RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

PIERANTONIO LEGOVINI

Gruppi finiti i cui sottogruppi sono o subnormali o pronormali

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 58 (1977), p. 129-147

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1977__58__129_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 58 (1977)

Gruppi finiti i cui sottogruppi sono o subnormali o pronormali.

PIERANTONIO LEGOVINI (*)

SUMMARY : The class $\mathcal{SN}\vee\mathcal{P}$ = finite groups whose subgroups are either subnormal or pronormal is introduced. Some theorems are given on the Sylow structure of $\mathcal{SN}\vee\mathcal{P}$—groups, in particular a Sylow-tower of special kind is found out. Furthermore, the behaviour of system normalizers and Carter subgroups in $\mathcal{SN}\vee\mathcal{P}$—groups is specified.

0. – Introduzione.

Premettiamo che in questa nota per gruppo si intenderà sempre gruppo *finito*. Tutte le notazioni usate sono standard. Per le definizioni che non diamo esplicitamente, rimandiamo a [10].

Ricordiamo che un sottogruppo H di un gruppo G è pronormale [16] se H è coniugato ad H^x in $\langle H, H^x\rangle$ per ogni $x \in G$, ed è anormale [3] se $x \in \langle H, H^x\rangle$ per ogni $x \in G$. I sottogruppi pronormali nei gruppi finiti sono stati oggetto di parecchie recenti ricerche, due delle quali principalmente hanno ispirato il presente lavoro :

a) un lavoro di T. A. Peng [14] in cui si dimostra che la classe $\mathcal{P}$ (**) = {gruppi in cui ogni sottogruppo è pronormale} coincide con la classe dei t-gruppi finiti e risolubili. Questi ultimi sono stati accuratamente descritti in [7] ;

(*) Indirizzo dell'A. : Seminario Matematico, Università, 35100 Padova.
Lavoro eseguito nell'ambito dei Gruppi di Ricerca Matematica del C.N.R.

(**) La notazione è nostra.

b) un lavoro di G. Ebert e S. Bauman [6] in cui si studia la classe $s\mathcal{N}\vee\mathcal{A}$ (*) $= \{$gruppi in cui ogni sottogruppo è o subnormale o anormale$\}$, dando fra l'altro un teorema di struttura che riconduce la conoscenza completa dei gruppi di $s\mathcal{N}\vee\mathcal{A}$ a quella dei gruppi primari ammettenti automorfismi privi di coincidenze (f.p.f.-automorfismi) d'ordine primo.

In questa nota studiamo la classe $s\mathcal{N}\vee\mathcal{P} = \{$gruppi i cui sottogruppi sono o subnormali o pronormali$\}$, la quale contiene in modo naturale entrambe le classi $\mathcal{P}$ ed $s\mathcal{N}\vee\mathcal{A}$. Dopo aver discusso la definizione di $s\mathcal{N}\vee\mathcal{P}$ e dopo aver posto un limite alla lunghezza di Fitting dei gruppi che le appartengono, studieremo la struttura di Sylow di tali gruppi. Proveremo fra l'altro l'esistenza di uno speciale tipo di torre di Sylow e preciseremo il comportamento dei normalizzanti di sistema e dei sottogruppi di Carter in tali gruppi.

1. – Sulla definizione di $s\mathcal{N}\vee\mathcal{P}$.

Com'è facile verificare, le classi $\mathcal{P}$ ed $s\mathcal{N}\vee\mathcal{A}$ si sarebbero potute definire partendo solamente dai sottogruppi *primari*. Più precisamente, risulta $\mathcal{P} = \{$gruppi i cui sottogruppi primari sono pronormali$\}$, e l'analogo succede per $s\mathcal{N}\vee\mathcal{A}$. Questa possibilità non si presenta più per la classe $s\mathcal{N}\vee\mathcal{P}$, in quanto un gruppo dotato di soli sottogruppi primari pronormali o subnormali non necessariamente ha tutti i sottogruppi pronormali o subnormali, come si può constatare dal seguente:

Esempio. Sia $G = \langle x, y, z;\ x^3 = y^3 = z^4 = 1,\ [x, y] = 1,\ x^z = y,\ y^z = x^2\rangle$.

I sottogruppi primari di G sono o subnormali o pronormali in G, ma G non appartiene ad $s\mathcal{N}\vee\mathcal{P}$, come si deduce dalla seguente *analisi*:

G è 2-nilpotente e ha quindi i 3-sottogruppi subnormali; i 2-sottogruppi sono pronormali perchè i 2-gruppi di Sylow di G sono ciclici (cfr. [9] pag. 13). Si consideri ora $\langle x, z^2\rangle$ ed il suo coniugato $\langle x, z^2\rangle^z = \langle y, z^2\rangle$. La loro unione (gruppale) è $\langle x, y, z^2\rangle$, gruppo in cui $\langle x\rangle$ è normale. Allora un coniugato di $\langle x, z^2\rangle$ in $\langle x, y, z^2\rangle$ non potrà contenere y. Ne segue che $\langle x, z^2\rangle$ non è pronormale in G.

(*) La notazione è nostra.

Se poi $\langle x, z^2 \rangle \lhd \lhd G$, allora dovrebbe essere $\langle x, z^2 \rangle \lhd \langle x, y, z^2 \rangle$; se così fosse, si avrebbe $\langle x, z^2 \rangle^y = \langle x, z^2 \rangle$, cioè $\langle x, z^2 \rangle = \langle x, y^2z^2 \rangle$, da cui $y \in \langle x, z^2 \rangle$, assurdo.

È anche utile osservare che se $G \in \mathfrak{s}\mathfrak{N}\vee\mathfrak{P}$, i sottogruppi di G si prestano ad essere ripartiti in tre insiemi disgiunti:

a) i sottogruppi normali (subnormali e pronormali contemporaneamente);

b) i sottogruppi subnormali non pronormali (e quindi non normali, cfr. [16] 1.5);

c) i sottogruppi pronormali non subnormali.

Mettiamo ora in evidenza una possibile definizione equivalente della classe $\mathfrak{s}\mathfrak{N}\vee\mathfrak{P}$. All'uopo ricordiamo [4] che, dati in un gruppo G $H \leq K \leq G$, K si dice il *subnormalizzante* di H se (i) $H \lhd \lhd K$ e (ii) $H \lhd \lhd L$ implica $L \leq K$. K si dice *subnormalizzante forte* di H se (i) K è il subnormalizzante di H e (ii) $[K : H] = \mathrm{z}_0(H)$, ove $\mathrm{z}_0(H)$ denota il prodotto degli ordini dei fattori H-centrali di una H-serie di composizione di G che sono evitati da H [4].

Mann [13] ha dimostrato il seguente:

TEOREMA. Sia G un gruppo risolubile ed $H \leq G$. H è pronormale in G se e solo se $\mathfrak{N}_G(H)$ è il subnormalizzante forte di H.

Alla luce di questo risultato la classe $\mathfrak{s}\mathfrak{N}\vee\mathfrak{P}$ può venire allora caratterizzata quale la classe dei gruppi in cui ogni sottogruppo ha subnormalizzante, e se tale subnormalizzante è un sottogruppo proprio, allora è subnormalizzante forte e coincide col normalizzante.

Chiudiamo il presente numero con un semplice criterio di non pronormalità di cui faremo frequente uso nel seguito.

PROPOSIZIONE *1.1. Sia H un sottogruppo p-nilpotente di G. Posto $H = H_1H_2$ con $H_1 \in Syl_p(H)$ e $(|H_1|, |H_2|) = 1$, esista un $x \in \mathfrak{N}_G(H_1)$ tale che H_2 non sia coniugato ad H_2^x in $\langle H_2, H_2^x \rangle$. Allora H non è pronormale in G.*

DIM. Supponiamo per assurdo H pronormale in G; allora esso è coniugato ad $H^x = H_1H_2^x$ in $\langle H, H^x \rangle = H_1\langle H_2, H_2^x \rangle$. Esiste così un $y \in \langle H, H^x \rangle$ per cui $H^x = H^y$, e per la p-nilpotenza di H e di H^x, y può venire scelto in $\langle H_2, H_2^x \rangle$. Ora, ancora per la p-nilpotenza di H_1H_2 e di $H_1H_2^x$, dovrà essere $H_2^y = H_2^x$, contro l'ipotesi.

2. – Lunghezza di Fitting dei gruppi di $\mathcal{S}\mathfrak{N}\vee\mathfrak{F}$.

PROPOSIZIONE *2.1. Sia* $G \in \mathcal{S}\mathfrak{N}\vee\mathfrak{F}$. *Allora*:

(i) *ogni sottogruppo ed ogni immagine omomorfa di* G *stanno in* $\mathcal{S}\mathfrak{N}\vee\mathfrak{F}$;

(ii) G *è risolubile.*

DIM. (i) Triviale. (ii) Per (i), un controesempio d'ordine minimo è semplice non abeliano, e quindi privo di sottogruppi subnormali. Tale controesempio sta quindi in $\mathfrak{F}$ ed è perciò risolubile: contraddizione.

DEFINIZIONE. *Denoteremo con* $T(G)$ *l'unione (gruppale) di tutti i sottogruppi primari subnormali del gruppo* G, *che abbiano indice di subnormalità maggiore di 1*:

$$T(G) = \langle H\,;\, H \lhd \lhd G\,,\ |H| = p^n \text{ con } p \in \omega(G),\ e\ s(G:H) > 1 \rangle .$$

$T(G)$ è un sottogruppo caratteristico di G, ed è nilpotente, essendo $T(G) \leq F(G)$. Se $G \in \mathcal{S}\mathfrak{N}\vee\mathfrak{F}$, $T(G)$ può ovviamente essere inteso anche come l'unione dei sottogruppi primari di G che non sono pronormali in G.

Denoteremo poi con $T_p(G)$ *l'unico elemento di* $Syl_p(T(G))$. È, in modo ovvio, $T_p(G) \leq O_p(G)$.

PROPOSIZIONE *2.2. Sia* $G \in \mathcal{S}\mathfrak{N}\vee\mathfrak{F}$. *Allora*:

(i) $G/T(G) \in \mathfrak{F}$;

(ii) *la lunghezza di Fitting di* G *non supera 3.*

DIM. (i) Ogni sottogruppo primario di $G/T(G)$ è immagine omomorfa di un sottogruppo primario di G, non contenuto in $T(G)$. Quindi ogni sottogruppo primario di $G/T(G)$ è pronormale, e, per quanto osservato nel numero precedente, risulta $G/T(G) \in \mathfrak{F}$.

(ii) $T(G) \leq F(G)$ e quindi $G/F(G)$, in quanto immagine omomorfa di $G/T(G)$, appartiene a $\mathfrak{F}$. I $\mathfrak{F}$-gruppi sono supersolubili e quindi la loro lunghezza di Fitting non supera 2. Allora la lunghezza di Fitting di G non supera 3.

Il risultato sulla lunghezza di Fitting non è ulteriormente migliorabile, in quanto $\mathcal{S}\mathfrak{N}\vee\mathfrak{F}$ contiene tutti i gruppi nilpotenti (lunghezza di Fitting 1), contiene gruppi di lunghezza di Fitting 2 (per es. S_3) e contiene anche gruppi di lunghezza di Fitting 3, come per esempio il gruppo $G = PH$, con $P \lhd G$, P abeliano elementare d'ordine 2^3, ed H un $\{3, 7\}$-Hall-sottogruppo di PSL(3, 2), con l'azione naturale di H su P, riguardato come GF(2)-spazio vettoriale. Al contrario, in $\mathfrak{S}$ ed in $\mathcal{s}\mathfrak{N}\mathrm{v}\mathfrak{A}$, la lunghezza di Fitting non supera 2 (cfr. [14] e [6]).

3. – La struttura di Sylow in $\mathcal{s}\mathfrak{N}\mathrm{v}\mathfrak{S}$.

Lemma 3.1. *Sia $G \in \mathcal{s}\mathfrak{N}\mathrm{v}\mathfrak{S}$ e $P \in Syl_p(G)$. Se $H \leq P$ e $H \nleq T_p(G)$, è $H \lhd P$. In particolare $P/T_p(G)$ è dedekindiano.*

Dim. I sottogruppi di P non contenuti in $T_p(G)$ sono pronormali in G e sono quindi normali in P.

Teorema 3.2. *Sia $G \in \mathcal{s}\mathfrak{N}\mathrm{v}\mathfrak{S}$ e sia K il massimo sottogruppo di Hall di G contenuto in $T(G)$. Allora ogni torre di Sylow di K è prolungabile ad una torre di Sylow di G:*

$$\{1\} \lhd K \lhd KP_1 \lhd KP_1P_2 \lhd KP_1P_2 \dots P_n\,,$$

con $P_i \in Syl_{p_i}(G)$ e $p_1 > p_2 > \dots > p_n$.

Dim. Sia G un controesempio d'ordine minimo. $T(G/K)$ non contiene sottogruppi di Hall di G/K, ed è quindi chiaro che $K = \{1\}$.

Poniamo ora $G = P_1P_2 \dots P_n$ (alla Hall), con $P_i \in Syl_{p_i}(G)$ e con $p_1 > p_2 > \dots > p_n$. Se $H \leq G$, si ha che $T(H) \leq T(G)$ e quindi $T(P_1P_i)$ ($i = 2, 3, \dots, n$) non contiene sottogruppi di Hall di P_1P_i. Allora è $P_1 \lhd P_1P_i$ ($i = 2, 3, \dots, n$) non appena n supera 2. Questo porta ad una contraddizione, e ne segue allora che $n = 2$. Si consideri ora $G/T(G)$; si è visto che $G/T(G) \in \mathfrak{S}$, e come tale esso è supersolubile, e quindi p_2-nilpotente. Allora, posto $N = \mathfrak{N}_G(P_1) \wedge \mathfrak{N}_G(P_2)$, $NT(G)/T(G)$ è normalizzante di sistema di $G/T(G)$, e quindi $NT(G) \geq P_2$. Posto $N = N_1 \times N_2$, con $N_i \in \mathrm{Syl}_{p_i}(N)$, si ha che $P_2 = N_2T_2(G)$. È $N_2 \nleq T_2(G)$, altrimenti $P_2 = T_2(G)$, e $T(G)$ conterrebbe sottogruppi di Hall di G. Allora, per il lemma 3.1, sarà $N_2 \lhd P_2$. Inoltre, posto $V = N_2 \wedge O_{p_2}(G)$, è $V = \{1\}$, perchè altrimenti si avrebbe G/V soddisfacente il teorema, per cui sarebbe $P_1V/V \lhd G/V$;

ne segue $P_1V \lhd G$ e da $P_1V = P_1 \times V$ si avrebbe $P_1 \lhd G$, contraddizione. Ora da $N_2 \wedge O_{p_2}(G) = \{1\}$ segue subito $O_{p_2}(G) = T_2(G)$ e quindi $P_2 = N_2 \times T_2(G)$.

Consideriamo ora $\mathfrak{N}_G(P_1)$ e supponiamo che esista un M tale che $\mathfrak{N}_G(P_1) \lneqq M \lneqq G$. M soddisfa il teorema e poichè $P_1 \not\lhd\lhd M$, è $M_2 = T_2(M) \leq T_2(G)$, ove M_2 è il p_2-Sylow-sottogruppo di M. Ora $M_2 \geq N_2$, assurdo perchè $N_2 \nleq T_2(G)$. Ne segue che $\mathfrak{N}_G(P_1) = P_1N_2$ è massimale in G; ne segue in particolare, in virtù di $P_2 = N_2 \times \times T_2(G)$, che $T_2(G)$ deve essere caratteristicamente semplice, e quindi abeliano elementare. Supponiamo ora che $P_1T_2(G) \lneqq M \lneqq G$. Il teorema vale per M e allora o $P_1 \lhd M$ o $T_2(M) \in \mathrm{Syl}_{p_2}(M)$. Ma $P_1 \lhd M$ implica $T_2(G) \leq N_2$, assurdo; mentre $T_2(M) \in \mathrm{Syl}_{p_2}(M)$ implica $T_2(G) \lneqq T_2(M) \leq T_2(G)$, altro assurdo. Ne segue che $P_1T_2(G)$ è massimale in G e quindi che $T_2(G)$ è massimale in P_2, per cui $|N_2| = p_2$ e P_2 risulta così abeliano (elementare).

Consideriamo ora $\mathfrak{N}_G(P_2)$. Osserviamo che se $H \leq T_2(G)$, allora $H \lhd \mathfrak{N}_G(P_2)$: infatti HN_2 è pronormale in G, e se esistesse un $x \in \mathfrak{N}_G(P_2)$ tale che $H^x \neq H$, allora H^xN_2 e HN_2 dovrebbero essere coniugati in HH^xN_2, che è abeliano (si è sfruttato il fatto che $N_2 \lhd \mathfrak{N}_G(P_2)$; per vederlo si ricordi che $N_2 \lhd P_2$ e che N_1N_2 è nilpotente). Poichè $T_2(G) \neq \{1\}$, esiste un $H < T_2(G)$ ed esiste un $g \in G$ tale che $H^g \neq H$. Allora $g \notin \mathfrak{N}_G(P_2)$ per cui $\mathfrak{N}_G(P_2) \neq G$. Perciò $\mathfrak{N}_G(P_2)$ soddisfa il teorema ed è così nilpotente, perchè si ha $T_2(\mathfrak{N}_G(P_2)) \neq P_2$ e quindi $N_1 \lhd \mathfrak{N}_G(P_2)$. Ma allora $P_2 \leq Z(\mathfrak{N}_G(P_2))$ e questa condizione, per un noto teorema di Burnside, implica la p_2-nilpotenza di G. Quest'ultima contraddizione prova il teorema.

Il seguente teorema porge una interessante decomposizione degli $\mathfrak{s}\mathfrak{N}\mathrm{v}\mathfrak{S}$-gruppi.

TEOREMA 3.3. *Siano $G \in \mathfrak{s}\mathfrak{N}\mathrm{v}\mathfrak{S}$, K il massimo sottogruppo di Hall di G contenuto in $T(G)$ e $K \times L$ il massimo sottogruppo di Hall di G contenuto in $F(G)$. Posto $G = KLP_1P_2 \dots P_r$, $P_i \in Syl_{p_i}(G)$, $p_1 > p_2 > \dots > p_r$, risulta $T(G) \leq KLP_1$ e $P_2P_3 \dots P_r$ un t-gruppo.*

DIM. Sia $W \leq P_i$, $i > 1$, e sia $W \lhd \lhd G$. Si consideri P_1W. $P_1W \leq P_1O_{p_i}(G)$ che è p_1-nilpotente; inoltre per il teorema 3.2 $P_1 \lhd P_1P_i$ e in conclusione $P_1W = P_1 \times W$. Poi P_1W è non subnormale in G, altrimenti sarebbe $P_1 \lhd G$, quindi $P_1 \leq F(G)$, per cui $P_1 \leq KL$. Sia ora $x \in G$. È $W^x = W^{x_\pi}$ dove x_π è la π-parte di x, con $\pi = \{p_2, p_3, \dots, p_r\}$. $(P_1W)^{x_\pi} = P_1W^{x_\pi}$ ed essendo P_1W pronor male in G, $P_1 W$ è coniugato a $P_1 W^{x_\pi}$ in $P_1(W \vee W^{x_\pi})$. Poichè $P_1 \leq \mathcal{C}(W)$, deve esistere $y \in W \vee W^{x_\pi}$ tale che $W^y = W^{x_\pi}$; si vede così che per ogni $x \in G$ esiste $y \in W \vee W^x$ tale che $W^y = W^x$, cioè che W è pronormale in G. Quindi $P_2 P_3 \ldots P_r$ non contiene sottogruppi primari non pronormali in G, in particolare $P_2 P_3 \ldots P_r \in \mathcal{S}$.

Dal teorema 3.3 segue che se $G \in \mathcal{J}\mathfrak{N}\vee\mathcal{S}$ allora esiste al più un primo $p \in \omega(G)$ tale che se $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$ è $P \not\triangleleft G$ e $\mathrm{T}_p(G) \neq \{1\}$. Nel seguito diremo *eccezionale* questo numero primo. Dimostreremo ora con un esempio che la descrizione contenuta nel teorema 3.3 è la migliore possibile, nel senso che costruiremo un gruppo G con K, L e P tutti non identici:

Esempio. Sia $G = (K \times L)P$ con $KL \triangleleft G$, K gruppo quadrinomio, L ciclico d'ordine 7, P gruppo modulare non abeliano d'ordine 27, e P operi non trivialmente su K e su L di modo che sia $\mathcal{C}_P(KL) = \Omega_1(P)$. K ed L hanno così il significato che avevano nel teorema 3.3, 3 è eccezionale e $\mathrm{T}_3(G) = \Omega_1(P)$.

Teorema 3.4. *Sia $G \in \mathcal{J}\mathfrak{N}\vee\mathcal{S}$ e $P \in Syl_p(G)$. Se $T_p(G) \neq \{1\}$ e se $\{1\} \neq H \leq P$, allora $T_p(G) \wedge H \neq \{1\}$.*

Dim. Supponiamo $H \wedge \mathrm{T}_p(G) = \{1\}$. Allora $H\mathrm{T}_p(G) = H \times \mathrm{T}_p(G)$, in qianto $H \triangleleft P$ (lemma 3.1). Sia $N \leq \mathrm{T}_p(G)$ e si consideri HN. Ancora è $HN \triangleleft P$ e quindi $N = HN \wedge \mathrm{T}_p(G) \triangleleft \mathrm{T}_p(G)$, per cui $\mathrm{T}_p(G)$ è dedekindiano. Sia $U \leq \mathrm{T}_p(G)$ con $\mathrm{s}(G:U) > 1$. Allora esiste $g \in G$ tale che $U^g \neq U$. UH è pronormale in G e quindi è coniugato a $U^g H^g$ in $\langle UH, U^g H^g \rangle$. Se $P \triangleleft G$, allora H, essendo subnormale e pronormale in G, è normale in G e quindi $H^g = H$. Altrimenti $\mathrm{p} \in \omega(P)$ è eccezionale, e così per il teorema 3.3 g può essere scelto nel $\mathfrak{N}(P)$. Sempre per la pronormalità di H, $\mathfrak{N}(H) \geq \mathfrak{N}(P)$, e di nuovo $H^g = H$. Allora UH e $U^g H$ sono coniugati in $UU^g H \leq \mathrm{T}_p(G) \times H$. Ne segue che $UH = U^g H$ e quindi che $U = UH \wedge \mathrm{T}_p(G) = U^g H \wedge \mathrm{T}_p(G) = U^g$, assurdo.

Corollario 3.5. *Sia $G \in \mathcal{J}\mathfrak{N}\vee\mathcal{S}$ e $P \in Syl_p(G)$. Se $T_p(G) \neq \{1\}$, allora $T_p(G) \geq \Omega_1(P)$.*

Corollario 3.6. *Sia $G \in \mathcal{J}\mathfrak{N}\vee\mathcal{S}$ e $P \in Syl_p(G)$, e sia $P \gneq T_p(G) \neq \{1\}$. Se $N \leq P$ è un sottogruppo normale minimo di G, allora $|N| = p$.*

DIM. Supponiamo — come primo caso — $P \lhd G$. Per il teorema 3.4, $N \wedge \mathrm{T_p}(G) \neq \{1\}$ e quindi $N \leq \mathrm{T_p}(G)$. Sia ora $z \in P \setminus \mathrm{T_p}(G)$. È $\langle z \rangle \lhd G$ in quanto pronormale e subnormale. Sia $\langle z_1 \rangle = \Omega_1(\langle z \rangle)$. Se $N = \langle z_1 \rangle$, la tesi è dimostrata. Supponiamo allora $N \wedge \langle z \rangle = \{1\}$ e sia $N_1 \leq N$, con $|N_1| = \mathrm{p}$. $N_1 \langle z \rangle$ è pronormale in G; quindi $N_1\langle z \rangle \lhd G$ ed anche $N_1 = N_1\langle z \rangle \wedge N \lhd G$, per cui $N_1 = N$ e $|N| = \mathrm{p}$.

Sia invece p eccezionale, e di nuovo $z \in P \setminus \mathrm{T_p}(G)$. $\langle z \rangle \lhd \mathfrak{N}(P)$ e $\langle z \rangle \wedge \mathrm{T_p}(G)$ è centralizzato dai sottogruppi di Sylow normali. Quindi è di nuovo $\langle z_1 \rangle = \Omega_1(\langle z \rangle) \lhd G$; ancora sia $\langle z_1 \rangle \wedge N = \{1\}$. Sia N_1 un sottogruppo minimo di N; se $N_1 \neq N$, esiste $g \in G$ con $N_1^g \neq N_1$, e g lo si può scegliere in $\mathfrak{N}(P)$. Ora $N_1\langle z \rangle \lhd \mathfrak{N}(P)$ e quindi$N_1\langle z \rangle = N_1^g\langle z \rangle$, per cui $N_1 = N_1\langle z \rangle \wedge N = N_1^g\langle z \rangle \wedge N = N_1^g$, assurdo.

NOTA *1.* Ovviamente, nel caso in cui sia $\mathrm{T_p}(G) = \{1\}$, i p-sottogruppi normali minimi sono ancora d'ordine primo, in quanto i loro sottogruppi propri sono subnormali e pronormali (e quindi normali) in G. Se invece $\mathrm{T_p}(G) = P$ (e quindi $P \lhd G$) non è detto che valga la tesi del corollario 3.6. Essa infatti vale nel gruppo diedrale d'ordine 2^3, ma non vale in A_4, dove $\mathrm{T}_2(G)$ è di Sylow, ed è normale minimo.

COROLLARIO *3.7. Sia $G \in \mathcal{S}\mathfrak{N} \vee \mathfrak{S}$ e sia K il massimo sottogruppo di Hall di G contenuto in $T(G)$. Se $K = \{1\}$, G è supersolubile.*

DIM. Sia N un p-sottogruppo normale minimo di G, sia $H/N \lhd \lhd G/N$ con $\mathrm{s}(G/N : H/N) > 1$ e H/N sia un sottogruppo primario. Se H/N è un p-sottogruppo, allora H è un p-sottogruppo subnormale di G, con $\mathrm{s}(G : H) > 1$. Se invece H/N è un p'-sottogruppo, è $H/N = (I \times N)/N$, con $I \lhd \lhd G$ e $\mathrm{s}(G : I) > 1$.

Da queste considerazioni segue che se $T(G/N)$ contenesse dei sottogruppi di Hall di G/N, sarebbe $K \neq \{1\}$.

Allora G/N è supersolubile per induzione, e poichè $|N| = \mathrm{p}$ (Corollario 3.6 e Nota 1), anche G è supersolubile.

NOTA *2.* Il corollario 3.7 non è invertibile, nel senso che esistono gruppi supersolubili in $\mathcal{S}\mathfrak{N} \vee \mathfrak{S}$ dotati di $K \neq \{1\}$. Per esempio se G è il gruppo diedrale d'ordine 8, è $G = \mathrm{T}(G) = K$. Ci sono anche gruppi di ordine composto che fanno eccezione, come per esempio il gruppo $G = RS$, con $G \rhd R = \langle x \rangle \times \langle y \rangle$ abeliano elementare d'ordine 9 e con $|S| = 2\ (S = \langle z \rangle)$, definito dalle relazioni $x^z = y$, $y^z = x$. In G è $K = \mathrm{T}_3(G) = R$ e G è supersolubile $(\{1\} \lhd \langle xy \rangle \lhd R \lhd G)$.

4. – Normalizzanti di sistema e sottogruppi di Carter in $\mathcal{S}\mathfrak{N}\vee\mathfrak{T}$.

In questo paragrafo ogni volta che scriveremo un gruppo $G = P_1 P_2 \dots P_n$, intenderemo sempre che ci sia la torre di Sylow

$$\{1\} \lhd P_1 \lhd P_1 P_2 \lhd \dots \lhd P_1 P_2 \dots P_n = G,$$

con $P_n \not\lhd G$ se G è non nilpotente. Inoltre col simbolo ${}_pG$ indicheremo un p-complemento di Sylow di G.

Proposizione *4.1. Sia $G \in \mathcal{S}\mathfrak{N}\vee\mathfrak{T}$ e $G = P_1 P_2 \dots P_n$, $P_i \in Syl_{p_i}(G)$ sia non nilpotente.*
Allora ${}_{p_n}\mathfrak{N}_G(P_n) = {}_{p_n}\mathfrak{C}_G(P_n)$ ed è un t-gruppo.

Dim. ${}_{p_n}\mathfrak{N}_G(P_n) = {}_{p_n}\mathfrak{C}_G(P_n)$ segue dalla p_n-nilpotenza di $\mathfrak{N}_G(P_n)$.
Sia poi $H \leq {}_{p_n}\mathfrak{C}_G(P_n)$. HP_n è non subnormale in G, essendo $P_n \not\lhd G$, e quindi è pronormale. Sia $x \in {}_{p_n}\mathfrak{C}_G(P_n)$. Per 1.1 H deve essere coniugato ad H^x in $H \vee H^x$, e quindi H è pronormale in ${}_{p_n}\mathfrak{C}_G(P_n)$. Così ${}_{p_n}\mathfrak{C}_G(P_n) \in \mathfrak{T}$ ed è perciò un t-gruppo.

Esempio. Diamo un esempio di un gruppo G, quale descritto nella proposizione 4.1, in cui ${}_{p_n}\mathfrak{C}_G(P_n)$ sia un t-gruppo *non nilpotente*:

$$G = \langle x_1, x_2, y, z;\ x_1^7 = x_2^7 = y^3 = z^2 = 1,\ [x_1, x_2] = 1,$$
$$x_1^y = x_1^2,\ x_2^y = x_2^2,\ x_1^z = x_1^6,\ [x_2, z] = 1,\ [y, z] = 1 \rangle.$$

Posto $P_n = P_2 \in Syl_2(G)$, è ${}_2\mathfrak{C}_G(P_n) = \langle x_1, y \rangle$, non nilpotente.

Proposizione *4.2. Sia $G \in \mathcal{S}\mathfrak{N}\vee\mathfrak{T}$ e sia $G = P_1 P_2 \dots P_n$ non nilpotente. Se D è il normalizzante del sistema $\{P_1, P_2, \dots, P_n\}$, allora*

(i) $D = P \times \mathfrak{C}_{P_{n-1}}(P_n) \times \mathfrak{C}_{P_{n-2}}(P_n P_{n-1}) \times \dots \times \mathfrak{C}_{P_1}(P_n P_{n-1} \dots P_2)$;
(ii) *${}_{p_n}D$ è dedekindiano.*

DIM. (i) Discende dal fatto che $\{1\} \lhd P_1 \lhd \ldots \lhd P_1 P_2 \ldots P_n = G$ è una torre di Sylow. (ii) Per (i) ${}_{p_n}D \leq {}_{p_n}\mathcal{C}_G(P_n)$. Quindi ${}_{p_n}D$ è un t-gruppo (4.1), ed essendo nilpotente è dedekindiano.

PROPOSIZIONE *4.3. Sia* $G \in \mathfrak{s}\mathfrak{N}\mathrm{v}\mathfrak{S}$ *e sia* $G = P_1 P_2 \ldots P_n$ *non nilpotente. Sia* D *il normalizzante del sistema* $\{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$. *Allora:*

(i) $\mathfrak{N}_G(D)$ *è l'unico sottogruppo di Carter di* G *contenente* D, *e* D *è l'unico normalizzante di sistema di* G *contenuto in* $\mathfrak{N}_G(D)$ (*);

(ii) *posto* $D_i \in Syl_{p_i}(D)$, è

$$\mathfrak{N}_G(D) = D_n\, \mathcal{C}_{P_n}(D_n) \times D_{n-1}\, \mathcal{C}_{P_{n-1}}(D_n D_{n-1}) \times \ldots \times D_1 \mathcal{C}_{P_1}(D_n \ldots D_1) =$$
$$= D\, \mathcal{C}_G(D)\ (^{**}),\ \textit{ove ovviamente}\ D_n\, \mathcal{C}_{P_n}(D_n) = P_n\,;$$

(iii) ${}_{p_n}\mathfrak{N}_G(D)$ *è dedekindiano.*

DIM. (i) In virtù di [10] VI.13.9 e della proposizione 2.2(ii), ogni normalizzante di sistema di G giace in esattamente un sottogruppo di Carter, e per [16] Lemma 4.2 ogni sottogruppo di Carter di G contiene esattamente un normalizzante di sistema. Sia C l'unico sottogruppo di Carter contenente D; per [4] Theorem 3, $\mathfrak{N}_G(D) \leq C$; $\mathfrak{N}_G(D)$ è anormale in G (cfr. [16] 1.6) e C è nilpotente. Ne segue che $\mathfrak{N}_G(D) = C$.

(ii) Deriva dal fatto che $\{1\} \lhd P_1 \lhd P_1 P_2 \lhd \ldots \lhd P_1 P_2 \ldots P_n = G$.

(iii) ${}_{p_n}\big(D\mathcal{C}_G(D)\big) \leq {}_{p_n}\mathcal{C}_G(D_n) = {}_{p_n}\mathcal{C}_G(P_n)$ che è un t-gruppo per la proposizione 4.1; inoltre $\mathfrak{N}_G(D)$ è nilpotente, perchè di Carter.

Si considerino le classi

a) $\mathcal{X}_1 = \{$gruppi risolubili i cui normalizzanti di sistema sono anormali$\}$. I gruppi di $\mathcal{X}_1$ vengono detti SC-gruppi, per il fatto che in essi i normalizzanti di sistema sono sottogruppi di Carter.

b) $\mathcal{X}_2 = \{$gruppi risolubili i cui normalizzanti di sistema sono pronormali$\}$. È, in modo ovvio, $\mathcal{X}_2 \supset \mathcal{X}_1$.

(*) Questo risultato vale nelle ipotesi più deboli che G abbia normalizzanti di sistema pronormali e lunghezza di Fitting ≤ 3.

(**) Anche questo risultato è più generale: vale per ogni G risolubile di p-lunghezza ≤ 1, per ogni primo p (cfr. [1]).

$\mathscr{X}_1$ e $\mathscr{X}_2$ sono state studiate rispettivamente da R. W. Carter [2] e da J. S. Rose [16]. Una delle maggiori difficoltà nello studio di queste classi è rappresentata dal fatto che esse non sono chiuse rispetto ai sottogruppi. Ora i normalizzanti di sistema di un qualunque $\mathcal{S}\mathfrak{N}\mathrm{v}\mathfrak{S}$-gruppo G sono sempre pronormali (non possono essere subnormali perchè notoriamente la loro unione dà tutto il gruppo), e ne consegue banalmente che $\mathcal{S}\mathfrak{N}\mathrm{v}\mathfrak{S} \subseteq \mathscr{X}_2$ e che l'avere i normalizzanti di sistema pronormali è una proprietà che negli $\mathcal{S}\mathfrak{N}\mathrm{v}\mathfrak{S}$-gruppi si eredita ai sottogruppi. E naturale chiedersi a questo punto se in un $\mathcal{S}\mathfrak{N}\mathrm{v}\mathfrak{S}$-gruppo anche la proprietà di avere normalizzanti di sistema anormali si erediti ai sottogruppi, cioè se $(\mathcal{S}\mathfrak{N}\mathrm{v}\mathfrak{S}) \cap \mathscr{X}_1$ sia chiusa rispetto ai sottogruppi stessi. A questa domanda risponde affermativamente il seguente teorema.

Teorema 4.4. *Sia $G \in \mathcal{S}\mathfrak{N}\mathrm{v}\mathfrak{S}$ e G sia un SC-gruppo. Allora ogni sottogruppo di G è un SC-gruppo.*

Dim. Sia G un controesempio d'ordine minimo. Se ogni sottogruppo massimale di G fosse un SC-gruppo, allora ogni sottogruppo di G sarebbe un SC-gruppo, assurdo. Esiste allora N massimale in G, con N non SC-gruppo. Supponiamo che N sia anormale in G. Allora per [10] VI.11.19 un normalizzante di sistema di N contiene un normalizzante di sistema di G, e quest'ultimo per ipotesi è anormale in G, e quindi anche in N. Allora i due normalizzanti coincidono ed N risulta essere un SC-gruppo, assurdo. Si ha così $N \lhd G$.

Sia $\tilde{P}$ un sottogruppo normale minimo di G. Affermiamo che $\tilde{P} \leq N$. Infatti sia $\tilde{P} \nleq N$; allora $G = \tilde{P} \times N$ ed N risulta isomorfo a G/P, e quindi per [10] VI.13.2, N sarebbe un SC-gruppo. $\tilde{P}$ è l'unico sottogruppo normale minimo di G (G è così monolitico): se infatti $\tilde{P}_1 \neq \tilde{P}_2$ fossero normali minimi, $N/\tilde{P}_1$ e $N/\tilde{P}_2$ sarebbero SC-gruppi. Poichè gli SC-gruppi costituiscono una formazione ([10] VI.13.5), anche $N/\tilde{P}_1 \wedge \tilde{P}_2 \cong N$ sarebbe un SC-gruppo, assurdo. G ha perciò un unico sottogruppo di Sylow normale, perchè per il teorema 3.2 ne ha almeno uno, e se ne avesse più d'uno, non sarebbe più monolitico. Diciamo $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$ il sottogruppo di Sylow normale; è chiaro che $P \geq T(G)$, anzi per il corollario 3.7, $P = \mathrm{T}(G)$; se poi T è un p-complemento in G, $T \in \mathfrak{S}$, dunque è un t-gruppo; T non può essere nilpotente, in quanto N sarebbe metanilpotente, e dunque un SC-gruppo [2]. Per quanto esposto in [7], è $T = AH$, $(|A|, |H|) = 1$, A abeliano, $A \lhd T$, T/A massimo fattore nilpotente di T e $\mathcal{C}_A(H) = \{1\}$, per cui i normalizzanti di sistema di T sono tutti e soli i coniugati di H in T, come conseguenza di 4.2 (i).

Dimostriamo ora che $Z(G) = \{1\}$, per cui $\tilde{P}/\{1\}$ risulta essere un fattore eccentrico di G. Per assurdo sia $Z(G) \neq \{1\}$; allora $\tilde{P} \leq Z(G) \wedge N$ e quindi $\tilde{P} \leq Z(N)$.

Detto allora E un normalizzante di sistema di N, è $E \geq \tilde{P}$. Si consideri $G/\tilde{P} \gneq N/\tilde{P}$; $N/\tilde{P}$ è SC-gruppo per l'ipotesi su G, ed allora i suoi normalizzanti di sistema, tra cui c'è, per [10] VI.11.3, $E\tilde{P}/\tilde{P} = E/\tilde{P}$, sono anormali (in $N/\tilde{P}$), e quindi E è anormale in N, contro l'ipotesi. Sia ora $\mathcal{S} = \{P, A_1 \dots, A_r, H_1, \dots, H_s\}$ (con $\Pi_1^r A_i = A$, $\Pi_1^s H_i = H$) un sistema completo alla Hall di sottogruppi di Sylow di G. Allora posto $D = \mathfrak{N}_G(\mathcal{S})$, è $D = D_p H$ con $D_p \in \mathrm{Syl}_p(D)$; inoltre è $D_p \wedge \tilde{P} = 1$: infatti $\tilde{P}/\{1\}$ è un fattore eccentrico di G e quindi D evita $\tilde{P}/\{1\}$ per [10] VI.11.10, cioè $D \wedge \tilde{P} = \{1\}$ e a maggior ragione $D_p \wedge \tilde{P} = \{1\}$. Dimostreremo ora che $\tilde{P}D_p AH = G$. Supponiamo a tal fine $\tilde{P}D_p AH \lneq G$. Osserviamo che $D = D_p H$ è anche normalizzante di sistema per $\tilde{P}D_p AH$, e sunque questo ultimo è un SC-gruppo. Sia ancora E un normalizzante di sistema di N e sia $p_0 = [G : N]$; per [2] Theorem 3.3, è $D_{p_0} \gneq E_{p_0}$ $(D_{p_0} \in \mathrm{Syl}_{p_0}(D)$ ed $E_{p_0} \in \mathrm{Syl}_{p_0}(E))$ e quindi $p_0 \in \omega(H)$ oppure $p_0 = p$. Supponiamo $p_0 \in \omega(H)$. Allora $N = PAH_1$ con H_1 massimale in H e sarà $E = P_1 A_1 H_1$, con A_1 di Hall e $P_1 = \mathcal{C}_p(AH_1)$. È $\mathfrak{N}_N(E) \gneq E$ e quindi esiste $x \in P \setminus P_1$ con $x \in \mathcal{C}_G(E)$ (4.3 (ii)). Inoltre $N/\tilde{P}$ è SC-gruppo e quindi il suo normalizzante di sistema $E\tilde{P}/\tilde{P}$ è anormale in $N/\tilde{P}$ e quindi $E\tilde{P}/\tilde{P} = \mathfrak{N}_{N/\tilde{P}}(E\tilde{P}/\tilde{P}) \geq \mathfrak{N}_N(E)\tilde{P}/\tilde{P}$, per cui $\mathfrak{N}_N(E) \leq E\tilde{P}$. Allora x può essere scelto in $\tilde{P}$. Se consideriamo allora $PD_p AH_1$, questo gruppo è SC-gruppo in quanto sottogruppo di $\tilde{P}D_p AH$, SC-sottogruppo proprio di G; un suo normalizzante di sistema è $(P_1 \wedge \tilde{P}D_p)A_1 H_1$ e non è anormale perchè $x \in \tilde{P}D_p AH_1 \setminus (P_1 \wedge \tilde{P}D_p)A_1 H_1$ e x centralizza $E = P_1 A_1 H_1$ e a maggior ragione anche $(P_1 \wedge \tilde{P}D_p)A_1 H_1$, contraddizione. Dovrà essere $p_0 = p$. In questo caso $E = E_p H$, con E_p massimale in D_p. Ancora esiste $x \in \tilde{P}$ con $x \in \mathcal{C}_G(E)$; ora $\tilde{P}D_p AH \geq \tilde{P}E_p AH$, e un normalizzante di sistema di quest'ultimo gruppo è $E_p H \lhd D$ (infatti $\tilde{P} \wedge \mathcal{C}_G(AH) = \{1\}$). $\tilde{P}E_p AH$ dunque non è un SC-gruppo, una contraddizione. In conclusione $\tilde{P}D_p AH = G$; in particolare $D_p \leq \mathcal{C}(AH)$ e $\tilde{P} \leq Z(P)$, per cui $D_p \lhd G$ e quindi $D_p = \{1\}$ e $\tilde{P} = P$. Possiamo allora scrivere $G = PAH$, ove P è normale minimo in G, ed $N = PAH_1$ con H_1 massimale in H.

Affermiamo che H_1 è normalizzante di sistema di N; a tal fine, usando 4.1, basta far vedere che $\mathcal{C}_p(A) = \{1\}$. Sia $\langle a \rangle \leq A$, con $\langle a \rangle$ di ordine primo, e ci sia $\{1\} \neq B \leq P$ tale che $\langle B, a \rangle = B \times \langle a \rangle$. Se $B = P$, risulta $\langle a \rangle \lhd G$, e G non sarebbe monolitico. Sia allora $B \lneqq P$; esiste $z \in \mathcal{N}(\langle a \rangle)$ tale che $B^z \neq B$; B e B^z non sono coniugati in BB^z e quindi per 1.1 $B\langle a \rangle$ non è pronormale in G. Allora $B\langle a \rangle$ sarà subnormale in G; ma questo implica che $\langle a \rangle \lhd \lhd G$, e quindi $\langle a \rangle^G$ è primario e normale in G, assurdo. Ne segue che $\mathcal{C}_p(a) = \{1\}$ per ogni $1 \neq a \in A$, dunque $\mathcal{C}_P(A) = \{1\}$. Inoltre, se consideriamo $P\langle a \rangle H \gneqq P\langle a \rangle H_1$, si osserva per computazione che un normalizzante di sistema di $P\langle a \rangle H$ è $H = D$, per cui $P\langle a \rangle H$ è un SC-gruppo, mentre $P\langle a \rangle H_1$ non lo è. Di conseguenza è $P\langle a \rangle H = G$, dunque $A = \langle a \rangle$ ed $N = P\langle a \rangle H_1$.

Dimostriamo ora che P è un $\langle a \rangle$-modulo irriducibile. Infatti sia $P_0 \vee \langle a \rangle = P_0\langle a \rangle$, con $\{1\} \neq P_0 \lhd P\langle a \rangle$, e supponiamo $P_0\langle a \rangle \lhd \lhd G$. Essendo $(P_0\langle a \rangle)^G = P\langle a \rangle$, risulta $P_0\langle a \rangle \lhd P_1^*\langle a \rangle$ per un $P_1^* \gneqq P_0$. Per quanto sopra visto, è $\mathcal{C}_{P_0}(\langle a \rangle) \leq \mathcal{C}_{P_1^*}(\langle a \rangle) \leq \mathcal{C}_P(\langle a \rangle) = \{1\}$, e quindi $\mathcal{N}_{P_0\langle a \rangle}(\langle a \rangle) = \mathcal{N}_{P_1^*\langle a \rangle}(\langle a \rangle) = \langle a \rangle$, in contraddizione con l'argomento di Frattini. Ne consegue che $P_0\langle a \rangle$ è pronormale in G. Ma $P_0^y \neq P_0$, per un opportuno $y \in H \leq \mathcal{N}(\langle a \rangle)$. Per 1.1 P_0 e P_0^y devono essere coniugati in $P_0 P_0^y$, un assurdo. Così l'affermazione è provata.

Affermiamo ora che $F(\langle a \rangle H) = \langle a \rangle$ e quindi anche che H è ciclico, risultando $H \lesssim \mathrm{Aut}\,(a)$. Infatti sia $\{1\} \neq \mathcal{C}_H(a)$ e si consideri $\mathcal{C}_P(H_1)$. $\mathcal{C}_P(H_1) \neq P$, altrimenti, tenuto conto di [10] VI.13.4(b) e del fatto visto che H_1 è normalizzante di sistema di N, $P\langle a \rangle H_1$ sarebbe un SC-gruppo, assurdo. H_1 non è subnormale in G e quindi $\mathcal{C}_P(H_1)H_1$ è pronormale in G.

Allora, per la proposizione 1.1, ogni elemento di $\mathcal{C}_H(\langle a \rangle)$ deve normalizzare $\mathcal{C}_P(H_1)$. Consideriamo $\mathcal{C}_P(H_1)\ \mathcal{C}_H(\langle a \rangle)$; anche questo sottogruppo è pronormale non appena $\mathcal{C}_H(\langle a \rangle) \neq \{1\}$; ma in questo caso, per 1.1, $\mathcal{C}_P(H_1)$ e $(\mathcal{C}_P(H_1))^a$ dovrebbero essere coniugati in $\mathcal{C}_P(H_1)\,(\mathcal{C}_P(H_1))^a$, assurdo.

Riassumendo, abbiamo così: $G = P\langle a \rangle H$, con P abeliano elementare d'ordine p^{n}, $|\langle a \rangle| = \mathrm{q}$, $P\langle a \rangle$ gruppo minimale non abeliano (« di Miller-Moreno »), $H = \langle x \rangle$ ciclico, e $|x| = \mathrm{r}$ (non necessariamente potenza di un primo), r un divisore di q-1, e x opera su $\langle a \rangle$ come automorfismo d'ordine r. Per [9] Lemma 3.1, r divide n.

Inoltre, per la struttura di $P\langle a\rangle$ è $\mathrm{n} = 0(\mathrm{p}, \mathrm{q})$, il più piccolo intero positivo per cui valga la congruenza $\mathrm{p}^{\mathrm{n}} \equiv 1 \pmod{\mathrm{q}}$ [15]. Ora è $a^x = a^t$, con $0(\mathrm{t}, \mathrm{q}) = \mathrm{r}$, e allora t, riguardato come elemento di $\mathrm{GF}(\mathrm{q})^\times$, appartiene al sottogruppo generato da p.

Possiamo quindi porre $\mathrm{t} = \mathrm{p}^{\mathrm{s}}$ per un opportuno intero s. Inoltre (cfr. [15]) P può essere riguardato come il gruppo additivo del corpo $\mathrm{GF}(\mathrm{p})(\omega)$, ove ω è una radice primitiva q-esima dell'unità, e l'azione di a su P è (in questa rappresentazione) la moltiplicazione per ω, cioè è $y^a = y\omega$ per ogni $y \in P$, con l'ovvio significato dei simboli. Sia ora $1 \neq b \in \mathcal{C}_P(H_1)$. Per quanto detto, $\mathcal{N}_G(\langle \mathrm{b}\rangle) \ni x$, ma solo x^{r_1} centralizza b, ove $\mathrm{r}_1 = [H : H_1]$. Quindi $b^x = b^m$ con m intero poistivo e $0(\mathrm{m}, \mathrm{p}) = \mathrm{r}_1$. Nella rappresentazione sopra descritta di $P\langle a\rangle$ possiamo identificare b con l'identità moltiplicativa di $\mathrm{GF}(\mathrm{p})(\omega)$, che indicheremo con $1'$, per distinguerla dall'identità 1 di G.

Sarà perciò $(1')^x = \mathrm{m} \in \mathrm{GF}(\mathrm{p}) \subset \mathrm{GF}(\mathrm{p})(\omega)$.

Consideriamo ora gli elementi di P:

$$1', \ \omega, \ \omega^2, \dots, \ \omega^{\mathrm{n}-1}.$$

Essi formano una base di P come GF(p)-spazio vettoriale. Ora risulta $(\omega^{\mathrm{i}})^x = \mathrm{m}\,\omega^{\mathrm{i}\mathrm{p}^{\mathrm{s}}}$, $\mathrm{i} = 0, 1, \dots, n-1$: Infatti $(1')^x = \mathrm{m}$; poi, supposto che $(\omega^{\mathrm{i}-1})^x = \mathrm{m}\,\omega^{(\mathrm{i}-1)\mathrm{p}^{\mathrm{s}}}$, si ha che $(\omega^{\mathrm{i}-1})^{xa^{\mathrm{p}^{\mathrm{s}}}} = \left(\mathrm{m}\,\omega^{(\mathrm{i}-1)\mathrm{p}^{\mathrm{s}}}\right)^{a^{\mathrm{p}^{\mathrm{s}}}} = \mathrm{m}\,\omega^{(\mathrm{i}-1)\mathrm{p}^{\mathrm{s}}}\omega^{\mathrm{p}^{\mathrm{s}}} = \mathrm{m}\,\omega^{\mathrm{i}\mathrm{p}^{\mathrm{s}}}$, e altresì $(\omega^{\mathrm{i}-1})^{xa^{\mathrm{p}^{\mathrm{s}}}} = (\omega^{\mathrm{i}-1})^{ax} = (\omega^{\mathrm{i}})^x$ (si osservi che $ax = xa^{\mathrm{p}^{\mathrm{s}}}$).

Quindi l'automorfismo indotto da x su P non è altro che l's-esima potenza dell'automorfismo di Frobenius, composta con la moltiplicazione per m. P è un corpo finito ed ha perciò una base normale (cfr. [11] § 4.14). Esiste cioè un elemento $u \in P$ tale che $\{u, u^{\mathrm{p}}, u^{\mathrm{p}^2}, \dots, u^{\mathrm{p}^{\mathrm{n}-1}}\}$ è una base per P.

Allora gli elementi dell'insieme

$$X = \{u, \ u^x = \mathrm{m}u^{\mathrm{p}^{\mathrm{s}}}, \ u^{x^2} = \mathrm{m}^2u^{\mathrm{p}^{2\mathrm{s}}}, \dots, \ u^{x^{\mathrm{r}-1}} = \mathrm{m}^{\mathrm{r}-1}u^{\mathrm{p}^{(\mathrm{r}-1)\mathrm{s}}}\}$$

sono linearmente indipendenti su GF(p).

Posto $Y = \{u, \ u^{x^{\mathrm{r}_1}} = u^{\mathrm{p}^{\mathrm{r}_1\mathrm{s}}}, \dots, \ u^{x^{\mathrm{r}-\mathrm{r}_1}} = u^{\mathrm{p}^{(\mathrm{r}-\mathrm{r}_1)\mathrm{s}}}\}$, sarà

$$Y^x = \{u^x = \mathrm{m}u^{\mathrm{p}^{\mathrm{s}}}, \ u^{x^{\mathrm{r}_1+1}} = \mathrm{m}u^{\mathrm{p}^{(\mathrm{r}_1+1)\mathrm{s}}}, \ u^{x^{\mathrm{r}-\mathrm{r}_1+1}} = \mathrm{m}u^{\mathrm{p}^{(\mathrm{r}-\mathrm{r}_1+1)\mathrm{s}}}\}$$

e $Y \cup Y^x$ è un sottoinsieme linearmente indipendente di X.

Sarà $\langle Y\rangle \lneqq \langle X\rangle$ e $\langle Y\rangle^x \neq \langle Y\rangle$; il sottogruppo $\langle Y\rangle \langle x^{r_1}\rangle$ è pronormale in G (la serie standard di subnormalità si ferma a $P\langle a\rangle \langle x^{r_1}\rangle$) ; pertanto, per 1.1, $\langle Y\rangle$ e $\langle Y\rangle^x$ sono coniugati in $\langle Y \cup Y^x\rangle$, impossibile. Quest'ultima contraddizione conclude la dimostrazione del teorema.

COROLLARIO 4.5. *Sia G in $\mathcal{S}\mathfrak{N}\vee\mathfrak{S}$ e G sia un SC-gruppo. Allora se A, B, C sono sottogruppi di G, da A anormale in B e B anormale in C segue A anormale in C .*

DIM. Ricordiamo che gli SC-gruppi possono essere definiti come quei gruppi risolubili in cui la relazione di anormalità è transitiva (cfr. [10] VI § 13), nel senso che da $G \geq K \geq H$ e da H anormale in K e K anormale in G segue H anormale in G. Per il teorema 4.4 questo fatto si eredita ai sottogruppi di G .

TEOREMA 4.6. *Sia $G \in \mathcal{S}\mathfrak{N}\vee\mathfrak{S}$. G è un SC-gruppo se e solo se è metanilpotente.*

DIM. Necessità. Sia G un controesempio d'ordine minimo. Ogni sottogruppo proprio (teorema 4.4) ed ogni immagine omomorfa propria ([2] Theorem 5.2) di G sono metanilpotenti. Sia G/N il massimo fattore metanilpotente di G ; N è l'unico sottogruppo normale minimo di G . Quindi G ha un solo sottogruppo di Sylow normale, e tale sottogruppo sia $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$. Sia T un complemento di P in G . T è un t-gruppo non nilpotente. Si consideri la catena

$$\{1\} = P_0 \lhd P_1 \lhd \dots \lhd P_n = P$$

con P_i/P_{i-1} fattore principale di $G (i = 1, 2, \dots, n)$.

Supponiamo $n > 1$; allora per ogni $i \in \{1, \dots, n\}$, i gruppi P_iT/P_{i-1} sono metanilpotenti, e posto al solito [7] $T = AH$, con T/A massimo fattore nilpotente di T, risulta che $(P_iT/P_{i-1})/(P_iA/P_{i-1})$ è il massimo fattore nilpotente di P_iT/P_{i-1} . Quindi P_iA/P_{i-1} è nilpotente e $A \cong AP_{i-1}/P_{i-1}$, riguardato come p'-gruppo di automorfismi di P_i/P_{i-1} , induce l'identità sullo stesso P_i/P_{i-1} . Ma allora A stabilizza una serie normale di P, e quindi centralizza P, assurdo perchè G non è metanilpotente. Quindi $P = N$, l'unico sottogruppo normale minimo.

Sia a un elemento non identico di A ; a non centralizza P, perchè altrimenti $\langle a\rangle \lhd G$. Scegliamo a d'ordine primo q ; P risulta un $\langle a\rangle$-modulo irriducibile (la dimostrazione di quest'ultimo fatto è identica a quella esposta nella dimostrazione di 4.4). Sia $x \in H$ un elemento che agisce non trivialmente su $\langle a\rangle$; x esiste per [7] Satz 1, e si può supporre $|x| = \mathrm{r}^{\mathrm{m}}$, con r primo. $P\langle a\rangle \langle x\rangle$ è un SC-gruppo (per il teorema 4.4) e anche non metanilpotente. Pertanto $P\langle a\rangle \langle x\rangle = G$. Poichè $P\langle a\rangle\Phi(\langle x\rangle)$ è metanilpotente, $\langle a\rangle\Phi(\langle x\rangle)$ è ciclico, e quindi x opera su $\langle a\rangle$ come automorfismo d'ordine r. Sia $\langle x_1\rangle$ il sottogruppo d'ordine r di $\langle x\rangle$. $\langle x_1\rangle \neq \langle x\rangle$, altrimenti x indurrebbe su $P\langle a\rangle$ un automorfismo f.p.f. d'ordine primo e $P\langle a\rangle$ sarebbe abeliano : infatti, dato che $\langle x\rangle$ è un normalizzante di sistema di G, dovrà essere $\mathfrak{N}(\langle x\rangle) = \langle x\rangle$ in quanto G è un SC-gruppo. Quindi $\langle a\rangle \langle x_1\rangle$ è ciclico e x_1 opera irriducibilmente su P, in quanto se si ha $\{1\} \neq P_1 \lneqq P$, con $P_1^x = P_1$, allora $P_1\langle x_1\rangle$ dev'essere o subnormale o pronormale in G. Mostriamo che entrambe queste possibilità conducono a contraddizioni. Supponiamo anzitutto $P_1\langle x_1\rangle \lhd \lhd G$. È $(P_1\langle x_1\rangle)^G = P\langle x_1\rangle$, perchè P è normale minimo e $P\langle x_1\rangle \lhd G$. Sia ora $P_1\langle x_1\rangle \underset{\neq}{\lhd} P_2\langle x_1\rangle \lhd \lhd P\langle x_1\rangle$. Per l'argomento di Frattini $P_2\langle x_1\rangle = \mathfrak{N}_{P_2\langle x_1\rangle}(\langle x_1\rangle)P_1$ e quindi esiste $1 \neq y \in P$ con $yx_1 = x_1y$, assurdo in quanto $\langle x_1\rangle$ è normalizzante di sistema di $P\langle a\rangle \langle x_1\rangle$, che è un SC-gruppo. L'altro caso era che $P_1\langle x_1\rangle$ fosse pronormale in G ; ma allora, in virtù di 1.1, P_1 e P_1^a dovrebbero essere coniugati in $P_1P_1^a$, una contraddizione.

Allora $P\langle a\rangle$ e $P\langle x_1\rangle$ sono gruppi minimali non abeliani, e quindi se $|P| = \mathrm{p}^{\mathrm{n}}$, è $\mathrm{n} = 0(\mathrm{p}, \mathrm{q}) = 0(\mathrm{p}, \mathrm{r}) \leq r-1$. Ma, per [9] lemma 3.1, r divide n, contraddizione.

Sufficienza. Si veda [10] VI.13.4(a).

5. – Diremo *propriamente subnormale* un sottogruppo $H \lhd \lhd G$ tale che $s(G:H) > 1$, e diremo *propriamente pronormale* ogni sottogruppo pronormale di G che non sia normale in G.

TEOREMA *5.1. Sia $G \in \mathfrak{I}\mathfrak{N} \vee \mathfrak{S}$ ed H un sottogruppo propriamente subnormale di G. Allora H è nilpotente.*

DIM. Ragioniamo per induzione su $|H| + |G|$. Sia (H, G) un controesempio di somma minima. Scriviamo $G = P_1P_2 \dots P_n$, con $\{1\} \lhd P_1 \lhd P_1P_2 \lhd \dots \lhd P_1P_2 \dots P_n$, $P_i \in \mathrm{Syl}_{p_i}(G)$ (4.4), e sia $H = H_{i_1} H_{i_2} \dots H_{i_m}$, $H_{i_j} \leq P_{i_j}$, $i_1 < i_2 < \dots < i_m$.

Allora $H_{i_1}H_{i_2} \dots H_{i_{m-1}}$ è propriamente subnormale in G.

Infatti, supposto $H_{i_1} H_{i_2} \dots H_{i_{m-1}} \lhd G$, risulta H_{i_m} propriamente subnormale in G con ogni sottogruppo di H che lo contenga, altrimenti H risulterebbe pronormale ([16] 1.8), e quindi normale in G. Così se $n = 2$, sarebbe $H \leq 0_{p_{i_1}}(G) 0_{p_{i_2}}(G)$, per cui H nilpotente, assurdo; l'alternativa è $n > 2$: in questo caso ogni sottogruppo $H_{i_j} H_{i_m}$ $(j = 1, 2, \dots, m-1)$ sarebbe propriamente subnormale e quindi nilpotente. Di conseguenza ciascun H_{i_j} sarebbe subnormale in G, ed H risulterebbe di nuovo nilpotente, contraddizione.

Allora $H_{i_1} H_{i_2} \dots H_{i_{m-1}}$ è propriamente subnormale e quindi dovrà essere nilpotente. Allora H_{i_m} è non subnormale (altrimenti H è nilpotente), e quindi è propriamente pronormale. Se ora è $n > 2$, poichè non ogni sottogruppo $H_{i_j} H_{i_m}$ $(j = 1, 2, \dots, m-1)$ può essere pronormale, perchè tale sarebbe H, esiste un $H_{i_{j_0}} H_{i_m}$ propriamente subnormale. $H_{i_{j_0}} H_{i_m}$ è nilpotente, e così $H_{i_m} \lhd \lhd G$, assurdo. Quindi dovrà essere $H = H_{i_1} H_{i_2}$. Scelto un $g \in G$, poichè H_{i_2} è pronormale, esiste un $x \in H_{i_2} \vee H_{i_2}^g$ tale che $H_{i_2}^g = H_{i_2}^x$. Si ha quindi che $H \vee H^x \geq H_{i_2} \vee H_{i_2}^x \ni x$, e quindi è $x \in H$ (cfr. [17] Satz 7). Ne segue che $H_{i_2}^G = H_{i_2}^H$. Sia K il p_{i_1}–sottogruppo di Sylow di $H_{i_2}^G$. Per l'argomento di Frattini è $H_{i_1} = K\, \mathcal{C}_{H_{i_1}}(H_{i_2})$. Posto $\mathcal{C}_{H_{i_1}}(H_{i_2}) = R$, si consideri RH_{i_2}. Se fosse $RH_{i_2} \lhd \lhd G$, sarebbe $H_{i_2} \lhd \lhd G$, assurdo. Allora RH_{i_2} è pronormale. Ne segue che anche $H(RH_{i_2}) = K$ è pronormale in G, assurdo.

Corollario 5.2. *Sia $G \in \mathcal{J}\mathfrak{N}\mathrm{v}\mathfrak{S}$ ed $H \leq G$. Se $H \nleq F(G)$, allora H è pronormale in G.*

Corollario 5.3. *Sia $G \in \mathcal{J}\mathfrak{N}\mathrm{v}\mathfrak{S}$ e poniamo $G = P_1 P_2 \dots P_n$, con $\{1\} \lhd P_1 \lhd P_1 P_2 \lhd \dots \lhd P_1 P_2 \dots P_n$. Sia $H \lhd \lhd G$, e supponiamo che $\mathfrak{N}_G(H) \cap (P_i \setminus 0_{p_i}(G)) \neq \varnothing$.*

Allora $\mathfrak{N}_G(H) \geq P_i P_{i+1} \dots P_n$.

Dim. Sia $x \in \mathfrak{N}_G(H) \cap (P_i \setminus 0_{p_i}(G))$. Per 5.2 $H\langle x \rangle$ è pronormale in G; sia $y \in P_i P_{i+1} \dots P_n$; allora $(H\langle x \rangle)^y = H^y \langle x \rangle$, e $H\langle x \rangle$ è coniugato con $H^y \langle x \rangle$ in $(H \vee H^y)\langle x \rangle$; esiste così uno $z \in H \vee H^y$ tale che $H^y = H^z$; ma allora $H \vee H^z \ni z$ e quindi $H^y = H^z = H$.

COROLLARIO 5.4. *Sia* $G = P_1 P_2 \dots P_n \in \mathcal{S}\mathfrak{N}\vee\mathfrak{S}$. *Sia* $H \triangleleft \triangleleft G$ *con* $H \leq P_i$, *e* $g \in \mathfrak{N}_G(H) \cap (P_i \setminus O_{p_j}(G))$ *con* $i \neq j$.
Allora $\mathfrak{N}_G(H) \geq \mathfrak{N}_G(\langle g \rangle)$.

DIM. Per 5.2 $H\langle g \rangle$ è pronormale in G. Sia $x \in \mathfrak{N}_G(\langle g \rangle)$; per 1.1 deve essere $H^x = H^z$ con $z \in H \vee H^x$. Da $H \vee H^x = H \vee H^z \ni z$ segue $z \in H$, e quindi $H^x = H$.

COROLLARIO 5.5 *Sia* $G \in \mathcal{S}\mathfrak{N}\vee\mathfrak{S}$ *e siano* H_1, H_2 *sottogruppi pronormali di* G; *allora* $H_1 \vee H_2$ *è pronormale in* G.

DIM. Se $H_1 \vee H_2$ fosse subnormale propriamente, sarebbe $H_1 \vee H_2 \leq F(G)$, e quindi H_1 e H_2 sarebbero normali in G e tale sarebbe anche $H_1 H_2$, contraddizione.

OSSERVAZIONE. L'intersezione $H_1 \wedge H_2$ di due sottogruppi pronormali di un gruppo $G \in \mathcal{S}\mathfrak{N}\vee\mathfrak{S}$ non è necessariamente un sottogruppo pronormale.

BIBLIOGRAFIA

[1] J. L. ALPERIN, *Normalizers of system normalizers*, Trans. Am. Math. Soc. 113 (1964) 181-188.
[2] R. W. CARTER, *On a class of finite soluble groups*, Proc. London Math. Soc. (3) 9 (1959) 623-640.
[3] R. W. CARTER, *Nilpotent self-normalizing subgroups of soluble groups*, Math. Zeit. 75 (1961) 136-139.
[4] R. W. CARTER, *Nilpotent self-normalizing subgroups and system normalizers*, Proc. London Math. Soc. (3) 12 (1962) 535-563.
[5] R. W. CARTER, *Normal complements of nilpotent self-normalizing subgroups*, Math. Zeit. 78 (1962) 149-150.
[6] G. EBERT e S. BAUMAN, *Abnormal chains in finite soluble groups*, Jour. Alg. 36 (1975) 287-293.
[7] W. GASCHÜTZ, *Gruppen in denen das Normalteilersein transitiv ist*, Jour. fur Math., Bd 198, Heft 2 (1957) 87-92.
[8] D. GORENSTEIN, *Finite groups*, Harper & Row (1968).
[9] D. GORENSTEIN, *Finite groups which admit an automorphism with few orbits*, Canad. Jour. Math. 12 (1960) 73-100.
[10] B. HUPPERT, *Endliche gruppen I*, Springer Verlag (1967).
[11] N. JACOBSON, *Basic algebra* 1, Freeman (1974).

[12] A. MANN, *System normalizers and subnormalizers*, Proc. London Math. Soc. (3) 20 (1970) 123-143.
[13] A. MANN, *A criterion for pronormality*, Jour. London Math. Soc. 44 (1969) 175-176.
[14] T. A. PENG, *Finite groups with pronormal subgroups*, Proc. Amer. Math. Soc. 20 (1969) 232-234.
[15] L. RÉDEI, *Das schiefe Produkt in der Gruppentheorie*, Comm. Math. Helvetici 20 (1947) 225-264.
[16] J. S. ROSE, *Finite soluble groups with pronormal system normalizers*, Proc. London Math. Soc. (3) 17 (1967) 447-469.
[17] H. WIELANDT, *Kriterien für subnormalität in endlichen Gruppen*, Math. Zeit. 138 (1974) 199-203.

Manoscritto pervenuto in redazione il 29 giugno 1977.