$ e x_i , y_i appartenenti ad A_i tali che $v(y_i - x_i) = p_\xi$.

Poniamo :

$$W_{s,\xi} = A_0 \ , \ x_{s,\xi} = x_0 \ , \ y_{s,\xi} = y_0 \ \text{ se } s(\xi) = 0 \ ,$$
$$W_{s,\xi} = A_1 \ , \ x_{s,\xi} = x_1 \ , \ y_{s,\xi} = y_1 \ \text{ se } s(\xi) = 1 \ .$$

In questa maniera si costruiscono aperti convessi $W_{s,\beta}$ ed elementi $x_{s,\beta}$ $y_{s,\beta}$ $\forall\, s \in S_\alpha$ e ogni $\beta < \omega_\alpha$ che godono delle quattro proprietà elencate.

Inoltre se s, $t \in S_\alpha$ differiscono su un ordinale non limite, diciamo $\beta + 1$, $\overline{W_{s,\beta+1}} \cap \overline{W_{t,\beta+1}} = \varnothing$. Poi siccome il gruppo è $\alpha + 1$-massimale, $\bigcap_{\beta<\omega_\alpha} W_{s,\beta} \neq \varnothing$: la sequenza $(x_{s,\beta})$ è pseudoconvergente perchè $v\,(x_{s,\sigma} - x_{s,\varrho}) = p_\varrho < p_\sigma = v\,(x_{s,\tau} - x_{s,\sigma})\ \forall \varrho < \sigma < \tau < \omega_\alpha$; e detto x_s un suo pseudolimite si ha $x_{s,\varrho} < x_s < y_{s,\varrho}\ \forall\, \varrho < \omega_\alpha$. Infatti se per un certo ϱ si avesse $x_{s,\varrho} > x_s$, allora per $\sigma > \varrho$ si avrebbe anche: $v\,(x_s - x_{s,\sigma}) < v\,(x_{s,\sigma} - x_{s,\varrho}) = p_\varrho$ che è falso. Analogamente si vede che x_s è più piccolo di tutti gli $y_{s,\varrho}$; possiamo allora concludere definendo l'applicazione $x : S_\alpha \to G$, $x(s) = x_s$ e notando che x è iniettiva da $\{0, 1\}^k$ in G, dove K è l'insieme degli ordinali non limite minori di $\omega_\alpha . |K| = \aleph_\alpha$ e quindi $|G| \geq |\{0,1\}^K| = 2^{\aleph_\alpha}$.

3.3 Teorema. Sia α un ordinale > 0. Un gruppo G s.q.η_α, completo e di carattere puntuale ω_α ha cardinale maggiore o uguale a $2^{\aleph_\alpha}$.

Dim. : la dimostrazione è circa la stessa del teorema precedente: bisogna prendere $(p_\lambda)_{\lambda<\omega_\alpha}$ insieme bene ordinato cofinale in $v(G \setminus \{0\})$ (v è la valutazione naturale adesso), i $W_{s,\xi+1}$ si costruiscono con la precauzione che $v\,(x - y) > p_{\xi+1}\ \forall\, x, y \in W_{s,\xi+1}$; grazie al fatto che G è s.q. η_α si ha che $\bigcap_{\gamma<\beta} W_{s,\gamma} \neq \varnothing\ \forall\, \beta < \omega_\alpha$. Per vedere poi che $\bigcap_{\gamma<\omega_\alpha} W_{s,\gamma} \neq \varnothing$ basta notare che prendendo y_β, $x_\beta \in W_{s,\beta}$, $x_\beta < W_{s,\beta+1} < y_\beta$ (almeno uno dei due esiste: se ne esiste solo uno, si prende solo quello), i due insiemi $\{x_\beta\}$, $\{y_\beta\}$ determiniamo un taglio di Cauchy.

3.4 Corollario. Sia α un ordinale qualsiasi. I gruppi ed i corpi s.q.η_α di cardinale $\aleph_\alpha$ non sono completi.

Dim. : ovvia.

Se H_α è l'insieme η_α di cardinale $\aleph_\alpha$, che $\mathbb{R}\{H_\alpha\}_\alpha$ (gruppo η_α di cardinale $\aleph_\alpha$) non fosse completo si poteva vedere anche direttamente e con minore fatica: sia $(g_\delta)_{\delta<\omega_\alpha}$ un insieme di tipo ω_α cofinale in H_α e χ_ϱ la funzione caratteristica dell'insieme $\{g_\delta : \delta < \varrho < \omega_\alpha\}$; $\chi_\varrho \in \mathbb{R}\{H_\alpha\}_\alpha$. La successione $(\chi_\varrho)_{\varrho<\omega_\alpha}$ è di Cauchy ed il suo limite in $\mathbb{R}\{H_\alpha\}$ (che è completo) è evidentemente la funzione caratteristica dell'insieme $\{g_\delta : \delta < \omega_\alpha\}$; ma questa funzione ha supporto di cardinale $\aleph_\alpha$.

Ora poniamo per semplicità $G = \mathbb{R}\{\mathbb{R}\{S\}_\alpha\}$ (oppure $\mathbb{R}\{S\}$) e $G_\alpha = \mathbb{R}\{\mathbb{R}\{S\}_\alpha\}_\alpha$ (oppure $\mathbb{R}\{S\}_\alpha$) dove S è un insieme ordinato e $\mathrm{cof}(S) \geq \aleph_\alpha$. Allora:

3.5 Teorema. G_α non è denso in G. Precisamente: la chiusura di G_α in G è formata da G_α più le funzioni il cui supporto è simile a ω_α ed è cofinale in $\mathbb{R}\{S\}_\alpha$ (oppure S).

Dim.: le funzioni con tale supporto stanno infatti nella chiusura: una successione di elementi che vi converge è quella delle funzioni uguali fino ad un certo punto e poi nulle. Viceversa se il supporto di $f \in G \setminus G_\alpha$ non è simile a ω_α, basta prendere f_1 e f_2 così:

$f_1(g_\delta) = f(g_\delta) = f_2(g_\delta)$ $\forall \delta < \omega_\alpha$ ($\{g_\delta\}$ è il supporto di f), e se g_γ sta ancora nel supporto di f ma $\gamma > \omega_\alpha$ e, per fissare le idee supponiamo $f(g_\gamma) > 0$: $0 < f_1(g_\gamma) < f(g_\gamma) < f_2(g_\gamma)$. Nell'intervallo di estremi f_1 ed f_2 non cadono elementi di G_α. Similmente se $\mathrm{supp}(f)$ non è cofinale e $f \in G \setminus G_\alpha$, si prendono f_1 ed f_2 definite così: $f_1(\bar{t}) < 0 < f_2(\bar{t})$ con $\bar{t} > \mathrm{supp}(f)$ e per il resto $f_1 = f_2 = f$.

Si vede facilmente invece che ogni elemento di G è pseudolimite di una sequenza di funzioni di G_α.

Riguardo la completezza possiamo dire ancora che un gruppo $\mathrm{q}\cdot\eta_\alpha$ e non $\mathrm{s.q.}\eta_\alpha$ è completo: un taglio di Cauchy dovrebbe avere carattere $\geq \omega_\alpha$ e quindi sarebbe $\geq \omega_\alpha$ anche il carattere puntuale, ma allora sarebbe s.q. η_α. Questo si può in parte invertire:

3.6. Teorema. Siano a un ordinale, G un gruppo $\mathrm{q}\cdot\eta_\alpha$ di cardinale $\aleph_\alpha$; sono equivalenti:

i) G è s.q. η_α;

ii) G non è completo.

Dim.: i) $\Rightarrow$ ii): 3.4. ii) $\Rightarrow$ i): si ricordi che il carattere puntuale è uguale al carattere dei tagli di Cauchy.

Se H è un insieme η_α di cardinale $\aleph_\alpha$, $H^\wedge = H \cup$ un minimo, allora $\mathbb{R}\{H^\wedge\}_\alpha$ è s.q. η_α, di cofinalità ω_0, divisibile e quindi $\mathbb{R}\{\mathbb{R}\{H^\wedge\}_\alpha\}_\alpha$ è corpo realchiuso q. η_α, completo di cardinale $\aleph_\alpha$ (e perciò non è s.q. η_α; oppure non è s.q. η_α per il lemma 1.1′).

BIBLIOGRAFIA

[A1] ALLING N. L., *A characterization of Abelian η_α-groups in terms of their natural valutation*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 47 (1961), 711-713.

[A2] ALLING N. L., *On the existence of real-closed fields that are η_α--sets of power $\aleph_\alpha$*, Trans. Amer. Math. Soc. 103 (1962), 341-352.

[GJ] GILLMAN L. and JERISON M., *Rings of continuous functions*, D. Van Nostrand, Princeton, NJ, 1960.

[K] KAPLANSKY I., *Maximal fields with valuations*, Duke Math. J. 9 (1942), 303-321.

[Ke1] KEISLER H. J., *Good ideals in fields of sets*, Ann. of Math. 79 (1964), 338-359.

[Ke2] KEISLER H. J., *Ultraproducts and saturated models*, Indag. Math. 26 (1964), 178-186.

[M] MAC LANE S., *The universality of formal power series fields*, Bull. Amer. Math. Soc. 45 (1939), 888-890.

[S] SIERPINSKI W., *Sur une propriété des ensembles ordonnés*, Fund. Math. 36 (1949), 56-67.

Manoscritto pervenuto in redazione 7 agosto 1977.