

RENDICONTI  
*del*  
SEMINARIO MATEMATICO  
*della*  
UNIVERSITÀ DI PADOVA

TULLIO VALENT

GIUSEPPE ZAMPIERI

**Sulla differenziabilità di un operatore legato a una  
classe di sistemi differenziali quasi-lineari**

*Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,*  
tome 57 (1977), p. 311-322

[http://www.numdam.org/item?id=RSMUP\\_1977\\_\\_57\\_\\_311\\_0](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1977__57__311_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## Sulla differenziabilità di un operatore legato a una classe di sistemi differenziali quasi-lineari (\*)

TULLIO VALENT - GIUSEPPE ZAMPIERI (\*\*)

**SUMMARY** - In the paper [6] a theorem of non-differentiability of the Nemytsky operator — when acting between the subspace  $D(H_0^1(\Omega))$  of  $(L^p(\Omega))^n$  and  $L^q(\Omega)$ ,  $p \leq q$  [where  $D$  is the gradient operator] — has been established. The technique of proof, however, appears to be difficult to apply in the case of the Nemytsky operator acting between the subspace  $D((H_0^{1,p}(\Omega))^n)$  of  $(L^p(\Omega))^n$  and  $L^q(\Omega)$ .

So, in this present paper, we introduce a new technique of proof to demonstrate the previous result in the last case. We do so with fewer requisites on the function «generating» the operator.

Our result enables us to study the admissibility of a linearization (in the sense of [7]) of Dirichlet's problem for a special class of non-linear differential systems; i.e. we can prove that the non-admissibility situations mentioned in [7] relative to one equation are equally valid in the case of a system of equations.

In [6] è stato dimostrato un teorema di non differenziabilità per l'operatore di Nemytsky agente tra il sottospazio  $D(H_0^1(\Omega))$  di  $(L^p(\Omega))^n$  e  $L^q(\Omega)$ ,  $p \leq q$  (ove  $D$  è l'operatore gradiente). La tecnica di tale dimostrazione appare difficilmente applicabile al caso dell'operatore di Nemytsky operante tra il sottospazio  $D(H_0^{1,p}(\Omega))^n$  di  $(L^p(\Omega))^n$  e  $L^q(\Omega)$ .

Perciò nel presente lavoro si introduce un nuovo tipo di dimostrazione con cui si riesca a stabilire, in quest'ultimo caso, un risultato tipo quello di [6] e che consente inoltre di attenuare le ipotesi sulla funzione che genera l'operatore.

---

(\*) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.F.M. del C.N.R.

(\*\*) Indirizzo degli AA: Seminario matematico dell'Università di Padova, Via Belzoni 7, Padova.

Il risultato ottenuto permette (al n. 2) di studiare la questione dell'ammissibilità (nel senso di [7]) di una linearizzazione del problema di Dirichlet relativo a un certo tipo di sistemi differenziali quasi-lineari e di provare che le situazioni di non ammissibilità rilevate in [7], nel caso di equazioni, sussistono anche per i sistemi.

1. Siano  $\Omega$  un aperto limitato di  $\mathbb{R}^n$ ,  $p$  e  $q$  due numeri reali  $\geq 1$ .

Sia  $(x, y) \rightarrow a(x, y)$  una funzione di  $\Omega \times \mathbb{R}^{n^2}$  in  $\mathbb{R}$  verificante la condizione di Caratheodory: per ogni  $y = (y_{ij})_{i,j=1,\dots,n} \in \mathbb{R}^{n^2}$  la funzione  $x \rightarrow a(x, y)$  è misurabile e per quasi ogni  $x \in \Omega$  la funzione  $y \rightarrow a(x, y)$  è continua. Supponiamo inoltre che  $\frac{\partial a}{\partial y_{ij}}(x, y)$ , ( $i, j = 1, \dots, n$ ), esistano e che, per ogni  $y \in \mathbb{R}^{n^2}$ , le funzioni  $x \rightarrow \frac{\partial a}{\partial y_{ij}}(x, y)$  appartengano a  $L^q(\Omega)$ , essendo  $L^q(\Omega)$  lo spazio delle (classi di) funzioni reali di potenza  $q$ -ma sommabile in  $\Omega$ .

Sia  $H^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x_j} \in L^p(\Omega), j = 1, \dots, n \right\}$  dotato della norma  $\|\cdot\|_{1,p}$  definita da:  $\|u\|_{1,p} = \left( \|u\|_p^p + \sum_{j=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|_p^p \right)^{1/p}$ , ove  $\|\cdot\|_p$  è la norma di  $L^p(\Omega)$ .

$H_0^{1,p}(\Omega)$  denoti la chiusura in  $H^{1,p}(\Omega)$  dell'insieme  $\mathfrak{D}(\Omega)$  delle funzioni reali indefinitamente differenziabili in  $\Omega$  e a supporto compatto in  $\Omega$ ;  $H^{-1,p'}(\Omega)$ ,  $\left( \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 \right)$ , denoti il duale forte di  $H_0^{1,p}(\Omega)$ .

Per ogni  $u = (u_i)_{i=1,\dots,n} \in (H^{1,p}(\Omega))^n$  poniamo

$$Du = \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)_{i,j=1,\dots,n}$$

e definiamo la funzione  $Nu : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  ponendo

$$(1) \quad Nu(x) = a(x, Du(x)).$$

La funzione  $a$  soddisfi alla condizione di crescita

$$(2) \quad |a(x, y)| \leq b(x) + c|y|^{p/q}$$

ove  $b \in L^q(\Omega)$ ,  $c$  è una costante positiva e  $|y| = \left( \sum_{i,j=1}^n y_{ij}^2 \right)^{1/2}$ .

Dalla condizione di Caratheodory e da (2) segue facilmente che  $u \in (H_0^{1,p}(\Omega))^n \rightarrow Nu \in L^q(\Omega)$ ; anzi si può dimostrare che, sotto queste condizioni, l'operatore  $N : (H_0^{1,p}(\Omega))^n \rightarrow L^q(\Omega)$  è continuo <sup>(1)</sup>.

**TEOREMA.** *Nelle ipotesi fatte su  $a$ , se  $p \leq q$  l'operatore  $N : (H_0^{1,p}(\Omega))^n \rightarrow L^q(\Omega)$  definito da (1) è differenziabile (secondo Fréchet) in qualche  $\bar{u} \in (H_0^{1,p}(\Omega))^n$  (se e) solo se  $a$  è affine in  $y$ .*

**DIMOSTRAZIONE** <sup>(2)</sup>. Il « se » dell'enunciato è banale, attesa la continuità di  $N : (H_0^{1,p}(\Omega))^n \rightarrow L^q(\Omega)$ . Viceversa, si osservi innanzitutto che non è restrittive supporre  $\bar{u} = 0$  e  $a(x, 0) = 0 \forall x \in \Omega$ ; altrimenti si ragiona sulla funzione  $a' : \Omega \times \mathbb{R}^{n^2} \rightarrow \mathbb{R}$  definita da  $a'(x, y) = a(x, D\bar{u}(x) + y) - a(x, D\bar{u}(x))$ .

Detto  $N'(O)$  il differenziale di  $N$  in  $O$ , per ogni  $u \in (H_0^{1,p}(\Omega))^n$  si ha  $\lim_{\substack{t \in \mathbb{R} \\ t \rightarrow 0}} \frac{N(tu)}{t} = N'(O)u$ , ove il limite va inteso nella topologia di  $L^q(\Omega)$ . Ne segue l'esistenza di una successione  $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$  in  $\mathbb{R}$  convergente decrescendo a zero tale che per quasi ogni  $x \in \Omega$  si ha

$$(3) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a(x, t_k Du(x))}{t_k} = (N'(O)u)(x);$$

perciò, dato che, per ogni  $x \in \Omega$ , la funzione  $t \rightarrow a(x, t Du(x))$  è derivabile in  $t = 0$  e che la sua derivata in  $t = 0$  è il limite a primo membro di (3), si ottiene

$$(4) \quad (N'(O)u)(x) = \sum_{ij=1}^n \frac{\partial a}{\partial y_{ij}}(x, 0) \frac{\partial u_i}{\partial x_j}(x).$$

Sia  $\bar{y} = (\bar{y}_{ij})_{i,j=1, \dots, n} \in (\mathbb{R} \setminus \{0\})^{n^2}$ .

<sup>(1)</sup> È noto (v. per es. [2]) che, se  $a$  soddisfa alla condizione di Caratheodory, (2) è necessaria e sufficiente affinché, posto, per ogni  $\tau \in (L^p(\Omega))^n$ ,

$$A\tau(x) = a(x, \tau(x)),$$

l'operatore  $\tau \rightarrow A\tau$  mappi con continuità  $(L^p(\Omega))^{n^2}$  in  $L^q(\Omega)$ .

<sup>(2)</sup> Seguiremo la linea della dimostrazione del Teorema 3.6 di [5]; nel nostro caso, però, il problema presenta delle difficoltà tecniche non banali.

Prefissato (arbitrariamente)  $x^0 = (x_j^0)_{j=1, \dots, n} \in \Omega$ , per ogni  $m \in \mathbb{N}$  consideriamo la  $n$ -pla  $(u_i^m)_{i=1, \dots, n}$ , ove  $u_i^m$  è la funzione di  $\Omega$  in  $\mathbb{R}$  definita ponendo

$$u_i^m(x) \left\{ \begin{array}{l} = 0 \text{ se } \sum_{j=1}^n \frac{|x_j - x_j^0|}{c_{ij}^m} \geq 1 \\ = \frac{|y_{i1}|}{m} - \frac{|y_{i1}|}{m} \sum_{j=1}^n \frac{|x_j - x_j^0|}{c_{ij}^m} \text{ se } \sum_{j=1}^n \frac{|x_j - x_j^0|}{c_{ij}^m} \leq 1 \end{array} \right.$$

$$\text{ove } c_{ij}^m = \frac{1}{m} \left| \frac{\bar{y}_{i1}}{\bar{y}_{ij}} \right|.$$

Poniamo, per  $i = 1, \dots, n$  e  $m \in \mathbb{N}$ ,

$$U_i^m = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : x_j \neq x_j^0, (j = 1, \dots, n), \sum_{j=1}^n \frac{|x_j - x_j^0|}{c_{ij}^m} < 1, \right. \\ \left. \frac{x_j - x_j^0}{|x_j - x_j^0|} = - \frac{\bar{y}_{ij}}{|\bar{y}_{ij}|} \right\}.$$

Fissato, per ogni  $i = 1, \dots, n$ , un punto  $x^t \in U_i^m$  e posto  $h^t = x^t - x^0$ , siano  $v_i^m$  le funzioni di  $\Omega$  in  $\mathbb{R}$  definite da

$$v_i^m(x) = u_i^m(x + \frac{1}{m} h^t).$$

Sia  $v^m = (v_i^m)_{i=1, \dots, n}$ .

È evidente che, posto  $V^m = \bigcap_{i=1}^n \left( U_i^m - \frac{h^t}{m} \right)$ , si ha  $V^m \neq \emptyset$  in quanto  $x^0 \in V^m$  e che inoltre

$$Dv^m(x) = \bar{y} \quad \forall x \in V^m.$$

Dimostriamo ora che, se  $S^1(x^0)$  è una palla centrata in  $x^0$  di raggio  $r_1$  contenuta nell'aperto  $V^1$ , allora per ogni  $m \in \mathbb{N}$  la palla  $S^m(x^0)$  centrata in  $x^0$  di raggio  $r_1/m$  è contenuta in  $V^m$ .

Infatti, se  $x \in S^m(x^0)$ , cioè se  $\sum_{j=1}^n (x_j - x_j^0)^2 < (r_1/m)^2$ , allora  $x^0 + m(x - x^0) \in S^1(x^0) \subseteq \bigcap_{i=1}^n (U_i^1 - h^i)$ ; pertanto, per ogni  $i = 1, \dots, n$  si ha

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{m(x_j - x_j^0) + h_j^i}{|m(x_j - x_j^0) + h_j^i|} = -\frac{\bar{y}_{ij}}{|\bar{y}_{ij}|} \quad \text{per ogni } j = 1, \dots, n \\ \sum_{j=1}^n \frac{|m(x_j - x_j^0) + h_j^i|}{c_{ij}^1} < 1 \\ m(x_j - x_j^0) + h_j^i \neq 0 \quad \text{per ogni } j = 1, \dots, n. \end{array} \right.$$

Di conseguenza per ogni  $i = 1, \dots, n$ , si ha

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x_j - x_j^0 + \frac{h_j^i}{m}}{|x_j - x_j^0 + \frac{h_j^i}{m}|} = -\frac{\bar{y}_{ij}}{|\bar{y}_{ij}|} \quad \text{per ogni } j = 1, \dots, n \\ \sum_{j=1}^n \frac{|x_j - x_j^0 + \frac{h_j^i}{m}|}{c_{ij}^m} < 1 \\ x_j - x_j^0 + \frac{h_j^i}{m} \neq 0 \quad \text{per ogni } j = 1, \dots, n. \end{array} \right.$$

Questa è la terna di condizioni su  $x$  che definisce l'insieme  $U_i^m - \frac{h^i}{m}$  e perciò  $x \in \bigcap_{i=1}^n \left( U_i^m - \frac{h^i}{m} \right)$ , cioè  $S^m(x^0) \subseteq V^m$ .

Si è pertanto ottenuta una successione  $(S^m(x^0))_{m \in \mathbb{N}}$  di palle centrate in  $x^0$  tali che

$$\text{mis } S^m(x^0) = k \left( \frac{1}{m} \right)^n,$$

[ove  $k$  è una costante opportuna e  $\text{mis}$  sta per misura di Lebesgue] e che

$$Dv^m(x) = \bar{y} \quad \forall x \in S^m(x^0).$$

È altresì chiaro che, almeno per  $m$  sufficientemente elevato, le funzioni  $v_1^m, \dots, v_n^m$  hanno il supporto compatto in  $\Omega$  e quindi, appartenendo esse (come si constata facilmente) a  $H^{1,p}(\Omega)$ , stanno in  $H_0^{1,p}(\Omega)$ ; inoltre

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|Dv^m\|_{(L^p(\Omega))^{n^2}} = 0$$

Di conseguenza, essendo (per ipotesi)  $N : (H_0^{1,p}(\Omega))^n \rightarrow L^q(\Omega)$  differenziabile in  $O$  e ricordando (4), si ha <sup>(3)</sup>

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\left( \int_{\Omega} \left| a(x, Dv^m(x)) - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial a}{\partial y_{ij}}(x, 0) \frac{\partial v_i^m}{\partial x_j}(x) \right|^q dx \right)^{1/q}}{\|Dv^m\|_{(L^p(\Omega))^{n^2}}} = 0.$$

Si osservi ora che, per come sono state definite le funzioni  $v_i^m$ , esiste una costante positiva  $k_1$  tale da aversi, per ogni  $i = 1, \dots, n$  e  $m \in \mathbb{N}$ ,

$$\text{mis}(\text{supp } v_i^m) \leq k_1 \left( \frac{1}{m} \right)^n,$$

ove  $\text{supp } v_i^m$  indica il supporto di  $v_i^m$ . Pertanto

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\left( \int_{S^m(x^0)} \left| a(x, \bar{y}) - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial a}{\partial y_{ij}}(x, 0) \bar{y}_{ij} \right|^q dx \right)^{1/q}}{\left( \sum_{i,j=1}^n |\bar{y}_{ij}|^p \right)^{1/p} \left( k_1 \left( \frac{1}{m} \right)^n \right)^{1/p}} = 0$$

Poichè inoltre  $p \leq q$ , si ha per  $m$  grande

$$\left( k_1 \left( \frac{1}{m} \right)^n \right)^{1/p} \leq \left( k_1 \left( \frac{1}{m} \right)^n \right)^{1/q} = \left( \frac{k_1}{k} \text{mis}(S^m(x^0)) \right)^{1/q}$$

---

<sup>(3)</sup> Si ricordi che, essendo  $\Omega$  limitato, si ha (per la disuguaglianza di Poincaré)

$$\|Dv^m\|_{(L^p(\Omega))^{n^2}} \leq \text{cost} \|v^m\|_{(H^{1,p}(\Omega))^n}, \quad \forall v \in (H_0^{1,p}(\Omega))^n.$$

e perciò

$$\left(\frac{k}{k_1}\right)^{1/q} \frac{1}{\left(\sum_{i,j=1}^n |\bar{y}_{ij}|^p\right)^{1/p}} \lim_{m \rightarrow \infty} \left( \frac{\int_{S^m(x^0)} \left| a(x, \bar{y}) - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial a}{\partial y_{ij}}(x, 0) \bar{y}_{ij} \right|^q dx}{\text{mis}(S^m(x^0))} \right)^{1/q} = 0.$$

Si conclude che per ogni  $x^0 \in \Omega$  si può trovare una successione  $(S^m(x^0))_{m \in \mathbb{N}}$  di palle centrate in  $x^0$  e di misura infinitesima (per  $m \rightarrow \infty$ ) in modo da aversi

$$(5) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\int_{S^m(x^0)} \left| a(x, \bar{y}) - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial a}{\partial y_{ij}}(x, 0) \bar{y}_{ij} \right|^q dx}{\text{mis}(S^m(x^0))} = 0.$$

La funzione  $x \rightarrow \left| a(x, \bar{y}) - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial a}{\partial y_{ij}}(x, 0) \bar{y}_{ij} \right|^q$  appartiene a  $L^1(\Omega)$ : per convincersene basta pensare che le funzioni  $x \rightarrow \frac{\partial a}{\partial y_{ij}}(x, 0)$  appartengono a  $L^q(\Omega)$  per ipotesi e che la funzione  $x \rightarrow a(x, \bar{y})$  appartiene per a  $L^q(\Omega)$  in virtù di (2).

Allora, in base a un noto teorema, si ha, per quasi ogni  $x^0 \in \Omega$ ,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\int_{S^m(x^0)} \left| a(x, \bar{y}) - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial a}{\partial y_{ij}}(x, 0) \bar{y}_{ij} \right|^q dx}{\text{mis}(S^m(x^0))} = \left| a(x^0, \bar{y}) - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial a}{\partial y_{ij}}(x^0, 0) \bar{y}_{ij} \right|^q.$$

Di conseguenza da (5) segue, per quasi ogni  $x^0 \in \Omega$ ,

$$a(x^0, \bar{y}) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial a}{\partial y_{ij}}(x^0, 0) \bar{y}_{ij}.$$

Evidentemente, allora, esiste un sottoinsieme  $\Omega_0$  di  $\Omega$  avente misura di Lebesgue nulla tale che, per ogni  $y \in (\mathbb{Q} \setminus \{0\})^{n^2}$ , (ove  $\mathbb{Q}$  denota l'insieme dei numeri razionali), si ha

$$(6) \quad a(x, y) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial a}{\partial y_{ij}}(x, 0) y_{ij} \quad \forall x \in \Omega \setminus \Omega_0$$

In virtù della continuità della funzione  $y \rightarrow a(x, y)$ , (6) sussiste per ogni  $y \in \mathbb{R}^{n^2}$ .

Dal Teorema appena dimostrato segue immediatamente il seguente

**COROLLARIO.** *Sia  $V$  un sottospazio di  $(H^{1,p}(\Omega))^n$  contenente  $(H_0^{1,p}(\Omega))^n$ .*

*Nelle solite ipotesi su  $a$ , se  $p \leq q$  l'operatore  $N : V \rightarrow L^q(\Omega)$  è differenziabile in qualche punto di  $V$  (se e solo se  $a$  è affine in  $y$ ).*

2. In questo numero sia  $(x, y) \rightarrow a(x, y) = (a_{ij}(x, y))_{i,j=1, \dots, n}$  una funzione di  $\Omega \times \mathbb{R}^{n^2}$  in  $\mathbb{R}^{n^2}$  verificante la condizione di Carathéodory (v. n. 1); inoltre esistano  $\frac{\partial a_{ij}}{\partial y_{hk}}(x, 0)$ ,  $(i, j, h, k = 1, \dots, n)$

e le funzioni  $x \rightarrow \frac{\partial a_{ij}}{\partial y_{hk}}(x, 0)$  siano misurabili ed essenzialmente limitate in  $\Omega$ . Sia, per semplicità,  $a(x, 0) = 0 \quad \forall x \in \Omega$ . La funzione  $a$  non sia lineare in  $y$ .

Consideriamo l'operatore differenziale (quasi-lineare)

$$Tu = D^*a(x, Du) \quad , \quad u = (u_1, \dots, u_n) ,$$

ove, al solito,  $Du = \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)_{i,j=1, \dots, n}$  e  $D^*$  denota il trasposto formale dell'operatore gradiente  $D$ . Più esplicitamente:

$$Tu = - \left( \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} a_{ij}(x, Du) \right)_{i=1, \dots, n} .$$

Posto

$$l(x, y) = \sum_{h,k=1}^n \frac{\partial a}{\partial y_{hk}}(x, 0) y_{hk}$$

consideriamo l'operatore differenziale lineare

$$T_L u = D^* l(x, Du) \quad , \quad u = (u_1, \dots, u_n) .$$

$$\text{Esplicitamente: } T_L u = - \left( \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \sum_{h,k=1}^n \frac{\partial a_{ij}}{\partial y_{hk}}(x, 0) \frac{\partial u_h}{\partial x_k} \right) \right)_{i=1, \dots, n} .$$

Prendiamo in esame i seguenti problemi

$$(P) \begin{cases} Tu = f & \text{in } \Omega \\ u = g & \text{su } \partial\Omega \end{cases} ; \quad (PL) \begin{cases} T_L u = f & \text{in } \Omega \\ u = g & \text{su } \partial\Omega \end{cases} ,$$

ove  $\partial\Omega$  indica la frontiera di  $\Omega$ . Diremo che  $(PL)$  si ottiene linearizzando formalmente  $(P)$  nell'origine <sup>(4)</sup>.

Siano  $S_u, S_f$  spazi di distribuzioni (vettoriali) in  $\Omega$  a valori in  $\mathbb{R}^n$  e anche spazi di Banach; sia  $S_u \subset (H^{1,1}(\Omega))^n$  e  $(C^1(\bar{\Omega}))^n \cap S_u$  sia denso in  $S_u$ .

$S_g$  sia uno spazio di Banach di «funzioni» definite su  $\partial\Omega$  e a valori in  $\mathbb{R}^n$ . Inoltre  $S_u$  e  $S_f$  siano tali che esista un'applicazione (di traccia)  $\tau: S_u \rightarrow S_g$  lineare e continua con  $\tau u = u|_{\partial\Omega} \forall u \in (C^1(\bar{\Omega}))^n \cap S_u$ . Supponiamo a tale che, per ogni  $u \in S_u$ , la funzione  $x \rightarrow a(x, Du(x))$  sia localmente sommabile in  $\Omega$ ; il che certamente accade se si ammette per  $a$  una condizione di crescita tipo (2). Allora (intendendo  $D$  e  $D^*$  nel senso delle distribuzioni)  $T$  è definito in  $S_u$ . Poichè anche  $T_L$  è definito in  $S_u$ , possiamo porre, per ogni  $u \in S_u$ ,

$$\mathfrak{C}u = (Tu, \tau u), \quad \mathfrak{C}_L u = (T_L u, \tau u) .$$

Avendo supposto  $a(x, 0) = 0 \quad \forall x \in \Omega$ , si ha  $\mathfrak{C}(0) = 0$ .

Se  $\mathfrak{C}$  è un omeomorfismo di un intorno  $U$  dell'origine di  $S_u$  su un intorno  $V \times W$  dell'origine di  $S_f \times S_g$ , diremo (usando la locuzione introdotta in [7]) che la *linearizzazione*  $(PL)$  di  $(P)$  è *ammissibile rispetto a*  $(S_u, S_f, S_g)$  se sono verificate le seguenti condizioni:

<sup>(4)</sup> Si considera la linearizzazione nell'origine solo per non appesantire l'esposizione; è chiaro come la questione vada posta per un punto diverso dall'origine.

(i) il problema  $(PL)$  è ben posto rispetto a  $(S_u, S_f, S_g)$  nel senso che  $\mathfrak{T}_L$  è un isomorfismo di  $S_u$  su  $S_f \times S_g$ ;

(ii)  $\mathfrak{T}$  è differenziabile (secondo Fréchet) nell'origine e risulta  $\mathfrak{T}'(0) = \mathfrak{T}_L$ .

Come è già stato osservato in [6], essendo  $\mathfrak{T}$  un omeomorfismo di  $U$  su  $V \times W$ , la coppia di condizioni ((i), (ii)) è equivalente alla coppia di condizioni ((i), (ii)') ove (ii)' è la condizione:  $\mathfrak{T}^{-1}: V \times W \rightarrow U$  è differenziabile nell'origine e risulta  $(\mathfrak{T}^{-1})'(0) = \mathfrak{T}_L^{-1}$ .

Pertanto, se la linearizzazione  $(PL)$  di  $(P)$  è ammissibile rispetto a  $(S_u, S_f, S_g)$ , si ha

$$\lim_{\substack{\|(f,g)\| \rightarrow 0 \\ S_f \times S_g}} \frac{\|\mathfrak{T}^{-1}(f,g) - \mathfrak{T}_L^{-1}(f,g)\|_{S_f}}{\|(f,g)\|_{S_f \times S_g}} = 0 \quad \text{con } (f,g) \in V \times W \text{ e } \mathfrak{T}^{-1}(f,g) \in U;$$

$\mathfrak{T}^{-1}(f,g)$  e  $\mathfrak{T}_L^{-1}(f,g)$  sono, rispettivamente, la soluzione del problema  $(P)$  in  $U$  e quella del problema  $(PL)$  in corrispondenza del dato  $(f,g) \in V \times W$ .

Supponiamo, ora, che  $a$  soddisfi alla condizione di crescita

$$(7) \quad |a(x, y)| \leq b + c|y|$$

ove  $b$  e  $c$  sono costanti positive, e che risulti

$$(8) \quad \frac{\partial a_{ij}}{\partial y_{hk}}(x, 0) = \frac{\partial a_{hk}}{\partial y_{ij}}(x, 0) \quad \forall x \in \Omega$$

$$(9) \quad \lambda d|y|^2 \leq \sum_{i,j,h,k=1}^n \frac{\partial a_{ij}}{\partial y_{hk}}(x, 0) y_{ij} y_{hk} \leq d|y|^2 \quad \forall (x, y) \in \Omega \times \mathbb{R}^{n^2},$$

essendo  $\lambda, d$  due costanti positive con  $\lambda \leq 1$ ; (8) esprime il fatto che  $T_L$  è autoaggiunto e (9) dice che  $T_L$  è uniformemente ellittico. Posto, per ogni  $u \in (H^{1,p}(\Omega))^n$ ,

$$Nu(x) = a(x, Du(x))$$

la condizione (7) assicura che, qualunque sia  $p > 1$ ,  $N$  mappa con continuità  $(H^{1,p}(\Omega))^n$  in  $(L^p(\Omega))^{n^2}$  come s'è già osservato al n. 1.

Sia  $\Omega$  a frontiera localmente lipschitziana nel senso di [4]; allora  $\tau$  è un'applicazione lineare e continua di  $(H^{1,p}(\Omega))^n$  su  $(H^{1-1/p,p}(\partial\Omega))^n$ ,  $\forall p > 1$ . (V. [4], Th. 5.7) <sup>(5)</sup>.

Sussistendo (8), (9), com'è ben noto  $T_L$  è un isomorfismo di  $(H_0^1(\Omega))^n$  su  $(H^{-1}(\Omega))^n$  <sup>(6)</sup>; ne discende facilmente che il problema (PL) è ben posto assumendo

$$(I) \quad S_u = (H^1(\Omega))^n, \quad S_f = (H^{-1}(\Omega))^n, \quad S_g = (H^{1/2}(\partial\Omega))^n.$$

Tuttavia la linearizzazione (PL) del problema (P) non è ammissibile rispetto alla scelta (I) degli spazi  $S_u, S_f, S_g$  (della soluzione e dei dati), perché, se  $\mathfrak{C}$  è un omeomorfismo di un intorno  $U$  dell'origine di  $(H^1(\Omega))^n$  su un intorno  $V \times W$  dell'origine di  $(H^{-1}(\Omega))^n \times (H^{1/2}(\partial\Omega))^n$ , allora — in base al corollario del teorema del n. 1 —  $\mathfrak{C} : (H^1(\Omega))^n \rightarrow (H^{-1}(\Omega))^n \times (H^{1/2}(\partial\Omega))^n$  non è differenziabile nell'origine se  $a$  non è lineare in  $y$ . Infatti, essendo  $\mathfrak{C}$  un omeomorfismo di  $U$  su  $V \times W$ , tale risulta l'applicazione di  $(N \times \tau)(U) \subseteq (L^2(\Omega))^{n^2} \times (H^{1/2}(\partial\Omega))^{n^2}$  in  $V \times W$  che mappa  $(Nu, \tau u)$  in  $(D^*Nu, \tau u)$ ; la sua inversa è perciò differenziabile in  $O$  e, di conseguenza — se  $\mathfrak{C}$  è differenziabile nell'origine — anche  $N \times \tau$ , e quindi  $N$ , è differenziabile nell'origine; ma ciò (per il Corollario del teorema 1) è assurdo perchè  $a$  non è lineare in  $y$ .

Se  $\Omega$  è sufficientemente regolare e le funzioni  $x \rightarrow \frac{\partial a_{ij}}{\partial y_{hk}}(x, 0)$  sono hölderiane in  $\bar{\Omega}$ , allora, sussistendo (8), (9),  $T_L$  è un isomorfismo di  $(H_0^{1,p}(\Omega))^n$  su  $(H^{-1,p}(\Omega))^n \quad \forall p > 1$  <sup>(7)</sup>; ne segue che il problema

<sup>(5)</sup> Noi indichiamo con  $H^{s,p}(\Omega)$  e  $H^{s,p}(\partial\Omega)$  gli spazi che in [4] sono indicati con  $W^{s,p}(\Omega)$  e  $W^{s,p}(\partial\Omega)$ .

<sup>(6)</sup>  $H^1(\Omega)$ ,  $H_0^1(\Omega)$ ,  $H^{-1}(\Omega)$  stanno rispettivamente per  $H^{1,2}(\Omega)$ ,  $H_0^{1,2}(\Omega)$ ,  $H^{-1,2}(\Omega)$ , secondo la convenzione usuale.

<sup>(7)</sup> V. per es. [1]. I risultati di [1] si riferiscono al caso di una equazione ellittica, ma si trasportano al caso di un sistema ellittico.

Osserviamo che, adattando al caso dei sistemi ellittici il metodo di Meyers [3], è possibile dimostrare che  $T_L$  è un isomorfismo di  $(H_0^{1,p}(\Omega))^n$

su  $(H^{-1,p}(\Omega))^n$  anche nel caso che le funzioni  $x \rightarrow \frac{\partial a_{ij}}{\partial y_{hk}}(x, 0)$  siano sol-

tanto misurabili ed essenzialmente limitate, purchè  $\Omega$  sia « sufficientemente regolare » e la costante  $\lambda$  di (9) sia sufficientemente vicina a 1.

(PL) è ben posto assumendo

$$(II) \quad S_u = (H^{1,p}(\Omega))^n, S_f = (H^{-1,p}(\Omega))^n, S_g = (H^{1-1/p,p}(\partial\Omega))^n, (p > 1).$$

Ragionando come nel caso  $p = 2$ , dal Corollario del Teorema del n. 1 si deduce che, *qualunque sia*  $p > 1$  *la linearizzazione (PL) di (P) non è ammissibile rispetto alla scelta (II) di*  $S_u, S_f, S_g$ .

Ancora più significativo è il fatto che *la linearizzazione (PL) di (P) non è ammissibile neppure rispetto alla scelta*

$$(III) \quad S_u = (H_0^{1,p}(\Omega))^n, S_f = (H^{-1,p}(\Omega))^n, S_g = \{0\}, (p > 1),$$

per la quale (come s'è detto sopra) il problema (PL) è ben posto se  $\Omega$  è sufficientemente regolare e le funzioni  $x \rightarrow \frac{\partial a_{ij}}{\partial y_{hk}}(x, 0)$  sono hölderiane in  $\bar{\Omega}$ .

Per provare questa affermazione si ragiona, evidentemente, come sopra e si sfrutta (in pieno) il teorema del n. 1, anzichè il suo corollario.

#### BIBLIOGRAFIA

- [1] CAMPANATO S. e STAMPACCHIA G., *Sulle maggiorazioni in  $L^p$  nella teoria delle equazioni ellittiche*, Boll. U.M.I., 20 (1965), pp. 393-398.
- [2] KRASNOSELSKIJ M. A. et al., *Integral operators in spaces of summable functions*, Noordhoff Int. Publ., Leyden (1976).
- [3] MEYERS N., *An  $L^p$ -estimate for the gradient of solutions of second order elliptic divergence equations*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, 17 (1963) pp. 189-206.
- [4] NECAS J., *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques*, Masson, Paris (1967).
- [5] PRODI G. e AMBROSETTI A., *Analisi non lineare*, Quaderno Sc. Normale Sup. Pisa (1973).
- [6] VALENT T., *Sulla differenziabilità dell'operatore di Nemytsky*, Rend. Acc. Naz. Lincei, 65, Fasc. 1 (1978).
- [7] VALENT T., *Osservazioni sulla linearizzazione di un operatore differenziale*, Rend. Acc. Naz. Lincei, 65, Fasc. 2 (1978).

Manoscritto pervenuto in redazione il 27 luglio 1978.