

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

ROBERTO MORESCO

Sui gruppi e corpi ordinati

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 58 (1977), p. 175-190

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1977__58__175_0>

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

Sui gruppi e corpi ordinati

ROBERTO MORESCO (*)

SUMMARY: In this paper, results due to Alling concerning η_α ordered abelian groups and fields are reproved, in a different (and perhaps more illuminating) way: η_α -structures and α -maximality are related to completeness (with respect to the order uniformity) of the structure and its quotients (§ 1, 2). Results are proved concerning the cardinality of complete α -maximal (and η_α) groups.

§ 0. Ogni struttura considerata in questo lavoro è commutativa e la parola « ordinato » significherà sempre « totalmente ordinato ».

DEF. 1. Una valutazione v su un gruppo ordinato G è una mappa da G in un insieme ordinato P dotato di un massimo p , che soddisfa:

- i) $v(a) = p$ se e solo se $a = 0$.
- ii) $|a| \leq |b| \Leftrightarrow v(a) \geq v(b)$.
- iii) $v(a+b) \geq \min. \{v(a), v(b)\} = v(a) \wedge v(b)$, e l'eguaglianza vale se $v(a) \neq v(b)$,
- iv) se $\exists n \in N : n|a| \geq |b|, n|b| \geq |a|$, è $v(a) = v(b)$.

Se per P si prende l'insieme dei sottogruppi convessi principali (i.e. $A \in P$ se e solo se $A = \{x \mid |x| < n|a|\}$ per qualche $n \in N$ ed un certo $a \in G$ fissato), ordinato da: $A \leq B$ se $A \supseteq B$, la mappa che associa ad ogni elemento di G il più piccolo sottogruppo convesso

(*) Indirizzo dell'A.: Istituto di Matematica Applicata, Via Belzoni, 7 - 35100 Padova.

che lo contiene è una valutazione che gode inoltre delle seguenti proprietà :

$$\text{iv')} \quad v(a) = v(b) \text{ se e solo se } \exists n \in \mathbb{N} \text{ tale che } n|a| \geq |b|, \\ n|b| \geq |a|$$

v) v è suriettiva.

DEF. 2. Una valutazione che verifica la iv') e v) si chiama valutazione naturale.

Si dimostra che una valutazione naturale è essenzialmente unica e d'ora in poi mi riferirò al modello di valutazione naturale precedentemente esposto.

Se K è un corpo si può introdurre nell'insieme dei sottogruppi convessi principali questa operazione: $v(a) + v(b) = v(ab)$. In questo caso la valutazione naturale è una valutazione anche secondo la solita definizione, che richiede in più, appunto, che sia $v(ab) = v(a) + v(b)$.

DEF. 3. I fattori di un gruppo G , che si indicano con $G(a)$, sono i quozienti $v(a)/\{g \in G : n|g| < a \ \forall n \in \mathbb{N}\}$, indicando con a un elemento di G e con v la valutazione naturale.

DEF. 4. Una struttura S ordinata da $<$ si dice η_α se per ogni coppia di sottoinsiemi A, B tali che $|A \cup B| < \aleph_\alpha$ e $A < B$, esiste $u \in S$ che soddisfa: $A < u < B$.

$A < B$ vuol dire: $a < b \ \forall a \in A, b \in B$; $u < A$ vuol dire $\{u\} < A$.

DEF. 5. S si dice quasi η_α ($q \cdot \eta_\alpha$) se per ogni coppia di sottoinsiemi A, B non vuoti e tali che $|A \cup B| < \aleph_\alpha$ e $A < B$, esiste $u \in S$ tale che $A \leq u \leq B$.

DEF. 6. S si dice strettamente quasi η_α (s.q. η_α) se per ogni coppia di sottoinsiemi non vuoti A, B tali che $|A \cup B| < \aleph_\alpha$ e $A < B$, esiste $u \in S$ tale che $A < u < B$.

NOTA. Nella definizione di insieme η_α si permette agli insiemi A, B di essere vuoti: questo vuol dire che prendendo $B = \emptyset$ (rispettivamente $A = \emptyset$) il tipo di cofinalità (rispettivamente: coinizialità) di S è $\geq \omega_\alpha$.

NOTA. Il concetto di insieme η_α si inserisce nel contesto più generale delle strutture \aleph_α -sature, studiate p.e. da Keisler in [Ke1], [Ke2], di cui sono un caso particolare: un insieme η_α non è altro infatti che una struttura con una relazione di ordine totale denso in sè che sia \aleph_α -satura.

Nello studio delle strutture η_α si è rivelato particolarmente utile il concetto di pseudoconvergenza, introdotto da Ostrowski e studiato da Kaplansky in (K): innanzitutto ricordo che in un gruppo G ogni topologia (compatibile) genera canonicamente una uniformità: se V è una base del filtro degli intorno di zero e $V \in V$, sia $V' = \{(x, y) : x, y \in G, x - y \in V\}$; allora $\{V'\}_{V \in V}$ forma una base di una uniformità su G . Se G è un gruppo ordinato, G si può pensare dotato della topologia dell'ordine (e quindi della uniformità dell'ordine).

Se sull'insieme dei sottogruppi convessi, ordinato come in precedenza, si mette la topologia dell'ordine, la valutazione naturale v è continua se non c'è un minimo sottogruppo convesso non banale oppure se tale sottogruppo è (isomorfo a) \mathbb{Z} . In entrambi i casi la topologia debole di v e quella dell'ordine, coincidono: nel primo questa topologia è $T_{3\frac{1}{2}}$ ma non discreta, è invece la topologia discreta nel secondo caso. Comunque se w è una valutazione da G in P , dotato della topologia dell'ordine, si può considerare su G la topologia debole di w , T_w , e la uniformità ad esso associata U_w . La pseudoconvergenza (relativa a w) è, in qualche modo, una « convergenza fino ad un certo punto » per la U_w . Precisamente:

DEF. 7 Sia G un gruppo ordinato con valutazione w , $(a_\rho)_{\rho < \gamma}$, $a_\rho \in G$ una sequenza transfinita indicata in γ con γ ordinale limite; γ si chiama la lunghezza della sequenza, e $(a_\rho)_{\rho < \gamma}$ si dice pseudoconvergente se per $\rho < \sigma < \tau < \gamma$ si verifica: $w(a_\sigma - a_\rho) < w(a_\tau - a_\sigma)$.

Se $(a_\rho)_{\rho < \gamma}$ è pseudoconvergente, $\forall \rho < \sigma < \gamma$ si ha $w(a_\sigma - a_\rho) = w(a_{\rho+1} - a_\rho)$ e possiamo quindi porre $w(a_\sigma - a_\rho) = \alpha_\rho$.

DEF. 8 $(a_\rho)_{\rho < \gamma}$ è pseudoconvergente in G , un elemento $g \in G$ si dice pseudolimita di $(a_\rho)_{\rho < \gamma}$ se $w(g - a_\rho) > \alpha_\rho \forall \rho < \gamma$. L'insieme degli x di G tali che $w(x) > \alpha_\rho \forall \rho < \gamma$ è un sottogruppo convesso di G e si chiama la larghezza di $(a_\rho)_{\rho < \gamma}$.

A proposito dell'intendere intuitivamente la pseudoconvergenza come « convergenza fino ad un certo punto », si vede subito che :

0.1. **TEOREMA.** Sia G un gruppo ordinato con valutazione w . Se L è un sottogruppo convesso di G , ogni sequenza pseudoconvergente di larghezza L ha uno pseudolimita se e solo se G/L è completo nell'uniformità indotta naturalmente dalla valutazione \bar{w} così definita : $\bar{w}(g+L) = \bar{w}(g)$ se $g \notin L$, $\bar{w}(L) = w(0)$.

DIM. : banale.

NOTA. Se w è la valutazione naturale di G , \bar{w} è la valutazione naturale di G/L .

DEF. 9. Sia G un gruppo ordinato con valutazione w . G si dice α -massimale per w se ogni sequenza pseudoconvergente di lunghezza $< \omega_\alpha$ ha uno pseudolimita in G . G è massimale per w se è α -massimale $\forall \alpha$. Sottointenderò « per w » se è chiaro di quale valutazione si parla.

Ci serve ancora un'altra costruzione, introdotta da Hahn e studiata ulteriormente da Kaplansky [K] che ne ha dimostrato una relazione fondamentale con il concetto di pseudoconvergenza.

Sia S un insieme ordinato, H un gruppo ; si indica con $H\{S\}$ l'insieme delle funzioni da S in H il cui supporto (= l'insieme degli elementi con immagine non nulla) è bene ordinato : $H\{S\}$ è un gruppo definendo l'addizione sulle componenti. Per comodità adottiamo questa scrittura : $\sum_{s \in S} a_s t^s$ è la funzione che manda $s \in S$ in $a_s \in H$, dove gli a_s sono diversi da zero solo su un insieme bene ordinato.

Se G è un gruppo ordinato a K un corpo, $K\{G\}$ è un corpo definendo così la moltiplicazione :

$$\sum_{g \in G} k_g t^g \cdot \sum_{h \in G} k_h t^h = \sum_{f \in G} \left(\sum_{g+h=f} k_g k_h \right) t^f .$$

Se H e K sono rispettivamente un gruppo ed un corpo ordinato, $H\{S\}$ e $K\{G\}$ sono ordinati dall'ordine lessicografico : cioè un elemento è maggiore di 0 (= la funzione nulla) se è maggiore di 0 l'immagine del primo elemento del supporto.

Si può definire una mappa w da $H\{S\}$ in $S' = S \cup \{\infty\}$ che manda una funzione non nulla nel minimo del suo supporto, e la costante 0 in ∞ . In S' l'ordine è prolungato ponendo $\infty > s \forall s \in S$; questa mappa è una valutazione e si chiama valutazione usuale; coincide con la valutazione naturale se e solo se H è archimedeo. Nel caso del corpo $K\{G\}$, la valutazione è una valutazione anche secondo la solita definizione.

0.2. TEOREMA $H\{S\}$ con la valutazione usuale è massimale.

DIM. : vedi $[K]$.

§ 1. DEF. 10. In un insieme ordinato S , un taglio di Dedekind $[A, B]$ è una coppia di sottoinsiemi A, B non vuoti tali che $A < B$, e $A \cup B = S$.

Sia $[A, B]$ un taglio di Dedekind in un gruppo G dove A non ha massimo e B non ha minimo. Poniamo $L = \{g \in G : |g| < b - a \forall b \in B, a \in A\}$. L è un sottogruppo convesso di G e diciamo che :

DEF. 11 $[A, B]$ è un taglio di Cauchy se $L = 0$; altrimenti diciamo che $[A, B]$ è un taglio di ampiezza positiva e che L è la sua ampiezza.

I tagli di ampiezza positiva caratterizzano i gruppi non archimedei: un gruppo è non archimedeo se e solo se ha dei tagli di ampiezza positiva (ricordando che un gruppo ordinato completo alla Dedekind è archimedeo).

DEF. 12 Se $[A, B]$ è un taglio di Dedekind in un insieme S , il carattere sinistro del taglio è la cofinalità di A , quello destro la coinizialità di B . Il carattere sinistro di un punto è la cofinalità dell'insieme $\{y : y < x\}$, quello destro la coinizialità di $\{y : y < x\}$.

In un gruppo carattere sinistro e destro di un punto coincidono, e sono uguali per ogni punto: li chiamiamo quindi carattere puntuale; il carattere puntuale inoltre è uguale al carattere destro e sinistro di ogni taglio di Cauchy, come si vede subito pensando al completamento (per l'uniformità indotta dall'ordine) del gruppo.

Si può dire allora che condizione necessaria e sufficiente perchè un gruppo sia η_α è che siano maggiori o uguali a \aleph_α la cofinalità,

il carattere puntuale e almeno un carattere per ogni taglio di ampiezza positiva.

1.1. LEMMA. Siano G un gruppo ordinato con valutazione naturale v , α un ordinale > 0 . Sono equivalenti :

- i) G è η_α .
- ii) $P = v(G \setminus \{0\})$ è η_α e G/L è completo per l'uniformità dell'ordine ereditato canonicamente da G se L è un sottogruppo convesso e G/L ha carattere puntuale minore di ω_α .

DIM. : 1) \Rightarrow ii) : prendiamo $A, B \subseteq P$ tali che $|A \cup B| < \aleph_\alpha$ e $A < B$.

Dato $p \in P$ indichiamo con \tilde{p} un elemento di G positivo e tal che $v(\tilde{p}) = p$. Ora se A non ha massimo, esiste $g \in G$ tale che :

$$\{n\tilde{b} : n \in \mathbb{N}, b \in B\} < g < \{\tilde{a} : a \in A\} \text{ perchè } G \text{ è } \eta_\alpha.$$

Se A ha un massimo a_0 , l'insieme $Y(\tilde{a}_0) = \{c \in G ; v(c) > a_0\}$ ha carattere superiore almeno ω_α e quindi si trova un $g \in Y(\tilde{a}_0)$ tale che $g > \{n\tilde{b} : n \in \mathbb{N}, b \in B\}$.

In ogni caso : $A < v(g) < B$.

Supponiamo ora che il carattere puntuale di G/L , che è uguale a quello dei tagli di Cauchy, sia $\beta < \omega_\alpha$. Prendiamo un elemento a che stia nel completamento (per l'uniformità dell'ordine) di G/L e due sequenze $(a_\varrho)_{\varrho < \beta}$, $(b_\varrho)_{\varrho < \beta}$ di elementi di G/L tali che a sia l'unico elemento del completamento per cui $a_\varrho < a < b_\varrho \forall \varrho < \beta$.

Se consideriamo due sequenze $(\tilde{a}_\varrho)_{\varrho < \beta}$, $(\tilde{b}_\varrho)_{\varrho < \beta}$ dove $L(\tilde{a}_\varrho) = a_\varrho$, $L(\tilde{b}_\varrho) = b_\varrho$, siccome G è η_α esiste un $g \in G$ tale che $\tilde{a}_\varrho < g < \tilde{b}_\varrho$ per ogni $\varrho < \beta$.

Allora $a = L(g)$ e quindi $a \in G/L$.

ii) \Rightarrow i) : intanto notiamo che : cofinalità di $G =$ coinczialità di $G =$ coinczialità di $P \geq \omega_\alpha$ e : carattere puntuale di $G =$ coinczialità dell'insieme $\{g \in G | g > 0\} =$ carattere dei tagli di Cauchy di $G =$ cofinalità di $P \geq \omega_\alpha$. Ci restano quindi da esaminare solo i tagli di ampiezza positiva. Sia allora $[A, B]$ uno di questi tagli e L la sua ampiezza. Supponiamo che $\text{cof.}(A) = \lambda$, $\text{cof.}(B) = \mu$, $\lambda + \mu = \gamma < \omega_\alpha$. Allora la coinczialità di $\{g \in G \setminus L, g > 0\}$, che è uguale al carattere

puntuale di G/L , è uguale a $\gamma < \omega_\alpha$ e perciò per ipotesi G/L è completo nell'uniformità indotta dall'ordine.

Sia $L(A) = \{L(a) : a \in A\}$, $L(B) = \{L(b) : b \in B\}$; allora $[L(A), L(B)]$ è un taglio di Cauchy in G/L , dove $L(A)$ non ha massimo (se no cof. $(L) = \text{cof.}(A)$ e L determinerebbe in P un taglio con entrambi i caratteri minori di ω_α) e $L(B)$ non ha minimo (per lo stesso motivo), quindi $\exists x$ tale che $L(A) < x < L(B)$ e una qualsiasi controimmagine di x in G è compresa tra A e B .

Adoperando le stesse notazioni del lemma precedente :

1.1' LEMMA. Siano G un gruppo ordinato con valutazione naturale v , α un ordinale > 0 . Sono equivalenti :

- i) G è s.q. η_α .
- ii) P è s.q. η_α , $\text{cof.}(P) \geq \omega_\alpha$ e G/L è completo per l'uniformità dell'ordine ereditato canonicamente da G se L è un sottogruppo convesso e G/L ha carattere puntuale minore di ω_α .

DIM. : Del tutto analoga alla precedente.

1.1'' LEMMA. Siano G un gruppo ordinato con valutazione naturale v , α un ordinale > 0 . Sono equivalenti :

- i) G è q. η_α .
- ii) P è s.q. η_α e G/L è completo per l'uniformità dell'ordine ereditato canonicamente da G se L è un sottogruppo convesso e G/L ha carattere puntuale minore di ω_α .

DIM. : analoga alla precedente ; per ii) \Rightarrow i) basta prendere A , $B \neq \emptyset$ e notare che la seconda condizione dice che se il carattere puntuale di G è $< \omega_\alpha$ allora (per $L = 0$) G è completo e quindi non ci sono tagli Cauchy.

NOTA. Nei lemmi precedenti non si può sostituire « completo per l'uniformità indotta dall'ordine » con « completo per l'uniformità della valutazione naturale ». Per esempio se S è un insieme η_α con $\alpha > 0$, $\mathbb{Q}\{S\}$ ha insieme dei valori η_α e tutti i quozienti richiesti sono completi per l'uniformità indotta dalla valutazione naturale ma non per quella dell'ordine : e $\mathbb{Q}\{S\}$ non è nemmeno q. η_1 : per $s \in S$ fissato, si prende il taglio $[A, B]$ così costruito :

$$A = \{a \in \mathbb{Q}\{S\} : a < \sqrt[2]{t^s}\}, B = \mathbb{Q}\{S\} \setminus A.$$

1.2 TEOREMA. Siano G un gruppo ordinato con valutazione naturale v , α un ordinale > 0 . Sono equivalenti :

- i) G/L è completo per l'uniformità dell'ordine ereditato canonicamente da G se L è un sottogruppo convesso e G/L ha carattere puntuale minore di ω_α ;
- ii) i fattori di G sono completi alla Dedekind e G è α -massimale.

DIM. : i \Rightarrow ii) : i fattori di G sono completi alla Dedekind perchè se $v(a_0)/L$ è un fattore, G/L ha carattere puntuale $< \omega_\alpha$ e quindi G/L è completo per l'uniformità indotta dall'ordine ; ma $v(a_0)/L$ è un sottogruppo chiuso di G/L e quindi completo per la uniformità dell'ordine ; in più è archimedeo e quindi completo alla Dedekind.

Sia poi L la larghezza di una sequenza pseudoconvergente di lunghezza minore di ω_α ; allora G/L è completo per la uniformità dello ordine che coincide con quella della valutazione naturale perchè $\{v(a) : a \in G/L\}$ non ha massimo e quindi per il Teorema 0.1 è α -massimale.

ii) \Rightarrow i) : Sia L un sottogruppo convesso tale che G/L abbia carattere puntuale minore di ω_α ; allora se in G/L topologia dello ordine e topologia indotta dalla valutazione coincidono, si può concludere sempre per il teorema 0.1. Se no vuol dire che $v(G \setminus L)$ ha un massimo $p = v(a_0)$; allora $v(a_0)/L$ è un fattore e quindi è completo per la topologia dell'ordine, e questo implica che è completo anche G/L .

Così si è dimostrato in maniera più facile ed istruttiva un teorema di Alling, molto utile per riconoscere gruppi e corpi η_α , che enuncio esplicitamente :

1.3 TEOREMA. Sia α un ordinale > 0 . Un gruppo ordinato G con valutazione naturale v è η_α se e solo se :

- i) il suo insieme dei valori P privato del massimo è η_α ;
- ii) G è α -massimale ;
- iii) i fattori di G sono completi alla Dedekind.

È del tutto ovvio il seguente corollario :

1.4 COROLLARIO. Sia α un ordinale > 0 . Un corpo ordinato K con valutazione naturale v è η_α se e solo se :

- i) il gruppo $v(K \setminus \{0\})$ è η_α ;
- ii) K è α -massimale;
- iii) i fattori di K sono (isomorfi a) \mathbb{R} .

§ 2. — Ricordo che un corpo ordinato K è realchiuso se verifica uno dei seguenti quattro fatti equivalenti :

- i) K non possiede estensioni algebriche proprie ad un corpo ordinato ;
- ii) $K[\sqrt{-1}]$ è algebricamente chiuso ;
- iii) ogni positivo è un quadrato ed ogni polinomio di grado dispari in una indeterminata a coefficienti in K ha uno zero in K ;
- iv) ogni polinomio in una indeterminata a coefficienti in K che assume valori positivi e negativi ha uno zero in K .

Ci servono inoltre i seguenti teoremi :

2.1 TEOREMA. Se K è realchiuso, $K\{G\}$ è realchiuso se e solo se G è divisibile. ([A2], [M]).

2.2 TEOREMA. Sia α un ordinale < 0 . Due insiemi ordinati (due corpi realchiusi) η_α di cardinale \aleph_α sono isomorfi. ([GJ]).

Grazie al teorema 1.3 abbiamo subito pronti degli esempi di gruppi e corpi η_α : se E è un insieme η_α , $\mathbb{R}\{E\}$ e $\mathbb{Z}\{E\}$ sono gruppi η_α non isomorfi perchè il primo è divisibile ed il secondo no ; $\mathbb{R}\{\mathbb{R}\{E\}\}$ e $\mathbb{R}\{\mathbb{Z}\{E\}\}$ sono corpi η_α ancora non isomorfi perchè non sono isomorfi i gruppi dei valori ; oppure perchè il primo è realchiuso ed il secondo no.

Se poi poniamo $E^\wedge = E \cup$ un minimo, $\bar{E} = E \cup$ un massimo, $E^+ = E \cup$ un predecessore (o un successore) (in maniera cioè che ci sia un salto), si ha :

- $\mathbb{R}\{E^\wedge\}$ è s.q. η_α e non η_1 ;
- $\mathbb{R}\{\bar{E}\}$ è q. η_α e non s.q. η_1 ;
- $\mathbb{R}\{E^+\}$ non è neanche q. η_1 .

Si può migliorare un poco la situazione: indichiamo con $G \{F\}_\alpha$ l'insieme $\{f \in G \{F\} : \text{il supporto di } f \text{ ha cardinale minore di } \aleph_\alpha\}$ e vediamo che se E è η_α e $\text{cof}(\omega_\beta) \geq \omega_\alpha$, $R \{E\}_\beta$ e $Z \{E\}_\beta$ sono ancora η_α . Due delle condizioni del teorema 1.3 sono ovvie: la terza ci è fornita da questo teorema:

2.3 TEOREMA. $R \{E\}_\alpha$ e $Z \{E\}_\alpha$ sono $\text{cof}(\omega_\alpha)$ -massimali.

DIM.: ricordo che in questi gruppi la valutazione naturale e la valutazione usuale coincidono; abbiamo già notato che i gruppi $R \{E\}$ e $Z \{E\}$ sono massimali; allora se abbiamo una successione pseudoconvergente $(a_\delta)_{\delta < \omega_\alpha}$, con $\omega_\beta < \text{cof}(\omega_\alpha)$, di elementi di $R \{E\}_\alpha$ (o $Z \{E\}_\alpha$), questa ha un pseudolimita in $R \{E\}$ (in $Z \{E\}$). È chiaro che c'è un pseudolimita a tale che $\text{supp}(a) \subseteq \bigcup_{\delta < \omega_\beta} \text{supp}(a_\delta)$ e quindi se $|\text{supp}(a_\delta)| = \aleph_\delta < \aleph_\nu$ viene che $|\text{supp}(a)| \leq \sum_{\delta < \omega_\beta} \aleph_\delta \leq \aleph_\beta \cdot \aleph_\nu < \aleph_\alpha$ dove \aleph_ν è tale che $\aleph_\delta \leq \aleph_\nu \neq \aleph_\alpha$ ed esiste perchè l'insieme degli \aleph_δ non può essere cofinale in ω_α .

2.4 TEOREMA. Sia K un corpo realchiuso, α un ordinale maggiore di 0. $K \{G\}_\alpha$ è realchiuso se e solo se G è divisibile.

DIM.: la sufficienza è dovuta ad Alling; la necessità è banale.

Ora indichiamo con $\mu(\alpha)$ il più piccolo cardinale per cui esiste un insieme η_α di cardinale $\aleph_{\mu(\alpha)}$; poniamo poi $\nu(\alpha) = \alpha$ se \aleph_α è regolare, altrimenti $\nu(\alpha) = \alpha + 1$. Sono stati dimostrati per gli insiemi η_α i seguenti teoremi ([S]):

2.5 TEOREMA. Esiste un insieme $S \eta_\alpha$ di cardinale \aleph_α se e solo se \aleph_α è regolare e $2^{\aleph_\alpha} \leq \aleph_\alpha \forall \gamma < \alpha$.

2.6 TEOREMA. Esistono due insiemi η_α di cardinale \aleph_δ che non sono simili se e solo se $\delta \geq \mu(\alpha)$, $\delta > \nu(\alpha)$.

Si può quindi cercare di dimostrare qualche teorema analogo per i corpi realchiusi (ed ovviamente i gruppi divisibili). Infatti si può dire questo:

2.7 TEOREMA. Se $\aleph_\nu \geq \aleph_{\mu(\alpha)}$, \aleph_ν è regolare e $\sum_{\delta < \nu} 2^{\aleph_\delta} \leq \aleph_\nu$, esiste un corpo realchiuso η_α di cardinale \aleph_ν .

DIM : Sia E un insieme η_α di cardinale \aleph_γ : questo è facile da ottenere: se A è un insieme η_α di cardinale $\aleph_{\mu(\alpha)}$, si può prendere $E = \omega_\gamma$ (prodotto cartesiano) A con l'ordine lessicografico. Consideriamo $\mathbb{R}\{E\}_\gamma$: questo gruppo è γ -massimale e quindi α -massimale, l'insieme dei valori E è η_α , i fattori sono \mathbb{R} e quindi il gruppo è η_α . Vediamo qual'è il suo cardinale: identifichiamo E con ω_γ . Per $\pi < \omega_\gamma$ sia $A_\pi = \{f \in \mathbb{R}\{E\}_\gamma : \text{supp}(f) \subseteq \pi\}$. Siccome \aleph_γ è regolare e $|\text{supp}(f)| < \aleph_\gamma$ per ogni f esiste π tale che $f \in A_\pi$. Quindi: $|\mathbb{R}\{E\}_\gamma| \leq \sum_{\pi < \omega_\gamma} |A_\pi| \leq \sum_{\pi < \omega_\gamma} 2^{\aleph_\delta |\pi|} \leq \sum_{\delta < \gamma} \aleph_{\delta+1} 2^{\aleph_\delta} = \sum_{\delta < \gamma} 2^{\aleph_\delta} \leq \aleph_\gamma$. D'altra parte è chiaro che $|\mathbb{R}\{E\}_\gamma| \geq \aleph_\gamma$ e quindi concludendo $\mathbb{R}\{E\}_\gamma$ è un gruppo divisibile η_α di cardinale \aleph_γ . Ripetendo lo stesso discorso naturalmente viene che $\mathbb{R}\{\mathbb{R}\{E\}_\gamma\}_\gamma$ è un corpo realchiuso η_α di cardinale \aleph_γ .

Questo teorema ha dei corollari molto interessanti :

2.8 COROLLARIO. Sia α un ordinale > 0 . Due gruppi ordinati divisibili η_α di cardinale \aleph_α sono (ordinatamente) isomorfi.

DIM. : siano G e H due gruppi divisibili η_α di cardinale \aleph_α .

Per il teorema 2.5 deve essere \aleph_α regolare e $2^{\aleph_\delta} \leq \aleph_\alpha \forall \delta < \alpha$.

Da quanto abbiamo appena dimostrato viene quindi che $\mathbb{R}\{G\}_\alpha$ e $\mathbb{R}\{H\}_\alpha$ sono corpi realchiusi η_α di cardinale \aleph_α e come tali sono isomorfi; ma allora sono isomorfi anche i loro gruppi dei valori.

NOTA. Evidentemente questo corollario si poteva dimostrare direttamente seguendo la dimostrazione data in $[GJ]$ del teorema 2.2.

2.9 COROLLARIO. Sia α un ordinale > 0 . L'esistenza di un insieme η_α di cardinale \aleph_α è equivalente a quella di un corpo realchiuso η_α di cardinale \aleph_α .

DIM. : Se S è η_α e $|S| = \aleph_\alpha$ allora \aleph_α è regolare e $2^{\aleph_\delta} \leq \aleph_\alpha \forall \delta < \alpha$. Quindi si può applicare il teorema appena dimostrato. Inoltre possiamo dire che se \aleph_α soddisfa queste ipotesi, il corpo realchiuso in questione è $\mathbb{R}\{\mathbb{R}\{S\}_\alpha\}_\alpha$.

NOTA : Nelle stesse ipotesi del teorema 2.7 si può provare che esiste un corpo η_α di cardinale \aleph_γ che non è realchiuso: $\mathbb{R}\{\mathbb{Z}\{E\}_\gamma\}_\gamma$.

Possiamo continuare l'analogia con gli insiemi con questo corollario:

2.10 COROLLARIO. Se è $\gamma \geq \mu(\alpha)$, $\nu > \gamma(\alpha)$, \aleph_γ regolare e $2^{\aleph_\delta} \leq \aleph_\gamma \forall \delta < \gamma$, esistono due corpi realchiusi η_α di cardinale \aleph_γ che non sono isomorfi.

DIM.: in queste ipotesi abbiamo visto che esistono due insiemi E e F η_α di cardinale \aleph_γ che non sono simili. Quindi non sono isomorfi $\mathbb{R}\{E\}_{\gamma, \aleph_\gamma}$ e $\mathbb{R}\{F\}_{\gamma, \aleph_\gamma}$.

§ 3. - **OSSERVAZIONE:** Sia G un gruppo ordinato valutato. Se $(g_\alpha)_{\alpha < \beta}$ è una sequenza pseudoconvergente e se $(g_{\alpha_\nu})_{\alpha_\nu < \beta}$ è una sequenza estratta dalla precedente che ammette g_ν come pseudolimita, allora g_ν è pseudolimita anche della $(g_\nu)_{\nu < \beta}$: se $\alpha_\nu > \alpha$, $v(g_\nu - g_\alpha) = v(g_\nu - g_{\alpha_\nu} + g_{\alpha_\nu} - g_\alpha) = v(g_{\alpha_\nu} - g_\alpha)$.

Indichiamo ora con G^\wedge il più piccolo sovragrupo divisibile di G e scriviamo i suoi elementi come classi laterali modulo la solita relazione di equivalenza, rappresentate da coppie ordinate (g, n) con $g \in G$, $n \in \mathbb{N}$. Se v è una valutazione su G , definiamo $v^\wedge : G^\wedge \rightarrow v(G)$, $v^\wedge(g, n) = v(g)$. Questa è una buona definizione e v^\wedge è una valutazione su G^\wedge . Se v è la valutazione naturale, anche v^\wedge è la valutazione naturale.

3.1 LEMMA. Se G è α -massimale anche G^\wedge è α -massimale.

DIM.: sia $(g_\alpha, n_\alpha)_{\alpha < \beta}$ una sequenza pseudoconvergente. Almeno un naturale n è cofinale nella sequenza $(n_\alpha)_{\alpha < \beta}$ e sia $(g_{\alpha_\nu}, n)_{\alpha_\nu < \beta}$ la sequenza cofinale estratta. Questa ha uno pseudolimita (g, n) dove g è pseudolimita di $(g_{\alpha_\nu})_{\alpha_\nu < \beta}$ in G , e si conclude per l'osservazione precedente.

3.2 TEOREMA. Sia G un gruppo $\alpha + 1$ -massimale per una valutazione v e tale che in $v(G)$ ci sia un insieme bene ordinato di cardinale \aleph_α , che chiamiamo $(p_\lambda)_{\lambda < \omega_\alpha}$. Allora $|G| \geq 2^{\aleph_\alpha}$.

DIM.: per il lemma non è restrittivo supporre G divisibile.

Indichiamo con S l'insieme $\{0, 1\}^{\omega_\alpha}$. Scegliamo in G due intervalli aperti V_0^0 e V_0^1 tali che $\overline{V_0^0} \cap \overline{V_0^1} = \emptyset$, e che in V_0^i ($i = 0, 1$) esistano x_0^i, y_0^i per cui $p_0 = v(y_0^i - x_0^i)$.

Poniamo : $W_{s,0} = V_0^0$, $x_{s,0} = x_0^0$, $y_{s,0} = y_0^0$ se $s(0) = 0$;

$W_{s,0} = V_0^1$, $x_{s,0} = x_0^1$, $y_{s,0} = y_0^1$ se $s(0) = 1$.

Per ogni $\overline{V_0^i}$ scegliamo poi due aperti convessi $V_1^{i,j}$ ($j = 0,1$) tali che $\overline{V_1^{i,0}} \cap \overline{V_1^{i,1}} = \emptyset$, che $V_1^{i,j}$ sia compreso tra $x_0^i + (y_0^i - x_0^i)/3$, $y_0^i - \frac{y_0^i - x_0^i}{3}$ e che in $V_1^{i,j}$ esistano $x_1^{i,j}$, $y_1^{i,j}$ per cui $p_1 = v(y_1^{i,j} - x_1^{i,j})$. Poniamo : $W_{s,1} = V_1^{i,j}$, $x_{s,1} = x_1^{i,j}$, $y_{s,1} = y_1^{i,j}$ se $s(0) = i$, $s(1) = j$.

Ora sia $s \in S_\alpha$ e supponiamo che $\forall \beta < \xi < \alpha$ e $s \in S_\alpha$ siano stati definiti degli aperti convessi non vuoti $W_{s,\beta}$ e degli elementi $x_{s,\beta}$, $y_{s,\beta}$ appartenenti a $W_{s,\beta}$ in modo tale che :

i) $\overline{W_{s,\beta+1}} \cap \overline{W_{t,\beta+1}} = \emptyset$ se $\beta + 1 < \xi$, s e t coincidono sugli ordinali più piccoli di $\beta + 1$ e $s(\beta + 1) \neq t(\beta + 1)$.

ii) $W_{s,\beta} = \bigcap_{\gamma < \beta} W_{s,\gamma}$ se β è limite.

iii) $v(y_{s,\beta} - x_{s,\beta}) = p_\beta$.

iv) $W_{s,\beta+1}$ sia compreso tra $x_{s,\beta} + \frac{y_{s,\beta} - x_{s,\beta}}{3}$ e

$y_{s,\beta} - \frac{y_{s,\beta} - x_{s,\beta}}{3}$ se $\beta + 1 < \xi$.

Dobbiamo ora definire $W_{s,\xi}$, $x_{s,\xi}$ e $y_{s,\xi}$, $\forall s \in S_\alpha$ in modo tale che le quattro proprietà elencate siano ancora valide sostituendo β con ξ . Distinguiamo due casi, secondo che ξ sia o no limite. Se ξ è limite poniamo $W_{s,\xi} = \bigcap_{\gamma < \xi} W_{s,\gamma}$, che è un aperto convesso perchè le successioni $(x_{s,\gamma})_{\gamma < \xi}$ e $(y_{s,\gamma})_{\gamma < \xi}$ sono pseudoconvergenti e tutti i loro pseudolimiti sono compresi in ogni $W_{s,\gamma}$. In $W_{s,\xi}$ esistono chiaramente $x_{s,\xi}$ e $y_{s,\xi}$ tali che $v(y_{s,\xi} - x_{s,\xi}) = p_\xi$. Se $\xi = \delta + 1$, prendiamo in $W_{s,\delta}$ due aperti convessi A_0 ed A_1 compresi tra $x_{s,\delta} + \frac{y_{s,\delta} - x_{s,\delta}}{3}$, $y_{s,\delta} - \frac{y_{s,\delta} - x_{s,\delta}}{3}$ tali che $\bar{A}_0 \cap \bar{A}_1 = \emptyset$

e x_i, y_i appartenenti ad A_i tali che $v(y_i - x_i) = p_\xi$.

Poniamo :

$W_{s,\xi} = A_0$, $x_{s,\xi} = x_0$, $y_{s,\xi} = y_0$ se $s(\xi) = 0$,

$W_{s,\xi} = A_1$, $x_{s,\xi} = x_1$, $y_{s,\xi} = y_1$ se $s(\xi) = 1$.

In questa maniera si costruiscono aperti convessi $W_{s,\beta}$ ed elementi $x_{s,\beta}, y_{s,\beta} \forall s \in S_\alpha$ e ogni $\beta < \omega_\alpha$ che godono delle quattro proprietà elencate.

Inoltre se $s, t \in S_\alpha$ differiscono su un ordinale non limite, diciamo $\beta + 1$, $\overline{W_{s,\beta+1}} \cap \overline{W_{t,\beta+1}} = \emptyset$. Poi siccome il gruppo è $\alpha + 1$ -massimale, $\bigcap_{\beta < \omega_\alpha} \overline{W_{s,\beta}} \neq \emptyset$: la sequenza $(x_{s,\beta})$ è pseudoconvergente perchè $v(x_{s,\sigma} - x_{s,\rho}) = p_\rho < p_\sigma = v(x_{s,\tau} - x_{s,\sigma}) \forall \rho < \sigma < \tau < \omega_\alpha$; e detto x_s un suo pseudolimito si ha $x_{s,\rho} < x_s < y_{s,\rho} \forall \rho < \omega_\alpha$. Infatti se per un certo ρ si avesse $x_{s,\rho} > x_s$, allora per $\sigma > \rho$ si avrebbe anche: $v(x_s - x_{s,\sigma}) < v(x_{s,\sigma} - x_{s,\rho}) = p_\rho$ che è falso. Analogamente si vede che x_s è più piccolo di tutti gli $y_{s,\rho}$; possiamo allora concludere definendo l'applicazione $x: S_\alpha \rightarrow G$, $x(s) = x_s$ e notando che x è iniettiva da $\{0, 1\}^K$ in G , dove K è l'insieme degli ordinali non limite minori di ω_α . $|K| = \aleph_\alpha$ e quindi $|G| \geq |\{0, 1\}^K| = 2^{\aleph_\alpha}$.

3.3 TEOREMA. Sia α un ordinale > 0 . Un gruppo G s.q. η_α , completo e di carattere puntuale ω_α ha cardinale maggiore o uguale a 2^{\aleph_α} .

DIM.: la dimostrazione è circa la stessa del teorema precedente: bisogna prendere $(p_\lambda)_{\lambda < \omega_\alpha}$ insieme bene ordinato cofinale in $v(G \setminus \{0\})$ (v è la valutazione naturale adesso), i $W_{s,\xi+1}$ si costruiscono con la precauzione che $v(x - y) > p_{\xi+1} \forall x, y \in W_{s,\xi+1}$; grazie al fatto che G è s.q. η_α si ha che $\bigcap_{\gamma < \beta} W_{s,\gamma} \neq \emptyset \forall \beta < \omega_\alpha$. Per vedere poi che $\bigcap_{\gamma < \omega_\alpha} W_{s,\gamma} \neq \emptyset$ basta notare che prendendo $y_\beta, x_\beta \in W_{s,\beta}$, $x_\beta < W_{s,\beta+1} < y_\beta$ (almeno uno dei due esiste: se ne esiste solo uno, si prende solo quello), i due insiemi $\{x_\beta\}$, $\{y_\beta\}$ determiniamo un taglio di Cauchy.

3.4 COROLLARIO. Sia α un ordinale qualsiasi. I gruppi ed i corpi s.q. η_α di cardinale \aleph_α non sono completi.

DIM.: ovvia.

Se H_α è l'insieme η_α di cardinale \aleph_α , che $R\{H_\alpha\}_\alpha$ (gruppo η_α di cardinale \aleph_α) non fosse completo si poteva vedere anche direttamente e con minore fatica: sia $(g_\delta)_{\delta < \omega_\alpha}$ un insieme di tipo ω_α cofina-

le in H_α e χ_ρ la funzione caratteristica dell'insieme $\{g_\delta : \delta < \rho < \omega_\alpha\}$; $\chi_\rho \in \mathbb{R}\{H_\alpha\}_\alpha$. La successione $(\chi_\rho)_{\rho < \omega_\alpha}$ è di Cauchy ed il suo limite in $\mathbb{R}\{H_\alpha\}$ (che è completo) è evidentemente la funzione caratteristica dell'insieme $\{g_\delta : \delta < \omega_\alpha\}$; ma questa funzione ha supporto di cardinale \aleph_α .

Ora poniamo per semplicità $G = \mathbb{R}\{\mathbb{R}\{S\}_\alpha\}$ (oppure $\mathbb{R}\{S\}$) e $G_\alpha = \mathbb{R}\{\mathbb{R}\{S\}_\alpha\}_\alpha$ (oppure $\mathbb{R}\{S\}_\alpha$) dove S è un insieme ordinato e $\text{cof}(S) \geq \aleph_\alpha$. Allora:

3.5 TEOREMA. G_α non è denso in G . Precisamente: la chiusura di G_α in G è formata da G_α più le funzioni il cui supporto è simile a ω_α ed è cofinale in $\mathbb{R}\{S\}_\alpha$ (oppure S).

DIM.: le funzioni con tale supporto stanno infatti nella chiusura: una successione di elementi che vi converge è quella delle funzioni uguali fino ad un certo punto e poi nulle. Viceversa se il supporto di $f \in G \setminus G_\alpha$ non è simile a ω_α , basta prendere f_1 e f_2 così:

$f_1(g_\delta) = f(g_\delta) = f_2(g_\delta) \quad \forall \delta < \omega_\alpha$ ($\{g_\delta\}$ è il supporto di f), e se g_γ sta ancora nel supporto di f ma $\gamma > \omega_\alpha$ e, per fissare le idee supponiamo $f(g_\gamma) > 0$: $0 < f_1(g_\gamma) < f(g_\gamma) < f_2(g_\gamma)$. Nell'intervallo di estremi f_1 ed f_2 non cadono elementi di G_α . Similmente se $\text{supp}(f)$ non è cofinale e $f \in G \setminus G_\alpha$, si prendono f_1 ed f_2 definite così: $f_1(\bar{t}) < 0 < f_2(\bar{t})$ con $\bar{t} > \text{supp}(f)$ e per il resto $f_1 = f_2 = f$.

Si vede facilmente invece che ogni elemento di G è pseudolimita di una sequenza di funzioni di G_α .

Riguardo la completezza possiamo dire ancora che un gruppo $q \cdot \eta_\alpha$ e non s.q. η_α è completo: un taglio di Cauchy dovrebbe avere carattere $\geq \omega_\alpha$ e quindi sarebbe $\geq \omega_\alpha$ anche il carattere puntuale, ma allora sarebbe s.q. η_α . Questo si può in parte invertire:

3.6. TEOREMA. Siano α un ordinale, G un gruppo $q \cdot \eta_\alpha$ di cardinale \aleph_α ; sono equivalenti:

- i) G è s.q. η_α ;
- ii) G non è completo.

DIM.: i) \Rightarrow ii): 3.4. ii) \Rightarrow i): si ricordi che il carattere puntuale è uguale al carattere dei tagli di Cauchy.

Se H è un insieme η_α di cardinale \aleph_α , $H^\wedge = H \cup$ un minimo, allora $\mathbb{R}\{H^\wedge\}_\alpha$ è s.q. η_α , di cofinalità ω_0 , divisibile e quindi $\mathbb{R}\{\mathbb{R}\{H^\wedge\}_\alpha\}_\alpha$ è corpo realchiuso q. η_α , completo di cardinale \aleph_α (e perciò non è s.q. η_α ; oppure non è s.q. η_α per il lemma 1.1').

BIBLIOGRAFIA

- [A1] ALLING N. L., *A characterization of Abelian η_α -groups in terms of their natural valuation*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 47 (1961), 711-713.
- [A2] ALLING N. L., *On the existence of real-closed fields that are η_α -sets of power \aleph_α* , Trans. Amer. Math. Soc. 103 (1962), 341-352.
- [GJ] GILLMAN L. and JERISON M., *Rings of continuous functions*, D. Van Nostrand, Princeton, NJ, 1960.
- [K] KAPLANSKY I., *Maximal fields with valuations*, Duke Math. J. 9 (1942), 303-321.
- [Ke1] KEISLER H. J., *Good ideals in fields of sets*, Ann. of Math. 79 (1964), 338-359.
- [Ke2] KEISLER H. J., *Ultraproducts and saturated models*, Indag. Math. 26 (1964), 178-186.
- [M] MAC LANE S., *The universality of formal power series fields*, Bull. Amer. Math. Soc. 45 (1939), 888-890.
- [S] SIERPINSKI W., *Sur une propriété des ensembles ordonnés*, Fund. Math. 36 (1949), 56-67.

Manoscritto pervenuto in redazione 7 agosto 1977.