RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

PIERANTONIO LEGOVINI

Gruppi minimali non in $s\mathfrak{N} \vee \mathfrak{A}$

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 58 (1977), p. 117-128

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1977__58__117_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 58 (1977)

Gruppi minimali non in $s\mathcal{N}v\mathcal{A}$.

PIERANTONIO LEGOVINI (*)

RIASSUNTO: Si caratterizzano i gruppi minimali non in $s\mathcal{N}v\mathcal{A}$, questa ultima essendo la classe dei gruppi finiti i cui sottogruppi sono o subnormali o anormali.

0. – INTRODUZIONE. Premettiamo che in questa nota per gruppo si intenderà sempre gruppo *finito*. Tutte le notazioni usate sono standard. Per le definizioni che non diamo esplicitamente, rimandiamo a [7].

Consideriamo le seguenti classi gruppali:

(i) $\mathcal{N}v\mathcal{A}$ = Gruppi i cui sottogruppi sono o normali o anormali (**);

(ii) $s\mathcal{N}v\mathcal{A}$ = Gruppi i cui sottogruppi sono o subnormali o anormali;

(iii) $\mathcal{P}$ = Gruppi i cui sottogruppi sono pronormali (**).

$s\mathcal{N}v\mathcal{A}$ e $\mathcal{P}$ contengono entrambe $\mathcal{N}v\mathcal{A}$ ed anzi dalle definizioni segue immediatamente $\mathcal{N}v\mathcal{A} = s\mathcal{N}v\mathcal{A} \cap \mathcal{P}$.

(*) Indirizzo dell'A.: Seminario Matematico, Università, 35100 Padova.

Lavoro eseguito nell'ambito dei Gruppi di Ricerca Matematica del C.N.R.

(**) Ricordiamo, per convenienza del lettore, che un sottogruppo H di un gruppo G si dice anormale in G se $H \vee H^g \ni g$ per ogni $g \in G$, mentre H si dice pronormale in G se per ogni $g \in G$ esiste un $x \in H \vee H^g$ tale che $H^x = H^g$.

I gruppi in $\mathcal{N}v\mathcal{A}$ sono stati caratterizzati da Fattahi [3], mediante il seguente teorema:

Teorema A (Fattahi). (i) Un gruppo nilpotente è in $\mathcal{N}v\mathcal{A}$ se e solo se è dedekindiano.

ii) Un gruppo non nilpotente è in $\mathcal{N}v\mathcal{A}$ se e solo se è un prodotto semidiretto $K\langle x\rangle$, con K abeliano, $\langle x\rangle \in \mathrm{Syl}_p(G)$ e tale che x induce per coniugio su K un automorfismo potenza di ordine p, privo di coincidenze.

I sottogruppi normali e quelli anormali sono i più facili esempi di sottogruppi pronormali e quindi $\mathcal{N}v\mathcal{A}$ è inclusa in modo naturale in $\mathcal{P}$. Per un risultato di Peng [10], $\mathcal{P}$ coincide con la classe degli ST-gruppi, cioè dei gruppi risolubili in cui la normalità è una relazione transitiva. Questi gruppi sono stati caratterizzati [4], come pure quelli minimali non in $\mathcal{P}$ [12].

Un'altra estensione naturale della classe $\mathcal{N}v\mathcal{A}$ è la classe $s\mathcal{N}v\mathcal{A}$: si tratta di permettere ai sottogruppi non anormali di essere subnormali anzichè necessariamente normali. Un teorema di struttura per i gruppi di $s\mathcal{N}v\mathcal{A}$ si trova in [2]:

Teorema B (Ebert-Bauman). (i) Ogni gruppo nilpotente è in $s\mathcal{N}v\mathcal{A}$; (ii) Un gruppo non nilpotente è in $s\mathcal{N}v\mathcal{A}$ se e solo se è un prodotto semidiretto $K\langle x\rangle$, con $\langle x\rangle \in \mathrm{Syl}_p(G)$ e tale che x induce per coniugio su K un automorfismo d'ordine p, privo di coincidenze.

Scopo del presente lavoro è di determinare la classe $\mathfrak{S}$ dei gruppi minimali non in $s\mathcal{N}v\mathcal{A}$: un gruppo $G \in \mathfrak{S}$ se e solo se, presi H e K, sottogruppi propri di G, con $H \leq K$, è H subnormale in K o H anormale in K e $G \notin s\mathcal{N}v\mathcal{A}$. La descrizione completa dei gruppi di $\mathfrak{S}$ è il contenuto dei teoremi 1.1, 3.1, 4.1, 4.2, 4.3, 5.1, e 5.2.

La caratterizzazione degli $s\mathcal{N}v\mathcal{A}$-gruppi data nel teorema B sarà usata costantemente nel nostro lavoro, anche senza farne riferimento esplicito.

1. – Elenchiamo innanzitutto i gruppi non risolubili di $\mathfrak{S}$. Si tratta di una famiglia di gruppi semplici.

Chiamato con Berkovič un gruppo di tipo D_0 se è risolubile e se ogni suo sottogruppo normale è nilpotente, è facile verificare che ogni $s\mathcal{N}v\mathcal{A}$-gruppo è di tipo D_0. Non vale tuttavia il viceversa, come prova il seguente esempio. Sia G un gruppo ottenuto ampliando quello dei quaternioni Q, d'ordine 8, mediante un automorfismo x d'ordine 3; si tratta di un gruppo di tipo D_0, ma $G \notin \mathcal{SN}v\mathcal{A}$, in quanto x fissa il centro di Q.

Si deve a Berkovič [1] il seguente:

TEOREMA C. Sia G un gruppo non risolubile e minimale non di tipo D_0. Allora vale una delle seguenti affermazioni:

(i) $G \cong \mathrm{PSL}(2,2^p)$, con 2^p-1 primo di Mersenne;

(ii) $G \cong \mathrm{SL}(2,5)$.

Non è ora difficile provare che:

TEOREMA *1.1. Sia G non risolubile. Allora G è minimale non in* $\mathcal{SN}v\mathcal{A}$ *se e solo se* $G \simeq \mathrm{PSL}(2,2^p)$ *e* 2^p-1 *è un primo di Mersenne.*

DIM. SL(2,5) contiene un sottogruppo isomorfo a quello descritto nell'esempio, e quindi va escluso. Consultando poi un elenco dei sottogruppi propri di $\mathrm{PSL}(2,2^p)$ (per esempio in [7]), con 2^p-1 primo, si vede che tali sottogruppi stanno tutti in $\mathcal{SN}v\mathcal{A}$.

2. – Passiamo ad occuparci del caso risolubile. Premettiamo alcuni lemmi.

LEMMA *2.1. Sia G risolubile e minimale non in* $\mathcal{SN}v\mathcal{A}$. *Allora* $2 \leq |\omega(G)| \leq 3$, *ove* $\omega(G)$ *è l'insieme dei divisori primi di* $|G|$.

DIM. G è risolubile ed è perciò esprimibile come prodotto di Sylow-sottogruppi a due a due permutabili: $G = P_1P_2 \dots P_n$, $P_i \in \mathrm{Syl}_{p_i}(G)$ con $p_i \neq p_j$ se $i \neq j$.

Innanzitutto $n \geq 2$ perchè G è non nilpotente, e per lo stesso motivo non può essere $P_iP_j = P_i \times P_j$ per ogni coppia (i, j) con $i \neq j$. Pertanto se $n > 2$, G contiene un $\mathcal{SN}v\mathcal{A}$-gruppo del tipo P_iP_j non nilpotente, e quindi sarà — per fissare le idee — $P_i = \langle x_i \rangle$, e P_i anormale in P_iP_j (teorema B). Supposto $n > 3$, per ogni $k \neq i, j$ si ha $P_iP_jP_k \in \mathcal{SN}v\mathcal{A}$ e non nilpotente; per il teorema B sarà $P_jP_k = P_j \times P_k$ e x_i opererà su P_k come automorfismo f.p.f. di ordine primo. Ma allora, ancora per il teorema B, $G \in \mathcal{SN}v\mathcal{A}$, un assurdo.

LEMMA *2.2. Sia G risolubile e minimale non in $\mathcal{SN}\vee\mathcal{C}$. Se G non ha una torre di Sylow, allora* $|\omega(G)| = 2$.

DIM. Per assurdo sia $|\omega(\mathrm{G})| = 3$. G ha un sottogruppo normale massimo N ; sia $[\mathrm{G}:\mathrm{N}] = \mathrm{p}$. N non è nilpotente perchè G non possiede una torre di Sylow, e similmente N non è di Hall. N poi soddisfa la (ii) del teorema B . Se i Sylow-sottogruppi anormali fossero relativi al primo p , allora G avrebbe un p-complemento normale e nilpotente. Allora detti q ed r i divisori primi di $|G|$ diversi da p , si avrà per esempio $Q \in \mathrm{Syl_q}(G) \cap \mathrm{Syl_q}(N)$ e $Q \lhd G$, mentre sarà $R \in \mathrm{Syl_r}(N) \cap \mathrm{Syl_r}(G)$ ciclico, e lo possiamo scegliere in modo da avere $RP = PR$. Ora $QP \lhd G$: infatti, posto $R = \langle x \rangle$, x normalizza Q ed x normalizza anche P perchè $\langle x \rangle P \in \mathcal{SN}\vee\mathcal{C}$ e x opera f.p.f. su $P \wedge N \neq \{1\}$. Dunque G ha una torre di Sylow, contraddizione.

OSSERVAZIONE. Il gruppo simmetrico S_4 sta in $\mathfrak{S}$, è privo di torri di Sylow ed è $|\omega(\mathrm{S}_4)| = 2$.

Nei tre numeri successivi esaminiamo separatamente i seguenti casi :

3. Il gruppo G è privo di torri di Sylow.
4. Il gruppo G ha torri di Sylow ed è $|\omega(G)| = 2$.
5. Il gruppo G ha $|\omega(G)| = 3$.

3. – TEOREMA *3.1. Sia G risolubile e privo di torri di Sylow. Allora G è minimale non in $\mathcal{SN}\vee\mathcal{C}$ se e solo se è un prodotto semidiretto $K(PQ)$, ove K è un sottogruppo normale minimo d'ordine p^n, $\mathcal{C}(K) = K$, $|PQ| = pq$ con $p < q$, PQ è non abeliano e, posto $Q = \langle x \rangle$, x opera f.p.f. su K.*

DIM. In virtù del lemma 2.2., è $\omega(G) = \{\mathrm{p}, \mathrm{q}\}$, $\mathrm{p} \neq \mathrm{q}$. G ha un sottogruppo normale di indice primo, N, e sia $[G:N] = \mathrm{p}$. N è un $\mathcal{SN}\vee\mathcal{C}$-gruppo non nilpotente ed ha per il teorema B un sottogruppo di Sylow normale. Per le ipotesi fatte è chiaro che tale sottogruppo è $0_\mathrm{p}(G)$.

Se poi $Q \in \mathrm{Syl_q}(N)$, risulta $Q \in \mathrm{Syl_q}(G)$, Q ciclico e se $Q = \langle x \rangle$, x opera f.p.f. su $K = 0_\mathrm{p}(G)$ e il suo ordine — come automorfismo — è q (teorema B). Ora $\langle x^\mathrm{q} \rangle = 0_\mathrm{q}(N) \lhd G$. Sia $\tilde{P} \in \mathrm{Syl_p}(G)$;

$\langle x^q\rangle \tilde{P}\in\mathcal{SN}\vee\mathcal{A}$. Se fosse $\langle x^q\rangle \tilde{P}\neq\langle x^q\rangle\times\tilde{P}$, $\tilde{P}$ sarebbe ciclico, e G sarebbe un gruppo a sottogruppi di Sylow ciclici, quindi dotato di una torre di Sylow. Si consideri ora $\mathcal{N}_G(Q)$. Se fosse $\mathcal{N}_G(Q)=Q$, Q avrebbe complemento normale (Burnside); quindi dev'essere $\mathcal{N}_G(Q)\gneqq Q$. Si consideri un $P\in \mathrm{Syl}_p(\mathcal{N}_G(Q))$. Poichè x opera f.p.f. su K, dovrà essere $P\wedge K=\{1\}$ e quindi a meno di coniugio $\tilde{P}=PK$ e $|P|=\mathrm{p}$. Sia P^* un sottogruppo normale minimo di G, contenuto in K, e si consideri QP^*P; questo gruppo è non nilpotente perchè x agisce f.p.f. su P^*. Allora se $QP^*P\lneqq G$, agirebbe f.p.f. anche su P per cui $P\leq\mathcal{C}(Q)$, assurdo. Quindi K è normale minimo. Infine $\mathcal{N}(Q)=QP$ è non nilpotente, altrimenti $Q\leq Z(\mathcal{N}(Q))$, da cui $\tilde{P}\lhd G$, assurdo. Allora posto $P=\langle y\rangle$, y agisce f.p.f. su Q, per cui $\mathrm{p}<\mathrm{q}$. Inoltre da $\langle x^q\rangle P=\langle x^q\rangle\times P$ segue che $\langle x^q\rangle=\{1\}$ e quindi che $|PQ|=\mathrm{pq}$.

Una verifica non difficile prova poi che ogni gruppo quale descritto nell'enunciato del teorema è minimale non in $\mathcal{SN}\vee\mathcal{A}$.

4. – Passiamo al caso $|\omega(G)|=2$, con G dotato di torri di Sylow. Discuteremo questo caso in tre sottocasi distinti; a tal fine sia $G=PQ$, $P\in\mathrm{Syl}_p(G)$, $Q\in\mathrm{Syl}_q(G)$ e $P\lhd G$. I casi sono:

a) G è minimale non nilpotente.

b) G contiene un sottogruppo proprio non nilpotente, contenente Q.

c) G contiene un sottogruppo proprio non nilpotente, contenente P.

a) È chiaro che in questo caso G è minimale non in se e solo se $G\notin\mathcal{SN}\vee\mathcal{A}$. Dobbiamo perciò escludere dai gruppi minimali non nilpotenti quelli in $\mathcal{SN}\vee\mathcal{A}$.

Ora i gruppi minimali non nilpotenti si lasciano descrivere nel seguente modo (si veda [8] o [11]: Sia G minimale non nilpotente. Allora $G=PQ$ con $P\lhd G$, Q ciclico, $\Phi(P)\Phi(Q)=Z(G)$, $\exp P=\mathrm{p}$ se $\mathrm{p}>2$, $\exp P\leq 4$ se $\mathrm{p}=2$, e Q opera irriducibilmente su $P/\Phi(P)$.

Ora se in più $G\in\mathcal{SN}\vee\mathcal{A}$, dev'essere, per il teorema B, $\mathcal{C}_p(Q)=\{1\}$, e quindi $\Phi(P)=\{1\}$. In tal caso G è un gruppo minimale non abeliano (gruppo di Miller-Moreno [9]). In conclusione abbiamo provato il:

TEOREMA *4.1. Sia G minimale non nilpotente. Allora G è minimale non in* $\mathcal{SN}\vee\mathcal{A}$ *se e solo se non è un gruppo di Miller-Moreno.*

b) Teorema 4.2. *Sia* $G = PQ$, $P \in Syl_{\mathrm{p}}(G)$, $Q \in Syl_{\mathrm{q}}(G)$, $P \lhd G$ *e* G *contenga un sottogruppo proprio non nilpotente, contenente* Q. *Allora* G *è minimale non in* $\mathcal{SN}\vee\mathcal{A}$ *se e solo se* $G = P_2 \times P_1Q$, *ove* $P_2 \times P_1 = P$, $|P_2| = p$ *e* P_1Q *è un gruppo di Miller-Moreno.*

Dim. Sia P_1Q , con $P_1 \lneqq P$, il sottogruppo proprio non nilpotente esistente per ipotesi. Allora, in virtù del teorema B , è $P_1\Phi(Q) = P_1 \times \Phi(Q)$, per cui anche $P\Phi(Q)$ è nilpotente (teorema B). Ne segue che, posto $Q = \langle x \rangle$, x induce per coniugio su P un automorfismo d'ordine q . Allora $\mathcal{C}_P(x) \neq \{1\}$, altrimenti $G \in \mathcal{SN}\vee\mathcal{A}$. Affermiamo che P è abeliano. Sia per assurdo $Z(P) \neq P$. Supponiamo innanzitutto $Z(P)Q$ nilpotente. Allora $Z(P) \wedge P_1 = \{1\}$, da cui $Z(P)P_1 = Z(P) \times P_1$, e $Z(P)P_1Q$ non nilpotente implica $Z(P) \times P_1 = P$, un assurdo. Resta il caso $Z(P)Q$ non nilpotente. Allora x opera f.p.f. su $Z(P)$ per cui si ha $\mathcal{C}_P(x) \wedge Z(P) = \{1\}$. Come sopra si giunge a $\mathcal{C}_P(x) \times Z(P) = P$, ancora un assurdo. In conclusione è $Z(P) = P$ e P è abeliano. È $P_1 \wedge \mathcal{C}_P(x) = \{1\}$, e quindi $P_1\mathcal{C}_P(x) = P_1 \times \mathcal{C}_P(x)$. Sia P_2 un sottogruppo d'ordine p di $\mathcal{C}_P(x)$.

$P_1P_2Q \in \mathcal{SN}\vee\mathcal{A}$ e quindi $P_1P_2Q = G$ e $P_2 = \mathcal{C}_P(x)$. Per concludere ci basta dimostrare che P_1 è normale minimo. Sia P_1^* normale minimo in G , con $P_1^* \leq P_1$. $P_1^*P_2Q \notin \mathcal{SN}\vee\mathcal{A}$ e quindi $P_1^*P_2Q = G$. Ne segue che $P_1^* = P_1$.

Anche qui è triviale verificare che i gruppi descritti nell'enunciato sono minimali non in $\mathcal{SN}\vee\mathcal{A}$.

c) Teorema 4.3. *Sia* $G = PQ$, $P \in Syl_{\mathrm{p}}(G)$, $Q \in Syl_{\mathrm{q}}(G)$, $P \lhd G$ *e* G *contenga un sottogruppo proprio non nilpotente, contenente* P . *Allora* G *è minimale non in* $\mathcal{SN}\vee\mathcal{A}$ *se e solo se è uno dei seguenti gruppi* :

(i) $Q = \langle y \rangle$, *d'ordine* q^n, $n \geq 2$, P *è normale minimo e* y *opera come automorfismo d'ordine* q^2, *privo di orbite di cardinalità* q .

(ii) $Q = \langle x , y \,|\, x^{q^n} = y^q = 1 , \ [x , y] = 1 , \ n \geq 1 \rangle$, $\langle x^q , y \rangle \lhd G$ *e* $G/\langle x^q , y \rangle$ *è un gruppo di Miller-Moreno.*

(iii) $Q = \langle x , y \,|\, x^{q^n} = y^q = 1 , \ x^y = x^{1+q^{n-1}} , \ q^n \geq 8 \rangle$, $\langle x^q , y \rangle \lhd G$ *e* $G/\langle x^q , y \rangle$ *è un gruppo di Miller-Moreno.*

(iv) Q *è un gruppo dei quaternioni d'ordine* 8 *e* $|P| = p$.

Dim. Sia PQ_1 , $\{1\} \neq Q_1 \lneqq Q$ il sottogruppo non nilpotente di G dato per ipotesi. Usando il teorema B è facile dedurre che è $Q_1 < \cdot\, Q$

e, posto $Q_1 = \langle x \rangle$, che x opera f.p.f. su P. Così Q ha un sottogruppo massimo ciclico. Se poi Q avesse due sottogruppi massimi non ciclici, entrambi centralizzerebbero P, ed allora Q stesso centralizzerebbe P. Quindi Q ha al più un sottogruppo massimo non ciclico. P è normale minimo in G; infatti se $\{1\} \neq P^* \lneqq P$ e $P^* \lhd G$, allora P^*Q è non nilpotente e quindi Q è ciclico e $P^*\Phi(Q) = P^* \times \Phi(Q)$ (teorema B). Ma questo è un assurdo in quanto Q ha un sottogruppo massimo ciclico i cui generatori operano f.p.f. su P.

(i) Supponiamo — come primo caso — che Q sia ciclico. Posto $Q = \langle y \rangle$, sarà $|Q| \geq \mathrm{q}^2$ e $y^{\mathrm{q}^2} \in \mathcal{C}_Q(P)$. Se poi y ammettesse un'orbita di lunghezza q, y^{q} centralizzerebbe tale orbita; ma $y^{\mathrm{q}} = x^{\mathrm{r}}$ con $(\mathrm{r}, \mathrm{q}) = 1$, per cui esso opera f.p.f. su P.

(ii) Sia ora $Q = \langle x, y \,|\, x^{\mathrm{q}^{\mathrm{n}}} = y^{\mathrm{q}} = 1,\ [x, y] = 1,\ n > 0 \rangle$. Se $n > 1$, $\langle x^{\mathrm{q}}, y \rangle$ è non ciclico, e quindi $P\langle x^{\mathrm{q}}, y \rangle$ è nilpotente; se $\mathrm{n} = 1$, Q è abeliano elementare d'ordine q^2. Poichè Q opera irriducibilmente su P, per un noto teorema è $Q/\mathcal{C}_Q(P)$ ciclico, e quindi, scegliendo eventualmente nuovi generatori, si può supporre $\mathcal{C}_Q(P) = \langle x^{\mathrm{q}}, y \rangle = \langle y \rangle$. Il resto è banale.

(iii) Con (i) e (ii) abbiamo esaurito le possibilità con Q abeliano. Poniamo ora $Q = \langle x, y \,|\, x^{\mathrm{q}^{\mathrm{n}}} = y^{\mathrm{q}} = 1,\ x^y = x^{1+\mathrm{q}^{\mathrm{n}-1}},\ \mathrm{q}^{\mathrm{n}} \geq 8 \rangle$. In Q l'unico sottogruppo massimo non ciclico è $\langle x^{\mathrm{q}}, y \rangle$; osservato questo, si conclude esattamente come nel caso (ii).

(iv) Sia Q un gruppo dei quaternioni d'ordine 8. In questo caso x induce su P un automorfismo f.p.f. d'ordine 2, per cui tale automorfismo è l'inversione. P, essendo normale minimo, ha dunque ordine p.

Tutti gli altri gruppi non abeliani dotati di un sottogruppo massimo ciclico, hanno più di un sottogruppo massimo non ciclico, e quindi — come osservato — sono da escludersi.

Una verifica non difficile prova il viceversa.

5. – Esaminiamo infine il caso $|\omega(G)| = 3$. Anche qui distinguiamo due sottocasi:

a) G ha un complemento di Sylow normale e nilpotente.

b) G è privo di complementi di Sylow normali e nilpotenti.

(Ricordiamo che, per il lemma 2.2., G ha almeno un complemento di Sylow normale).

a) TEOREMA *5.1. Sia* $G = PQR$, *con* $P \in Syl_p(G)$, $Q \in Syl_q(G)$ *ed* $R \in Syl_r(G)$, *e sia* $PQ = P \times Q \lhd G$. *Allora* G *è minimale non in* $\mathcal{S}\mathfrak{N}\vee\mathfrak{C}$ *se e solo se* $G = P \times QR$, *con* $|P| = \mathrm{p}$ *e* QR *gruppo di Miller-Moreno.*

DIM. PR e QR appartengono ad $\mathcal{S}\mathfrak{N}\vee\mathfrak{C}$ e se fossero entrambi non nilpotenti, G stesso dovrebbe stare in $\mathcal{S}\mathfrak{N}\vee\mathfrak{C}$ (teorema B). Allora, per esempio, $PR = P \times R$ e quindi $G = P \times QR$. R è ciclico e i suoi generatori inducono su Q automorfismi d'ordine r, f.p.f. Siano Q_1 e P_1 sottogruppi normali minimi di G, con $Q_1 \leq Q$ e $P_1 \leq P$.

Se $P_1Q_1R \lneqq G$, allora, posto $R = \langle x \rangle$, x agirebbe f.p.f. su P_1Q_1, mentre $PR = P \times R$. Quindi QR è un gruppo di Miller-Moreno. Infine $P \leq Z(G)$ implica $|P| = \mathrm{p}$, essendo P normale minimo.

Il viceversa è chiaro.

b) TEOREMA *5.2. Sia* $|\omega(G| = 3$ *e* G *sia privo di complementi di Sylow normali e nilpotenti. Allora* G *è minimale non in* $\mathcal{S}\mathfrak{N}\vee\mathfrak{C}$ *se e solo se* $G = P\langle z \rangle$, $P \in Syl_p(G)$, *con* P *normale minimo,* $|z| = qr$ *con* $(qr, p) = 1$ *e* $\mathcal{C}_G(P) = P$.

DIM. G ha una torre di Sylow (lemma 2.2): $\{1\} \lhd P \lhd PQ \lhd PQR = G$, con P, Q, R sistema completo alla Hall di sottogruppi di Sylow di G. Ora PQ è non nilpotente, quindi $Q = \langle x \rangle$, e x opera f.p.f. d'ordine q su P. Sia $R_1 < \cdot R$. PQR_1 è un $\mathcal{S}\mathfrak{N}\vee\mathfrak{C}$-gruppo non nilpotente, e quindi $R_1 \lhd PQR_1$, da cui $R_1 \leq \mathcal{C}_G(Q)$. Ma x opera f.p.f. su R_1 e quindi $R_1 = \{1\}$ ed $|R| = \mathrm{r}$.

Sia P_1 un sottogruppo normale minimo di G, contenuto in P. $P_1QR \in \mathcal{S}\mathfrak{N}\vee\mathfrak{C}$ implicherebbe Q anormale in P_1QR e $Q \lhd QR$, una contraddizione. Allora $P_1 = P$, P è abeliano elementare ed è trasformato irriducibilmente da QR. Poniamo $R = \langle y \rangle$; se y opera f.p.f. su Q, deve centralizzare P, altrimenti PQ ammetterebbe un f.p.f.-automorfismo d'ordine primo, e sarebbe nilpotente. Si avrebbe allora $P \times R = \mathcal{C}_G(P) \lhd G$, un assurdo. Allora $QR = Q \times R$ e quindi $PR \neq P \times R$. Si consideri $P\Phi(Q)R$; R agisce f.p.f. su $\Phi(Q)$ per cui $\Phi(Q) = \{1\}$ e $|Q| = \mathrm{q}$. Da qui la conclusione è facile.

Non è poi difficile verificare la sufficienza.

OSSERVAZIONE 1. Costruzioni esplicite dei gruppi quali descritti nei teoremi 3.1, 4.3(i) e 5.2 si possono realizzare analogamente a quanto fatto in [12], facendo ricorso alla teoria dei corpi di Galois.

Osservazione 2. Volendo, una caratterizzazione dei gruppi minimali non in $\mathfrak{N}\vee\mathfrak{A}$ la si può ottenere intersecando la classe $\mathfrak{S}$ con quella dei gruppi minimali non in $\mathfrak{F}$, determinata in [12].

6. – Le classi $\mathfrak{N}\vee\mathfrak{s}\mathfrak{A}$ ed $\mathfrak{s}\mathfrak{N}\vee\mathfrak{s}\mathfrak{A}$. Una definizione simmetrica della classe gruppale $\mathfrak{s}\mathfrak{N}\vee\mathfrak{A}$ è rappresentata da quella della classe $\mathfrak{N}\vee\mathfrak{s}\mathfrak{A} = \{$gruppi in cui ogni sottogruppo è o normale o subanormale$\}$. Le classi $\mathfrak{s}\mathfrak{N}\vee\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{N}\vee\mathfrak{s}\mathfrak{A}$ sono a loro volta sottoclassi della classe $\mathfrak{s}\mathfrak{N}\vee\mathfrak{s}\mathfrak{A} = \{$gruppi in cui ogni sottogruppo è o subnormale o subnormale$\}$ (*). Vogliamo in quest'ultimo numero dedicare alcune considerazioni a queste classi gruppali.

Teorema 6.1. *Sia $\mathbb{S}$ la classe dei gruppi risolubili.*

Allora risulta : (i) $\mathbb{S} \cap (\mathfrak{s}\mathfrak{N}\vee\mathfrak{s}\mathfrak{A}) = \mathfrak{s}\mathfrak{N}\vee\mathfrak{A}$.

(ii) $\mathbb{S} \cap (\mathfrak{N}\vee\mathfrak{s}\mathfrak{A}) = \mathfrak{N}\vee\mathfrak{A}$.

Dim. (i) Se G è nilpotente, la conclusione è triviale. Sia G non nilpotente. Allora G possiede un sottogruppo di Sylow subanormale e quindi possiede un p-sottogruppo H minimale subanormale. Per un teorema di P. Hall [6] (**), H è normalizzante di un sistema di Sylow di G, e poichè i normalizzanti di sistema formano una classe completa di coniugio, ogni q-sottogruppo di Sylow di G, con $q \neq p$, è subnormale in G. Allora $H = \mathfrak{N}_G(P)$ se P è il p-Sylow-sottogruppo del sistema normalizzato da H. Ne segue che H è anormale in G, e tale è quindi ogni sottogruppo che lo contiene. Questo vale per ogni minimale subanormale, da cui (i).

(ii) $\mathbb{S} \cap (\mathfrak{N}\vee\mathfrak{s}\mathfrak{A}) \subseteq \mathbb{S} \cap (\mathfrak{s}\mathfrak{N}\vee\mathfrak{s}\mathfrak{A}) \subseteq \mathfrak{s}\mathfrak{N}\vee\mathfrak{A}$, e poichè un sottogruppo proprio subanormale non è mai subnormale, si ha $\mathbb{S} \cap (\mathfrak{N}\vee\mathfrak{s}\mathfrak{A}) = \mathfrak{N}\vee\mathfrak{A}$.

Per gli eventuali gruppi non risolubili di $\mathfrak{s}\mathfrak{N}\vee\mathfrak{s}\mathfrak{A}$ vale la seguente proposizione :

Proposizione 6.2. *Se G è un gruppo d'ordine minimo non risolubile di $\mathfrak{s}\mathfrak{N}\vee\mathfrak{s}\mathfrak{A}$, allora G è semplice non abeliano.*

Dim. Sia $H \ntrianglelefteq G$ e sia $K \leq H$. Se K fosse subanormale in G, esisterebbe una catena $K = K_0 < K_1 < \ldots < K_n = G$ con K_i anor-

(*) Si tratta evidentemente di classi tutte chiuse rispetto ai quozienti.

(**) Vedasi anche Satz VI.11.21 in [7].

male in K_{i+1}, $i = 0, 1, \dots, n-1$. Sia i_0 l'indice per cui $K_{i_0} \leq H$ e $K_{i_0+1} \nleq H$, e sia $x \in K_{i_0+1} \setminus H$. Dev'essere $x \in \langle H_{i_0}, K_{i_0}^x \rangle \leq \langle H, H^x \rangle = H$, assurdo. Allora necessariamente ogni sottogruppo di H è subnormale in G. H è quindi nilpotente, per cui anche risolubile. $G/H \in s\mathfrak{N}\vee s\mathfrak{A}$ perchè immagine omomorfa di un $s\mathfrak{N}\vee s\mathfrak{A}$-gruppo, e se fosse $|G/H| < |G|$, G/H sarebbe risolubile, e lo sarebbe anche G. Allora $|G/H| = |G|$, cioè $H = \{1\}$.

Corollario 6.3. *Se G è un gruppo d'ordine minimo non risolubile di $\mathfrak{N}\vee s\mathfrak{A}$, allora G è semplice non abeliano.*

Per il momento non siamo riusciti a decidere se esistono gruppi semplici non abeliani i cui sottogruppi non identici siano tutti subanormali. L'esistenza o meno di tali gruppi equivale all'essere $\mathfrak{N}\vee s\mathfrak{A}$ ed $s\mathfrak{N}\vee s\mathfrak{A}$ sovraclassi proprie o meno di $\mathfrak{N}\vee\mathfrak{A}$ e di $s\mathfrak{N}\vee\mathfrak{A}$ rispettivamente. Se $\mathfrak{N}\vee s\mathfrak{A}$ fosse una estensione propria di $\mathfrak{N}\vee\mathfrak{A}$, la condizione di appartenenza di un gruppo ad $\mathfrak{N}\vee s\mathfrak{A}$ non si erediterebbe ai sottogruppi:

Proposizione 6.4. *Sia $G \in \mathfrak{N}\vee s\mathfrak{A}$, ma $G \notin \mathfrak{N}\vee\mathfrak{A}$. Allora G possiede un sottogruppo H tale che $H \notin \mathfrak{N}\vee s\mathfrak{A}$.*

Dim. Sia G un controesempio d'ordine minimo. Poichè $G \in \mathfrak{N}\vee s\mathfrak{A} \setminus \mathfrak{N}\vee\mathfrak{A}$, G è non risolubile (per 6.1(ii)). Se esistesse $N \neq \{1\}$, con $N \ntrianglelefteq G$, per un argomento già usato nella dimostrazione del teorema 6.2, N sarebbe nilpotente, e quindi G/N non risolubile. Allora anche $G/N \in \mathfrak{N}\vee s\mathfrak{A} \setminus \mathfrak{N}\vee\mathfrak{A}$. Ora da $|G/N| < |G|$ segue che esiste $K/N \leq G/N$, con $K/N \notin \mathfrak{N}\vee s\mathfrak{A}$, assurdo perchè K/N è immagine omomorfa di $K \in \mathfrak{N}\vee s\mathfrak{A}$. Pertanto G è semplice non abeliano. Ogni sottogruppo X di G, $X \neq G$, sta in $\mathfrak{N}\vee\mathfrak{A}$, perchè altrimenti X conterrebbe un sottogruppo $A \notin \mathfrak{N}\vee s\mathfrak{A}$, assurdo perchè $A \leq G$. Gli $\mathfrak{N}\vee\mathfrak{A}$-gruppi sono supersolubili, e così G sarebbe un gruppo semplice non abeliano a sottogruppi propri supersolubili, contraddizione.

Corollario 6.5. *Un gruppo G è minimale non in $\mathfrak{N}\vee s\mathfrak{A}$ se e solo se G è minimale non in $\mathfrak{N}\vee\mathfrak{A}$.*

Dim. Sia M un sottogruppo massimo di G. Allora M ed ogni suo sottogruppo stanno in $\mathfrak{N}\vee s\mathfrak{A}$. Per 6.4 M è allora risolubile e quindi $M \in \mathfrak{N}\vee\mathfrak{A}$ (teorema 6.1(ii)).

Viceversa, un gruppo minimale non in $\mathfrak{N}v\mathfrak{A}$ è risolubile e quindi non appartiene ad $\mathfrak{N}vs\mathfrak{A}$.

In analogia a quanto visto in 6.4, se è $s\mathfrak{N}vs\mathfrak{A} \neq s\mathfrak{N}v\mathfrak{A}$, anche $s\mathfrak{N}vs\mathfrak{A}$ è non ereditaria:

Proposizione 6.6. *Sia $G \in s\mathfrak{N}vs\mathfrak{A}$, e $G \notin s\mathfrak{N}v\mathfrak{A}$. Allora G possiede un sottogruppo H con $H \notin s\mathfrak{N}vs\mathfrak{A}$.*

Dim. Con lo stesso argomento usato in 6.4 si arriva a dimostrare che un controesempio d'ordine minimo è semplice, e che i suoi sottogruppi propri stanno in $s\mathfrak{N}v\mathfrak{A}$. Allora, in virtù del teorema 1.1., $G \cong \mathrm{PSL}(2,2^p)$, con 2^p-1 primo di Mersenne. Sia $P \in \mathrm{Syl}_2(G)$. Se P è anormale in un sottogruppo $X \leq G$, allora per un ben noto teorema di Burnside, essendo P abeliano, P ha complemento normale in X e quindi $X \neq G$; allora, per il teorema B, P deve essere ciclico, una contraddizione.

Terminiamo dimostrando che i gruppi semplici minimali non stanno in $s\mathfrak{N}vs\mathfrak{A}$.

Lemma 6.7. *Sia G un gruppo semplice. Se i 2-sottogruppi di Sylow di G hanno a due a due intersezione identica, $G \notin s\mathfrak{N}vs\mathfrak{A}$.*

Dim. Sia $P \in \mathrm{Syl}_2(G)$ e P sia anormale in $X \leq G$. Allora X è un gruppo di Frobenius, con P complemento del nucleo. Quindi P è o ciclico o generalizzato dei quaternioni, in contrasto con la semplicità di G.

Teorema 6.8. *$s\mathfrak{N}vs\mathfrak{A}$ non contiene alcun gruppo semplice minimale.*

Dim. In base al lemma 6.7 si escludono i gruppi $\mathrm{Sz}(2^q)$, q primo dispari. Supponiamo allora $G = \mathrm{PSL}(2, p^f)$, $p^f > 3$. Scelto $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$, è noto che P è abeliano elementare ([7] Hauptsatz II.8.27). Sia P anormale in $X \leq G$. Per Burnside P ha complemento normale in X, e quindi $X \neq G$, e, sempre per [7] II.8.27, l'unica possibilità è che sia $X \cong A_4$. È quindi $p = 3$ e $|P| = 3$; allora, per questioni di ordine (su G), risulta $p^f = 3$, assurdo. Resta unicamente il caso $G \cong \mathrm{PSL}(3,3)$. E $|G| = 2^4 3^3 13$. Sia $P \in \mathrm{Syl}_{13}(G)$, e supponiamo $G \in s\mathfrak{N}vs\mathfrak{A}$. P è anormale in $X \leq G$; sempre per Burnside P ha complemento normale N in X, e quindi $X \neq G$.

Poichè P opera f.p.f. su N, N è nilpotente [13].

13 non divide $2^n - 1$ per $n \leq 4$, per cui N sarà un 3-gruppo, e dovendo essere $13 \mid |N| - 1$, dovrà essere $|N| = 3^3$ ed N normale minimo in X. Ma N non è abeliano ([7] Satz III.16.3).

BIBLIOGRAFIA

[1] YA. G. BERKOVIČ, *Finite groups with maximal subgroups having large kernels*, Sibirskii Mat. Zh., Vol. 9, N° 2 (1968) 243-248.

[2] G. EBERT e S. BAUMAN, *Abnormal chains in finite soluble groups*, Jour. Alg. 36 (1975) 287-293.

[3] A. FATTAHI, *Groups with only normal and abnormal subgroups*, Jour. Alg. 28 (1974) 15-19.

[4] W. GASCHÜTZ, *Gruppen in denen das Normalteilersein transitiv ist*, J. für Math., Bd 198, Heft 2 (1947) 87-92.

[5] D. GORENSTEIN, *Finite Groups*, Harper & Row (1968).

[6] P. HALL, *On the system normalizers of a soluble group*, Proc. London Math. Soc. 43 (1937) 507-528.

[7] B. HUPPERT, *Endliche Gruppen I*, Springer Verlag (1967).

[8] K. IWASAWA, *Über die Struktur der endlichen Gruppen, deren echte Untergruppen sämtlich nilpotent sind*, Proc. Phys. Math. Soc. Japan (3) 23 (1941) 1-4.

[9] G. A. MILLER e H. MORENO, *Nonabelian groups in which every subgroup is abelian*, Trans. Am. Math. Soc. 4 (1903) 398-404.

[10] T. A. PENG, *Finite groups with pronormal subgroups*, Proc. Am. Math. Soc. 20 (1969) 232-234.

[11] L. RÉDEI, *Die endlichen einstufig nichtnilpotenten Gruppen*, Publ. Math. Debrecen 4 (1955-56) 303-324.

[12] D. ROBINSON, *Groups which are minimal with respect to normality being intransitive*, Pacif. J. Math. 31, N° 3 (1969) 777-785.

[13] J. THOMPSON, *Finite groups with fixed point free automorphisms of prime order*, Proc. Nat. Acad. Sci. US 45 (1959) 578-581.

Manoscritto pervenuto in redazione il 29 giugno 1977.