RENDICONTI del SEMINARIO MATEMATICO della UNIVERSITÀ DI PADOVA

PIERANTONIO LEGOVINI Gruppi minimali non in $s\mathfrak{N}\vee\mathfrak{A}$

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 58 (1977), p. 117-128

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1977_58_117_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (http://rendiconti.math.unipd.it/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques http://www.numdam.org/

Gruppi minimali non in snva.

PIERANTONIO LEGOVINI (*)

RIASSUNTO: Si caratterizzano i gruppi minimali non in ANVA, questa ultima essendo la classe dei gruppi finiti i cui sottogruppi sono o subnormali o anormali.

0. – Introduzione. Premettiamo che in questa nota per gruppo si intenderà sempre gruppo *finito*. Tutte le notazioni usate sono standard. Per le definizioni che non diamo esplicitamente, rimandiamo a [7].

Consideriamo le seguenti classi gruppali:

- (i) $\mathfrak{NVA} = \text{Gruppi i cui sottogruppi sono o normali o anormali (**)};$
- (ii) $\mathcal{SIVA} = \text{Gruppi}$ i cui sottogruppi sono o subnormali o anormali ;
- (iii) $\mathcal{F} = \text{Gruppi i cui sottogruppi sono pronormali (**).}$

 \mathcal{IVA} e \mathcal{F} contengono entrambe \mathcal{IVA} ed anzi dalle definizioni segue immediatamente $\mathcal{IVA} = \mathcal{IIVA} \cap \mathcal{F}$.

^(*) Indirizzo dell'A.: Seminario Matematico, Università, 35100 Padova.

Lavoro eseguito nell'ambito dei Gruppi di Ricerca Matematica del C.N.R.

^(**) Ricordiamo, per convenienza del lettore, che un sottogruppo H di un gruppo G si dice anormale in G se $H \vee H^g \ni g$ per ogni $g \in G$, mentre H si dice pronormale in G se per ogni $g \in G$ esiste un $x \in H \vee H^g$ tale che $H^x = H^g$.

I gruppi in \mathfrak{NvA} sono stati caratterizzati da Fattahi [3], mediante il seguente teorema:

TEOREMA A (Fattahi). (i) Un gruppo nilpotente è in \mathfrak{NVK} se e solo se è dedekindiano.

ii) Un gruppo non nilpotente è in \mathfrak{NVA} se e solo se è un prodotto semidiretto $K\langle x\rangle$, con K abeliano, $\langle x\rangle\in \operatorname{Syl}_p(G)$ e tale che x induce per coniugio su K un automorfismo potenza di ordine p, privo di coincidenze.

I sottogruppi normali e quelli anormali sono i più facili esempi di sottogruppi pronormali e quindi \mathfrak{NvL} è inclusa in modo naturale in \mathfrak{F} . Per un risultato di Peng [10], \mathfrak{F} coincide con la classe degli ST-gruppi, cioè dei gruppi risolubili in cui la normalità è una relazione transitiva. Questi gruppi sono stati caratterizzati [4], come pure quelli minimali non in \mathfrak{F} [12].

Un'altra estensione naturale della classe \mathfrak{NVA} è la classe \mathfrak{IVVA} : si tratta di permettere ai sottogruppi non anormali di essere subnormali anzichè necessariamente normali. Un teorema di struttura per i gruppi di \mathfrak{INVA} si trova in [2]:

Teorema B (Ebert-Bauman). (i) Ogni gruppo nilpotente è in \mathcal{SNVA} ; (ii) Un gruppo non nilpotente è in \mathcal{SNVA} se e solo se è un prodotto semidiretto $K\langle x\rangle$, con $\langle x\rangle\in \mathrm{Syl}_p(G)$ e tale che x induce per coniugio su K un automorfismo d'ordine p, privo di coincidenze.

Scopo del presente lavoro è di determinare la classe \mathfrak{S} dei gruppi minimali non in \mathfrak{INVE} : un gruppo $G \in \mathfrak{S}$ se e solo se, presi $H \in K$, sottogruppi propri di G, con $H \leq K$, è H subnormale in K o H anormale in K e $G \notin \mathfrak{INVE}$. La descrizione completa dei gruppi di \mathfrak{S} è il contenuto dei teoremi 1.1, 3.1, 4.1, 4.2, 4.3, 5.1, e 5.2.

La caratterizzazione degli \mathcal{SNVA} -gruppi data nel teorema B sarà usata costantemente nel nostro lavoro, anche senza farne riferimento esplicito.

1. – Elenchiamo innanzitutto i gruppi non risolubili di S. Si tratta di una famiglia di gruppi semplici.

Chiamato con Berkovič un gruppo di tipo D_0 se è risolubile e se ogni suo sottogruppo normale è nilpotente, è facile verificare che ogni \mathfrak{STVA} -gruppo è di tipo D_0 . Non vale tuttavia il viceversa, come prova il seguente esempio. Sia G un gruppo ottenuto ampliando

quello dei quaternioni Q, d'ordine 8, mediante un automorfismo x d'ordine 3; si tratta di un gruppo di tipo D_0 , ma $G \notin \mathcal{SNVA}$, in quanto x fissa il centro di Q.

Si deve a Berkovič [1] il seguente:

TEOREMA C. Sia G un gruppo non risolubile e minimale non di tipo D_0 . Allora vale una delle seguenti affermazioni :

- (i) $G \cong PSL(2,2^p)$, con 2^{p-1} primo di Mersenne;
- (ii) $G \simeq SL(2.5)$.

Non è ora difficile provare che:

TEOREMA 1.1. Sia G non risolubile. Allora G è minimale non in \mathfrak{INVC} se e solo se $G \simeq \mathrm{PSL}(2,2^p)$ e $2^p\text{-}1$ è un primo di Mersenne.

DIM. SL(2,5) contiene un sottogruppo isomorfo a quello descritto nell'esempio, e quindi va escluso. Consultando poi un elenco dei sottogruppi propri di $PSL(2,2^p)$ (per esempio in [7]), con 2^p-1 primo, si vede che tali sottogruppi stanno tutti in \mathcal{ANVA} .

2. – Passiamo ad occuparci del caso risolubile. Premettiamo alcuni lemmi.

LEMMA 2.1. Sia G risolubile e minimale non in \mathfrak{SNVA} . Allora $2 \leq |\omega(G)| \leq 3$, ove $\omega(G)$ è l'insieme dei divisori primi di |G|.

DIM. G è risolubile ed è perciò esprimibile come prodotto di Sylow-sottogruppi a due a due permutabili: $G = P_1 P_2 \dots P_a$, $P_i \in \operatorname{Syl}_{p_i}(G)$ con $p_i \neq p_j$ se $i \neq j$.

Innanzitutto $n \geq 2$ perchè G è non nilpotente, e per lo stesso motivo non può essere $P_iP_j = P_i \times P_j$ per ogni coppia $(i\,,j)$ con $i \neq j$. Pertanto se n > 2, G contiene un \mathcal{SNVR} -gruppo del tipo P_iP_j non nilpotente, e quindi sarà — per fissare le idee — $P_i = \langle x_i \rangle$, e P_i anormale in P_iP_j (teorema B). Supposto n > 3, per ogni $k \neq i$, j si ha $P_iP_jP_k \in \mathcal{SNVR}$ e non nilpotente; per il teorema B sarà $P_jP_k = P_j \times P_k$ e x_i opererà su P_k come automorfismo f.p.f. di ordine primo. Ma allora, ancora per il teorema B, $G \in \mathcal{SNVR}$, un assurdo.

LEMMA 2.2. Sia G risolubile e minimale non in \mathfrak{SNVA} . Se G non ha una torre di Sylow, allora $|\omega(G)|=2$.

DIM. Per assurdo sia $|\omega(G)|=3$. G ha un sottogruppo normale massimo N; sia [G:N]=p. N non è nilpotente perchè G non possiede una torre di Sylow, e similmente N non è di Hall. N poi soddisfa la (ii) del teorema B. Se i Sylow-sottogruppi anormali fossero relativi al primo p, allora G avrebbe un p-complemento normale e nilpotente. Allora detti q ed r i divisori primi di |G| diversi da p, si avrà per esempio $Q \in \operatorname{Syl}_q(G) \cap \operatorname{Syl}_q(N)$ e $Q \lhd G$, mentre sarà $R \in \operatorname{Syl}_r(N) \cap \operatorname{Syl}_r(G)$ ciclico, e lo possiamo scegliere in modo da avere RP = PR. Ora $QP \lhd G$: infatti, posto $R = \langle x \rangle$, x normalizza Q ed x normalizza anche P perchè $\langle x \rangle P \in \mathfrak{IVA}$ e x opera f.p.f. su $P \land N \neq \{1\}$. Dunque G ha una torre di Sylow, contraddizione.

Osservazione. Il gruppo simmetrico S_4 sta in \mathfrak{S} , è privo di torri di Sylow ed è $|\omega(S_4)|=2$.

Nei tre numeri successivi esaminiamo separatamente i seguenti casi:

- 3. Il gruppo G è privo di torri di Sylow.
- 4. Il gruppo G ha torri di Sylow ed è $|\omega(G)|=2$.
- 5. Il gruppo G ha $|\omega(G)| = 3$.
- 3. Teorema 3.1. Sia G risolubile e privo di torri di Sylow. Allora G è minimale non in \mathfrak{SNVR} se e solo se è un prodotto semidiretto K(PQ), ove K è un sottogruppo normale minimo d'ordine p^n , $\mathfrak{C}(K) = K$, |PQ| = pq con p < q, PQ è non abeliano e, posto $Q = \langle x \rangle$, x opera f.p.f. su K.

DIM. In virtù del lemma 2.2., è $\omega(G) = \{p, q\}$, $p \neq q$. G ha un sottogruppo normale di indice primo, N, e sia [G:N] = p. N è un \mathcal{ANVA} -gruppo non nilpotente ed ha per il teorema B un sottogruppo di Sylow normale. Per le ipotesi fatte è chiaro che tale sottogruppo è $0_p(G)$.

Se poi $Q\in \operatorname{Syl}_{\operatorname{q}}(N)$, risulta $Q\in \operatorname{Syl}_{\operatorname{q}}(G)$, Q ciclico e se $Q=\langle x\rangle$, x opera f.p.f. su $K=0_{\operatorname{p}}(G)$ e il suo ordine — come automorfismo — è q (teorema B). Ora $\langle x^{\operatorname{q}}\rangle=0_{\operatorname{q}}(N)\lhd G$. Sia $\tilde{P}\in \operatorname{Syl}_{\operatorname{p}}(G)$;

 $\langle x^{\mathbf{q}} \rangle \ \tilde{P} \in \mathcal{STVA}$. Se fosse $\langle x^{\mathbf{q}} \rangle \ \tilde{P} \neq \langle x^{\mathbf{q}} \rangle \times \tilde{P}$, \tilde{P} sarebbe ciclico, e G sarebbe un gruppo a sottogruppi di Sylow ciclici, quindi dotato di una torre di Sylow. Si consideri ora $\mathcal{H}_G(Q)$. Se fosse $\mathcal{H}_G(Q) = Q$, Q avrebbe complemento normale (Burnside); quindi dev'essere $\mathcal{H}_G(Q) \supseteq Q$. Si consideri un $P \in \operatorname{Syl}_p(\mathcal{H}_G(Q))$. Poichè x opera f.p.f. su K, dovrà essere $P \land K = \{1\}$ e quindi a meno di coniugio $\tilde{P} = PK$ e |P| = p. Sia P^* un sottogruppo normale minimo di G, contenuto in K, e si consideri QP^*P ; questo gruppo è non nilpotente perchè x agisce f.p.f. su P^* . Allora se $QP^*P \supseteq G$, agirebbe f.p.f. anche su P per cui $P \subseteq C(Q)$, assurdo. Quindi K è normale minimo. Infine $\mathcal{H}(Q) = QP$ è non nilpotente, altrimenti $Q \subseteq Z(\mathcal{H}(Q))$, da cui $\tilde{P} \lhd G$, assurdo. Allora posto $P = \langle y \rangle$, y agisce f.p.f. su Q, per cui p < q. Inoltre da $\langle x^q \rangle P = \langle x^q \rangle \times P$ segue che $\langle x^q \rangle = \{1\}$ e quindi che |PQ| = pq.

Una verifica non difficile prova poi che ogni gruppo quale descritto nell'enunciato del teorema è minimale non in ANYA.

- 4. Passiamo al caso $|\omega(G)|=2$, con G dotato di torri di Sylow. Discuteremo questo caso in tre sottocasi distinti; a tal fine sia G=PQ, $P\in \mathrm{Syl}_n(G)$, $Q\in \mathrm{Syl}_n(G)$ e $P\triangleleft G$. I casi sono:
 - a) G è minimale non nilpotente.
 - b) G contiene un sottogruppo proprio non nilpotente, contenente Q.
 - c) G contiene un sottogruppo proprio non nilpotente, contenente P.
- a) È chiaro che in questo caso G è minimale non in se e solo se $G \notin \mathcal{INVA}$. Dobbiamo perciò escludere dai gruppi minimali non nilpotenti quelli in \mathcal{INVA} .

Ora i gruppi minimali non nilpotenti si lasciano descrivere nel seguente modo (si veda [8] o [11]: Sia G minimale non nilpotente. Allora G=PQ con $P \triangleleft G$, Q ciclico, $\Phi(P)\Phi(Q)=Z(G)$, exp P=p se p>2, exp $P\leq 4$ se p=2, e Q opera irriducibilmente su $P/\Phi(P)$.

Ora se in più $G \in \mathfrak{INVA}$, dev'essere, per il teorema B, $\mathfrak{C}_p(Q) = \{1\}$, e quindi $\Phi(P) = \{1\}$. In tal caso G è un gruppo minimale non abeliano (gruppo di Miller-Moreno [9]). In conclusione abbiamo provato il :

TEOREMA 4.1. Sia G minimale non nilpotente. Allora G è minimale non in 1974 se e solo se non è un gruppo di Miller-Moreno.

b) Teorema 4.2. Sia G = PQ, $P \in Syl_p(G)$, $Q \in Syl_q(G)$, $P \triangleleft G$ e G contenga un sottogruppo proprio non nilpotente, contenente Q. Allora G è minimale non in \mathcal{SNVS} se e solo se $G = P_2 \times P_1Q$, ove $P_2 \times P_1 = P$, $|P_2| = p$ e P_1Q è un gruppo di Miller-Moreno.

DIM. Sia P_1Q , con $P_1 \leq P$, il sottogruppo proprio non nilpotente esistente per ipotesi. Allora, in virtù del teorema B, è $P_1\Phi(Q) = P_1 \times \Phi(Q)$, per cui anche $P\Phi(Q)$ è nilpotente (teorema B). Ne segue che, posto $Q = \langle x \rangle$, x induce per coniugio su P un automor fismo d'ordine q. Allora $\mathcal{C}_P(x) \neq \{1\}$, altrimenti $G \in \mathcal{SNVQ}$. Affermiamo che P è abeliano. Sia per assurdo $Z(P) \neq P$. Supponiamo innanzitutto Z(P)Q nilpotente. Allora $Z(P) \wedge P_1 = \{1\}$, da cui $Z(P)P_1 = Z(P) \times P_1$, e $Z(P)P_1Q$ non nilpotente implica $Z(P) \times P_1 = P$, un assurdo. Resta il caso Z(P)Q non nilpotente. Allora x opera f.p.f. su Z(P) per cui si ha $\mathcal{C}_P(x) \wedge Z(P) = \{1\}$. Come sopra si giunge a $\mathcal{C}_P(x) \times Z(P) = P$, ancora un assurdo. In conclusione è Z(P) = P e P è abeliano. È $P_1 \wedge \mathcal{C}_P(x) = \{1\}$, e quindi $P_1\mathcal{C}_P(x) = P_1 \times \mathcal{C}_P(x)$. Sia P_2 un sottogruppo d'ordine P di $\mathcal{C}_P(x)$.

 $P_1P_2Q\in \mathcal{SNVA}$ e quindi $P_1P_2Q=G$ e $P_2=\mathfrak{C}_P(x)$. Per concludere ci basta dimostrare che P_1 è normale minimo. Sia P_1^* normale minimo in G, con $P_1^*\leq P_1$. $P_1^*P_2$ $Q\notin \mathcal{SNVA}$ e quindi $P_1^*P_2$ Q=G. Ne segue che $P_1^*=P_1$.

Anche qui è triviale verificare che i gruppi descritti nell'enunciato sono minimali non in \mathcal{SNVA} .

- c) Teorema 4.3. Sia G = PQ, $P \in Syl_p(G)$, $Q \in Syl_q(G)$, $P \triangleleft G$ e G contenga un sottogruppo proprio non nilpotente, contenente P. Allora G è minimale non in $\Im Tv \mathfrak{A}$ se e solo se è uno dei seguenti gruppi :
 - (i) $Q = \langle y \rangle$, d'ordine q^n , $n \geq 2$, P è normale minimo e y opera come automorfismo d'ordine q^2 , privo di orbite di cardinalità q.
 - (ii) $Q = \langle x, y | x^{q^n} = y^q = 1$, [x, y] = 1, $n \ge 1 \rangle$, $\langle x^q, y \rangle \triangleleft G$ e $G/\langle x^q, y \rangle$ è un gruppo di Miller-Moreno.
 - (iii) $Q = \langle x, y | x^{q^n} = y^q = 1$, $x^y = x^{1+q^{n-1}}$, $q^n \geq 8 \rangle$, $\langle x^q, y \rangle \triangleleft G$ e $G/\langle x^q, y \rangle$ è un gruppo di Miller-Moreno.
 - (iv) Q è un gruppo dei quaternioni d'ordine 8 e |P|=p .

DIM. Sia PQ_1 , $\{1\} \neq Q_1 \leq Q$ il sottogruppo non nilpotente di G dato per ipotesi. Usando il teorema B è facile dedurre che è $Q_1 < \cdot Q$

e, posto $Q_1 = \langle x \rangle$, che x opera f.p.f. su P. Così Q ha un sottogruppo massimo ciclico. Se poi Q avesse due sottogruppi massimi non ciclici, entrambi centralizzerebbero P, ed allora Q stesso centralizzerebbe P. Quindi Q ha al più un sottogruppo massimo non eiclico. P è normale minimo in G; infatti se $\{1\} \neq P^* \subsetneq P$ e $P^* \triangleleft G$, allora P^*Q è non nilpotente e quindi Q è ciclico e $P^*\Phi(Q) = P^* \times \Phi(Q)$ (teorema P). Ma questo è un assurdo in quanto P0 ha un sottogruppo massimo ciclico i cui generatori operano f.p.f. su P0.

- (i) Supponiamo come primo caso che Q sia ciclico. Posto $Q=\langle y\rangle$, sarà $|Q|\geq {\bf q}^2$ e $y^{{\bf q}2}\in \mathfrak{C}_Q(P)$. Se poi y ammettesse un'orbita di lunghezza ${\bf q}$, $y^{{\bf q}}$ centralizzerebbe tale orbita; ma $y^{{\bf q}}=x^{{\bf r}}$ con $({\bf r},{\bf q})=1$, per cui esso opera f.p.f. su P.
- (ii) Sia ora $Q=\langle x\,,\,y\,|\,x^{\mathbf{q}^{\mathbf{n}}}=y^{\mathbf{q}}=1\,,\,\,[x\,,\,y]=1\,,\,\,n>0\rangle$. Se $n>1\,,\,\,\langle x^{\mathbf{q}},\,y\rangle$ è non ciclico, e quindi $P\langle x^{\mathbf{q}},y\rangle$ è nilpotente ; se $\mathbf{n}=1\,,\,\,Q$ è abeliano elementare d'ordine q². Poichè Q opera irriducibilmente su P, per un noto teorema è $Q/\mathcal{C}_Q(P)$ ciclico, e quindi, scegliendo eventualmente nuovi generatori, si può supporre $\mathcal{C}_Q(P)=\langle x^{\mathbf{q}}\,,\,y\rangle=\langle y\rangle$. Il resto è banale.
- (iii) Con (i) e (ii) abbiamo esaurito le possibilità con Q abeliano. Poniamo ora $Q=\langle x\,,\,y\,|\,x^{\mathbf{q}^{\mathbf{n}}}=y^{\mathbf{q}}=1\,,\,\,x^y=x^{1+\mathbf{q}^{\mathbf{n}}-1},\,\,\mathbf{q}^{\mathbf{n}}\geq 8\rangle$. In Q l'unico sottogruppo massimo non ciclico è $\langle x^{\mathbf{q}}\,,\,y\rangle$; osservato questo, si conclude esattamente come nel caso (ii).
- (iv) Sia Q un gruppo dei quaternioni d'ordine 8. In questo caso x induce su P un automorfismo f.p.f. d'ordine 2, per cui tale automorfismo è l'inversione. P, essendo normale minimo, ha dunque ordine p.

Tutti gli altri gruppi non abeliani dotati di un sottogruppo massimo ciclico, hanno più di un sottogruppo massimo non ciclico, e quindi — come osservato — sono da escludersi.

Una verifica non difficile prova il viceversa.

- 5. Esaminiamo infine il caso $|\omega(G)|=3$. Anche qui distinguiamo due sottocasi :
 - a) G ha un complemento di Sylow normale e nilpotente.
 - b) G è privo di complementi di Sylow normali e nilpotenti.

(Ricordiamo che, per il lemma 2.2., G ha almeno un complemento di Sylow normale).

a) Teorema 5.1. Sia G=PQR, con $P\in Syl_p(G)$, $Q\in Syl_q(G)$ ed $R\in Syl_r(G)$, e sia $PQ=P\times Q\lhd G$. Allora G è minimale non in sour se e solo se $G=P\times QR$, con |P|=p e QR gruppo di Miller-Moreno.

DIM. PR e QR appartengono ad \mathcal{SIVQ} e se fossero entrambi non nilpotenti, G stesso dovrebbe stare in \mathcal{SIVQ} (teorema B). Allora, per esempio, $PR = P \times R$ e quindi $G = P \times QR$. R è ciclico e i suoi generatori inducono su Q automorfismi d'ordine r, f.p.f. Siano Q_1 e P_1 sottogruppi normali minimi di G, con $Q_1 \leq Q$ e $P_1 \leq P$.

Se $P_1Q_1R \neq G$, allora, posto $R = \langle x \rangle$, x agirebbe f.p.f. su P_1Q_1 , mentre $PR = P \times R$. Quindi QR è un gruppo di Miller-Moreno. Infine $P \leq Z(G)$ implica |P| = p, essendo P normale minimo.

Il viceversa è chiaro.

b) Teorema 5.2. Sia $|\omega(G)|=3$ e G sia privo di complementi di Sylow normali e nilpotenti. Allora G è minimale non in sonva se e solo se $G=P\langle z\rangle$, $P\in Syl_p(G)$, con P normale minimo, |z|=qr con $(qr\,,\,p)=1$ e $\mathfrak{C}_G(P)=P$.

DIM. G ha una torre di Sylow (lemma 2.2): $\{I\} \lhd P \lhd PQ \lhd PQR = G$, con P, Q, R sistema completo alla Hall di sottogruppi di Sylow di G. Ora PQ è non nilpotente, quindi $Q = \langle x \rangle$, e x opera f.p.f. d'ordine q su P. Sia $R_1 < \cdot R$. PQR_1 è un \mathcal{DVVA} -gruppo non nilpotente, e quindi $R_1 \lhd PQR_1$, da cui $R_1 \leq \mathcal{C}_G(Q)$. Ma x opera f.p.f. su R_1 e quindi $R_1 = \{I\}$ ed |R| = r.

Sia P_1 un sottogruppo normale minimo di G, contenuto in P. $P_1QR \in \mathcal{SNVR}$ implicherebbe Q anormale in P_1QR e $Q \triangleleft QR$, una contraddizione. Allora $P_1 = P$, P è abeliano elementare ed è trasformato irriducibilmente da QR. Poniamo $R = \langle y \rangle$; se y opera f.p.f. su Q, deve centralizzare P, altrimenti PQ ammetterebbe un f.p.f.-automorfismo d'ordine primo, e sarebbe nilpotente. Si avrebbe allora $P \times R = \mathcal{C}_G(P) \triangleleft G$, un assurdo. Allora $QR = Q \times R$ e quindi $PR \neq P \times R$. Si consideri $P\Phi(Q)R$; R agisce f.p.f. su $\Phi(Q)$ per cui $\Phi(Q) = \{1\}$ e |Q| = q. Da qui la conclusione è facile.

Non è poi difficile verificare la sufficienza.

Osservazione 1. Costruzioni esplicite dei gruppi quali descritti nei teoremi 3.1, 4.3(i) e 5.2 si possono realizzare analogamente a quanto fatto in [12], facendo ricorso alla teoria dei corpi di Galois.

Osservazione 2. Volendo, una caratterizzazione dei gruppi minimali non in \mathfrak{IvA} la si può ottenere intersecando la classe \mathfrak{S} con quella dei gruppi minimali non in \mathfrak{F} , determinata in [12].

6. – Le classi \mathfrak{NVJA} ed \mathfrak{INVJA} . Una definizione simmetrica della classe gruppale \mathfrak{INVA} è rappresentata da quella della classe $\mathfrak{NVJA} = \{$ gruppi in cui ogni sottogruppo è o normale o subanormale $\}$. Le classi \mathfrak{INVA} e \mathfrak{IVJA} sono a loro volta sottoclassi della classe $\mathfrak{INVJA} = \{$ gruppi in cui ogni sottogruppo è o subnormale o subnormale $\}$ (*). Vogliamo in quest'ultimo numero dedicare alcune considerazioni a queste classi gruppali.

TEOREMA 6.1. Sia § la classe dei gruppi risolubili.

Allora risulta: (i) $S \cap (\mathcal{SNVSA}) = \mathcal{SNVA}$.

- (ii) $S \cap (\mathfrak{N} \vee \mathcal{S} \mathcal{A}) = \mathfrak{N} \vee \mathcal{A}$.
- DIM. (i) Se G è nilpotente, la conclusione è triviale. Sia G non nilpotente. Allora G possiede un sottogruppo di Sylow subanormale e quindi possiede un p-sottogruppo H minimale subanormale. Per un teorema di P. Hall [6] (**), H è normalizzante di un sistema di Sylow di G, e poichè i normalizzanti di sistema formano una classe completa di coniugio, ogni q-sottogruppo di Sylow di G, con $\mathbf{q} \neq \mathbf{p}$, è subnormale in G. Allora $H = \mathfrak{N}_G(P)$ se P è il p-Sylow-sottogruppo del sistema normalizzato da H. Ne segue che H è anormale in G, e tale è quindi ogni sottogruppo che lo contiene. Questo vale per ogni minimale subanormale, da cui (i).
- (ii) $S \cap (\mathfrak{NVJA}) \subseteq S \cap (\mathfrak{JNVJA}) \subseteq \mathfrak{JNVA}$, e poichè un sottogruppo proprio subanormale non è mai subnormale, si ha $S \cap (\mathfrak{NVJA}) = \mathfrak{NVA}$.

Per gli eventuali gruppi non risolubili di ${\it SNVSC}$ vale la seguente proposizione :

Proposizione 6.2. Se G è un gruppo d'ordine minimo non risolubile di ${\it SMVSA}$, allora G è semplice non abeliano.

DIM. Sia $H \nsubseteq G$ e sia $K \leq H$. Se K fosse subanormale in G, esisterebbe una catena $K = K_0 < K_1 < ... < K_n = G$ con K_i anormale.

^(*) Si tratta evidentemente di classi tutte chiuse rispetto ai quozienti.

^(**) Vedasi anche Satz VI.11.21 in [7].

male in $K_{i_{+1}}$, i=0, 1, ..., n-1. Sia i_0 l'indice per cui $K_{i_0} \leq H$ e $K_{i_0+1} \leqslant H$, e sia $x \in K_{i_0+1} \backslash H$. Dev'essere $x \in \langle H_{i_0}, K_{i_0}^x \rangle \leq \langle H, H^x \rangle = H$, assurdo. Allora necessariamente ogni sottogruppo di H è subnormale in G. H è quindi nilpotente, per cui anche risolubile. $G/H \in \mathcal{SNVSC}$ perchè immagine omomorfa di un \mathcal{SNVSC} -gruppo, e se fosse |G/H| < |G|, G/H sarebbe risolubile, e lo sarebbe anche G. Allora |G/H| = |G|, cioè $H = \{1\}$.

COROLLARIO 6.3. Se G è un gruppo d'ordine minimo non risolubile di $\mathfrak{N}_{VA}\mathfrak{A}$, allora G è semplice non abeliano.

Per il momento non siamo riusciti a decidere se esistono gruppi semplici non abeliani i cui sottogruppi non identici siano tutti subanormali. L'esistenza o meno di tali gruppi equivale all'essere $\mathcal{N}VSC$ ed SCVVSC sovraclassi proprie o meno di SCVC e di SCVVSC rispettivamente. Se SCVSC fosse una estensione propria di SCVC, la condizione di appartenenza di un gruppo ad SCVSC non si erediterebbe ai sottogruppi:

PROPOSIZIONE 6.4. Sia $G \in \mathcal{H} \vee \mathcal{S} \cup \mathcal{S}$, ma $G \notin \mathcal{H} \vee \mathcal{S}$. Allora G possible un sottogruppo H tale che $H \notin \mathcal{H} \vee \mathcal{S} \cup \mathcal{S}$.

DIM. Sia G un controesempio d'ordine minimo. Poichè $G \in \mathfrak{NVJC} \setminus \mathfrak{NVC}$, G è non risolubile (per 6.1(ii)). Se esistesse $N \neq \{1\}$, con $N \nsubseteq G$, per un argomento già usato nella dimostrazione del teorema 6.2, N sarebbe nilpotente, e quindi G/N non risolubile. Allora anche $G/N \in \mathfrak{NVJC} \setminus \mathfrak{NVC}$. Ora da |G/N| < |G| segue che esiste $K/N \leq G/N$, con $K/N \notin \mathfrak{NVJC}$, assurdo perchè K/N è immagine omomorfa di $K \in \mathfrak{NVJC}$. Pertanto G è semplice non abeliano. Ogni sottogruppo K di K0, K1, sta in K2, perchè altrimenti K2 conterrebbe un sottogruppo K3, assurdo perchè K3. Gli K4, K5, assurdo perchè K5. Gli K5, assurdo perchè K6. Gli K6, sta in K7, assurdo perchè K8 e K9. Gli K9, assurdo perchè K9 e K9 e K9. Gli K9, assurdo perchè K9 e K9. Gli K9, assurdo perchè K9 e K9 e K9. Gli K9, assurdo perchè K9 e K9. Gli K9 e K

COROLLARIO 6.5. Un gruppo G è minimale non in \mathfrak{N} VL se e solo se G è minimale non in \mathfrak{N} VL.

DIM. Sia M un sottogruppo massimo di G. Allora M ed ogni suo sottogruppo stanno in \mathfrak{IVAC} . Per 6.4 M è allora risolubile e quindi $M \in \mathfrak{IVA}$ (teorema 6.1(ii)).

Viceversa, un gruppo minimale non in \mathcal{N} v \mathcal{A} è risolubile e quindi non appartiene ad \mathcal{N} v \mathcal{A} .

In analogia a quanto visto in 6.4, se è $\mathcal{SNVSA} \neq \mathcal{SNVA}$, anche \mathcal{SNVAC} è non ereditaria :

Proposizione 6.6. Sia $G \in \mathcal{ANVA}$, e $G \notin \mathcal{ANVA}$. Allora G possiede un sottogruppo H con $H \notin \mathcal{ANVA}$.

DIM. Con lo stesso argomento usato in 6.4 si arriva a dimostrare che un controesempio d'ordine minimo è semplice, e che i suoi sottogruppi propri stanno in \mathfrak{SNVC} . Allora, in virtù del teorema 1.1., $G \cong \mathrm{PSL}(2,2^p)$, con 2^p-1 primo di Mersenne. Sia $P \in \mathrm{Syl}_2(G)$. Se P è anormale in un sottogruppo $X \leq G$, allora per un ben noto teorema di Burnside, essendo P abeliano, P ha complemento normale in X e quindi $X \neq G$; allora, per il teorema B, P deve essere ciclico, una contraddizione.

Terminiamo dimostrando che i gruppi semplici minimali non stanno in 197411.

LEMMA 6.7. Sia G un gruppo semplice. Se i 2-sottogruppi di Sylow di G hanno a due a due intersezione identica, $G \notin \mathcal{SNVSA}$.

DIM. Sia $P \in \operatorname{Syl}_2(G)$ e P sia anormale in $X \leq G$. Allora X è un gruppo di Frobenius, con P complemento del nucleo. Quindi P è o ciclico o generalizzato dei quaternioni, in contrasto con la semplicità di G.

TEOREMA 6.8. 19745A non contiene alcun gruppo semplice minimale.

DIM. In base al lemma 6.7 si escludono i gruppi $\operatorname{Sz}(2^q)$, q primo dispari. Supponiamo allora $G=\operatorname{PSL}(2\,,p^t),\,p^t>3$. Scelto $P\in\operatorname{Syl}_p(G),$ è noto che P è abeliano elementare ([7] Hauptsatz II.8.27). Sia P anormale in $X\leq G$. Per Burnside P ha complemento normale in X, e quindi $X\neq G$, e, sempre per [7] II.8.27, l'unica possibilità è che sia $X\cong A_4$. È quindi p=3 e |P|=3; allora, per questioni di ordine (su G), risulta $p^t=3$, assurdo. Resta unicamente il caso $G\cong\operatorname{PSL}(3\,,3)$. E $|G|=2^43^313$. Sia $P\in\operatorname{Syl}_{13}(G)$, e supponiamo $G\in\operatorname{STVSC}$. P è anormale in $X\leq G$; sempre per Burnside P ha complemento normale N in X, e quindi $X\neq G$.

Poichè P opera f.p.f. su N, N è nilpotente [13].

13 non divide 2^n-1 per $n \le 4$, per cui N sarà un 3-gruppo, e dovendo essere |3||N|-1, dovrà essere $|N|=3^3$ ed N normale minimo in X. Ma N non è abeliano ([7] Satz III.16.3).

BIBLIOGRAFIA

- [1] YA. G. Berkovič, Finite groups with maximal subgroups having large kernels, Sibirskii Mat. Zh., Vol. 9, No 2 (1968) 243-248.
- [2] G. EBERT e S. BAUMAN, Abnormal chains in finite soluble groups, Jour. Alg. 36 (1975) 287-293.
- [3] A. FATTAHI, Groups with only normal and abnormal subgroups, Jour. Alg. 28 (1974) 15-19.
- [4] W. GASCHÜTZ, Gruppen in denen das Normalteilersein transitiv ist, J. für Math., Bd 198, Heft 2 (1947) 87-92.
- [5] D. GORENSTEIN, Finite Groups, Harper & Row (1968).
- [6] P. HALL, On the system normalizers of a soluble group, Proc. London Math. Soc. 43 (1937) 507-528.
- [7] B. HUPPERT, Endliche Gruppen I, Springer Verlag (1967).
- [8] K. IWASAWA, Über die Struktur der endlichen Gruppen, deren echte Untergruppen sämtlich nilpotent sind, Proc. Phys. Math. Soc. Japan (3) 23 (1941) 1-4.
- [9] G. A. MILLER e H. MORENO, Nonabelian groups in which every subgroup is abelian, Trans. Am. Math. Soc. 4 (1903) 398-404.
- [10] T. A. Peng, Finite groups with pronormal subgroups, Proc. Am. Math. Soc. 20 (1969) 232-234.
- [11] L. Rédei, Die endlichen einstufig nichtnilpotenten Gruppen, Publ. Math. Debrecen 4 (1955-56) 303-324.
- [12] D. ROBINSON, Groups which are minimal with respect to normality being intransitive, Pacif. J. Math. 31, No 3 (1969) 777-785.
- [13] J. THOMPSON, Finite groups with fixed point free automorphisms of prime order, Proc. Nat. Acad. Sci. US 45 (1959) 578-581.

Manoscritto pervenuto in redazione il 29 giugno 1977.