

RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

OPREA BERECHET

**Le problème de Cauchy pour opérateurs
partiellement semi-elliptiques**

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 57 (1977), p. 267-284

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1977__57__267_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Le problème de Cauchy pour opérateurs partiellement semi-elliptiques

OPREA BERECHET *

1. - Introduction.

Supposons avoir partagé les coordonnées de l'espace réel n -dimensionnel en deux groupes $R^n = R^m \times R^{n-m}$ tel que tout $\xi \in R^n$ peut être écrit $\xi = (\xi', \xi'')$ avec $\xi' \in R^m$, $\xi'' \in R^{n-m}$. Soit L le sous-espace linéaire de R^n dont les points sont $(0, \dots, 0, \xi_{m+1}, \dots, \xi_n)$ et soit Φ un sous-espace de distributions défini dans R^n .

Soit l'équation partiellement hypoelliptique en ξ'

$$(0.1) \quad P(D)u = 0.$$

DEFINITION (Palamodov (9)). Nous dirons que le problème de Cauchy pour l'équation (0.1) à valeurs initiales sur L possède une solution unique en Φ si chaque solution u de cette équation satisfaisant les conditions.

$$(0.2) \quad u \in \Phi; D_{\xi'}^\alpha u|_L = 0$$

est identiquement nulle pour tout α .

Dans (9) on donne le théorème général d'unicité où la définition de l'espace Φ dépend de deux indices et on pose le problème si ces indices sont les meilleurs pour lesquels on a ce théorème.

En ce qui suit, nous introduirons une classe d'opérateurs partiellement hypoelliptiques, que nous appellerons la classe des opé-

(*) Indirizzo dell'A.: Department of Mathematics INCREST Pod. Păcui 220,77538, Bucarest, Romania.

rateurs partiellement semi-elliptiques, pour laquelle nous donnerons une extension du théorème d'unicité de Palamodov « par directions » et nous montrerons que le théorème obtenu ne peut être étendu, au sens que les indices ne peuvent être améliorés davantage.

2. - Opérateurs partiellement semi-elliptiques.

Soit p_1, \dots, p_n des nombres entiers et positifs et a un multi-indice. Nous utiliserons les notations :

$$(2.1) \quad |a : p| = \sum_{k=1}^n a_k / p_k$$

et

$$(2.2) \quad P^0(D) = \sum_{|\alpha; p|} a_\alpha D^\alpha$$

pour chaque opérateur différentiel $P(D) = \sum_{|\alpha; p| \leq 1} a_\alpha D^\alpha$.

Nous rappellerons la définition suivante :

DEFINITION 2.1. (Browder (2)). On dit qu'un opérateur différentiel $P(D)$ est semi-elliptique s'il existe n nombres entiers et positifs tel que :

- 1) Dans (2.2) il y a seulement des termes pour lesquels $|a : p| \leq 1$;
- 2) $P^0(\xi) \neq 0 \quad (\forall) \xi \in R^n, \xi \neq 0$.

Tout polynôme semi-elliptique $P(x)$ a la propriété qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$(2.3) \quad |x_1|^{p_1} + \dots + |x_n|^{p_n} \leq C(|P(x)| + 1) \quad (\forall) x \in R^n.$$

Nous utiliserons le résultat suivant (Friberg (3), l'inégalité (3.2.12) : Soit $P(D)$ un opérateur semi-elliptique tel que $p_1 \leq p_2 \leq \dots \leq p_n$. Si C est une constante suffisamment grande, il existe une constante $c > 0$, telle que

$$(2.4) \quad |P(\xi + i\eta)| \geq c |P(\xi)|$$

si

$$C(1 + |\eta|) \leq |\xi_1|^{p_1/p_n} + |\xi_2|^{p_2/p_n} + \dots + |\xi_{n-1}|^{p_{n-1}/p_n} + |\xi_n|$$

Soit $P(D)$ un opérateur partiellement hypoelliptique en ξ' . Le théorème Gårding-Malgrange (6) affirme que le polynôme associé à l'opérateur $P(D)$ peut être écrit sous la forme

$$(2.5) \quad P(\xi) = P_0(\xi') + \sum_{\alpha \neq 0} P_\alpha(\xi') \xi^{\alpha}$$

où P_0 (considéré comme un polynôme à m variables) est hypoelliptique et $P_\alpha \ll P_0$ pour tout α .

En regroupant les termes nous pouvons écrire

$$(2.6) \quad P(\xi) = P_0(\xi') + \sum_{j=1}^e P_j(\xi'') \xi'^{\alpha_j}$$

DÉFINITION 2.2. Nous dirons qu'un opérateur partiellement hypoelliptique en ξ' est partiellement semi-elliptique en ξ' si, en (2.5), $P_0(\xi')$ est un polynôme semi-elliptique.

Soit $\xi^1 = (\xi_1, \dots, \xi_{m-1})$.

PROPOSITION 1. Si $P(D)$ est partiellement semi-elliptique en ξ' , il est aussi partiellement semi-elliptique en ξ^1 .

DÉMONSTRATION. $P(D)$ étant partiellement hypoelliptique en ξ' , il est aussi partiellement hypoelliptique en ξ^1 . Donc

$$(2.7) \quad P(\xi) = P'_0(\xi^1) + \sum_{\alpha' \neq 0} P'_{\alpha'}(\xi^1) \xi_m^{\alpha'_m} \dots \xi_n^{\alpha'_n}$$

où $P'_\alpha \ll P'_0$. Mais $P'_0(\xi^1) = P_0(\xi_1, \dots, \xi_{m-1}, 0)$ qui est semi-elliptique (les nombres à l'aide desquels on peut lui appliquer la définition (2.1) sont p_1, \dots, p_{m-1}); d'où la proposition énoncée.

Nous démontrerons le théorème suivant :

THÉORÈME 1. Soit $P(D)$ un opérateur partiellement semi-elliptique en ξ' . Supposons que les nombres p_1^0, \dots, p_m^0 qui entrent dans la définition de P_0 sont, en ordre croissant $p_1^0 \leq p_2^0 \leq \dots \leq p_m^0$.

Alors on a

$$(2.8) \quad |x^{1r}|^a + |x_r| \leq C(1 + |y^{1r}| + |z_{r+1}|^{p_{r+1}^0/p_r^0} + \dots + |z_m|^{p_m^0/p_r^0} + |z''|^{p_0 p_1^0/p_r^0}) \quad (\forall) z \in N(P) = \{z \in C^n, P(z) = 0\}$$

p_0 étant donné par

$$(2.9) \quad p_0 = \max_{1 \leq j \leq l} \frac{p_j}{p_1^0(1 - \alpha_1^j/p_1^0 - \dots - \alpha_m^j/p_m^0)}$$

où $p_j = \deg P_j$ (de 2.6), et z' est la variable duale de ξ' , z'' celle de ξ'' , $x' = \text{Re}z'$, $y' = \text{Im}z'$, $x^{1r} = (x_1, \dots, x_{r-1})$, $y^{1r} = (y_1, \dots, y_{r-1})$ avec $1 \leq r \leq m$, $a = p_1^0/p_r^0$ et C une constante positive.

DÉMONSTRATION. Soit.

$$N^{1r} = \{z \in N(P), |x_1|^{p_1^0/p_m^0} + \dots + |x_{r-1}|^{p_{r-1}^0/p_r^0} + |x_r| \leq C(1 + |y^{1r}|)$$

où C est une constante suffisamment grande pour que (2.4) soit satisfaite. Nous mettrons $N''r = N - N^{1r}$.

Si $z \in N^{1r}$, l'inégalité (2.8) est satisfaite parce que $p_j^0 \geq p_1^0$ pour tout $j = 1, \dots, r-1$.

Le polynôme $P(\xi)$ étant partiellement semi-elliptique en ξ' et partiellement semi-elliptique en ξ^{1r} , on a

$$(2.10) \quad P(\xi) = P_0^r(\xi^{1r}) + \sum_{\alpha \neq 0} P_\alpha^r(\xi^{1r})(\xi''r)$$

où $\xi''r = (\xi_{r+1}, \dots, \xi_n)$.

Soit $z \in N''r$; nous avons

$$(2.11) \quad |x_1|^{p_1^0/p_r^0} + \dots + |x_{r-1}|^{p_{r-1}^0/p_r^0} + |x_r| > C(1 + |y^{1r}|)$$

d'où, en tenant compte de (2.3), nous avons encore

$$(2.12) \quad |P_0(x^{1r} + y^{1r})| \geq C|P_0(x^{1r})|$$

En regroupant les termes de (2.10) on obtient

$$(2.13) \quad P(\xi) = P_0^r(\xi^{1r}) + P'(\xi') + \sum_{j'=1}^l P_{j'}(\xi'') \xi'^{aj}$$

où $P'(\xi')$ est le groupe des termes de $P_0(\xi')$ qui n'entrent pas dans $P_0^r(\xi^{1r})$, et P_j n'ont pas de termes libres.

De (2.3), 2.12) et (2.13) on déduit

$$(2.14) \quad |x_1|^{p_1^0} + \dots + |x_r|^{p_r^0} \leq C_1 |P'(z')| + C_2 \sum_{j=1}^l |P_j(z'')| |z'^{aj}| + C_3$$

Soit un terme quelconque du polynôme $P'(z')$. Il sera de la forme

$$(2.15) \quad a_\alpha z_1^{\alpha_1} \dots z_r^{\alpha_r} z_{r+1}^{\alpha_{r+1}} \dots z_m^{\alpha_m}$$

où α a la propriété qu'il existe au moins α_i , où $r + 1 \leq i \leq m$, tel que $\alpha_i \neq 0$ (sinon, le terme considéré aurait appartenu à $P_0^r(\xi^{1r})$). En utilisant la condition de semi-ellipticité $|\alpha : p^0| \leq 1$ et l'inégalité de Hölder, nous obtenons :

$$(2.16) \quad |a_\alpha z_1^{\alpha_1} \dots z_m^{\alpha_m}| \leq C_4 \varepsilon (|z_1|^{p_1^0} + \dots + |z_r|^{p_r^0}) + C_5(\varepsilon) (|z_{r+1}|^{p_{r+1}^0} + \dots + |z_m|^{p_m^0})$$

où ε est un nombre positif arbitraire et $C_1(\varepsilon)$ est une fonction bornée pour $\varepsilon > \varepsilon_1 > 0$ (ε_1 est fixé arbitrairement).

En majorant de la même manière tous les termes du polynôme $P'(z')$. on obtient

$$(2.17) \quad |P'(z')| \leq C_6 \varepsilon (|z_1|^{p_1^0} + \dots + |z_r|^{p_r^0}) + C_7(\varepsilon) (|z_{r+1}|^{p_{r+1}^0} + \dots + |z_m|^{p_m^0})$$

où $C_7(\varepsilon)$ a la même propriété que $C_5(\varepsilon)$.

Soit $|P_j(z'')| |z'^{aj}|$ un des termes de la somme du membre droit de l'inégalité (2.14) et soit $a z_{m+1}^{\alpha_{m+1}} \dots z_n^{\alpha_n}$ un des termes de P_j ayant le degré maximum. Pour obtenir une majoration du module de ce terme nous rappellerons la définition suivante (Friberg (4), (5)). Soit $P(\xi) = \sum_{\alpha} a_\alpha \xi^\alpha$ un polynôme quelconque. L'ensemble de mul-

tiindices $a \in N^n$ pour lesquels $a_\alpha \neq 0$ sera noté par (P) . L'enveloppe convexe dans R^n de l'ensemble $(P) \cup \{0\}$ sera noté par $(P)^*$. Le polyèdre de Newton associé au polynôme P est par définition $F(P) = \cup F^i$ de toutes les faces à $(n-1)$ dimensions du polyèdre $(P)^*$, qui ne sont contenues dans aucun hyperplan de coordonnées.

Dans (7) Volevitch et Guindikine démontrent un résultat duquel on déduit.

LEMME 1. Soit $R(\xi)$ un polynôme semielliptique et Q un polynôme tel que $Q \ll R$. Alors $(Q)^* \subset (R)^*$ et $F(Q) \cap F(R) = \emptyset$.

De ce lemme il résulte, en tenant compte que $P_\alpha \ll P_0$

$$(2.18) \quad \alpha_1^j/p_1^0 + \alpha_2^j/p_2^0 + \dots + \alpha_m^j/p_m^0 < 1$$

Nous avons :

$$|a z_{m+1}^{\alpha_{m+1}^j} \dots z_n^{\alpha_n^j} \cdot |z'^{\alpha j}| \leq C_5 \varepsilon |z_1|^{p_1^0} \dots |z_m|^{p_m^0} \cdot |z''|^{p_j} / \varepsilon$$

En appliquant l'inégalité de Hölder et (2.18) nous obtenons :

$$(2.19) \quad \sum_{j=1}^l |P_j(z'')| |z'^{\alpha j}| \leq C_8 \varepsilon (|z_1|^{p_1^0} + \dots + |z_m|^{p_m^0}) + C_9(\varepsilon) |z''|^{p_0 p_1^0}$$

où C_8 est une constante et $C_9(\varepsilon)$ a la même propriété que $C_5(\varepsilon)$ et $C_7(\varepsilon)$.

Maintenant, de (2.14), (2.17) et (2.18) et choisissant ε tel que $(C_6 + C_8) \varepsilon = 1/2$, il résulte que

$$(2.20) \quad |x_{1^1}^{p_1}| + \dots + |x_r|^{p_r^0} \leq C' (1 + |y''|^{p_r^0} + |z_{r+1}|^{p_{r+1}^0} + \dots + |z_m|^{p_m^0} + |z''|^{p_0 p_1^0}).$$

Le théorème est ainsi démontré.

3. - L'extension du théorème d'unicité de Palamodov pour les opérateurs partiellement semi-elliptiques.

Nous utiliserons les notations suivantes (Palamodov (9)) :

— (3.1) $I(\xi) = \exp(A |\xi|^\delta)$, où $A > 0$ et $\delta > 1$ sont des constantes ;

— $\|\varphi\|_I^q$ et $\|\varphi\|_I^q - 1$ les normes dans $\mathfrak{D}(R)$ suivantes

$$(3.2) \quad \|\varphi\|_I^q = \sum_{|\alpha| \leq q} \|I(\xi) D^\alpha \varphi\|_{L_2} \quad \text{et}$$

$$(3.3) \quad \|\varphi\|_I^q - 1 = \sum_{|\alpha| \leq q} \left\| \frac{D^\alpha \varphi}{I(\xi)} \right\|_{L_2} \quad \text{où } q \text{ est un entier positif,}$$

— \mathcal{S}_I^q et \mathcal{G}_I^q les espaces obtenus en complétant $\mathfrak{D}(R)$ avec les normes $\|\varphi\|_I^q$ et, respectivement $\|\varphi\|_I^q - 1$. Si q est un entier négatif, \mathcal{S}_I^q sera le dual de \mathcal{G}_I^{-q} et \mathcal{G}_I^q celui de \mathcal{S}_I^{-q} .

Soit aussi $\xi^1 = (\xi_1, \dots, \xi_{m-1})$, $\xi^2 = (\xi_{m+1}, \dots, \xi_{m+k_2})$,
 $\xi^3 = (\xi_{m+k_2+1}, \dots, \xi_{m+k_3}), \dots$, $\xi^t = (\xi_{m+k_{t-1}+1}, \dots, \xi_n)$ tel que $\xi'' = (\xi^2, \dots, \xi^t)$ et soit $L_1 = (0, \dots, 0, \xi_m, \xi_{m+1}, \dots, \xi_n)$.

Soit $A^1, A^m, A_2, \dots, A_t$ des constantes positives quelconques et q un nombre entier quelconque. Nous noterons

$$(3.4) \quad I(\xi) = I^1(\xi^1) I^m(\xi_m) I^{n^2}(\xi^2) \dots I^{nt}(\xi^t)$$

où

$$I^1(\xi^1) = \exp(A^1 |\xi^1|^{1/(1-\gamma)})$$

$$I^m(\xi_m) = \exp(A^m |\xi_m|^{1/(1-\gamma)})$$

$$I^j(\xi^j) = \exp(A_j |\xi^j|^{1/(1-\beta_j)}) \quad \text{pour } 2 \leq j \leq t$$

Nous pouvons maintenant énoncer une variante du théorème de Palamodov, qui sera utilisé dans ce qui suit. Puisque la démonstration de ce théorème suit la même voie que celle du théorème de Palamodov, nous exposerons brièvement cette démonstration en relevant seulement les modifications par rapport à cette dernière.

THÉORÈME 2. S'il existe $0 < \gamma, \beta_2, \dots, \beta_t < 1$ et $a > 0, C > 0$ tel que l'inégalité

$$(3.6) \quad |x^1|^a + |x_m| \leq C(1 + |y'|^{1/\gamma} + |z^2|^{1/\beta_2} + \dots + |z^t|^{1/\beta_t}) \quad (\forall) z \in N(P)$$

soit satisfaite, alors toute solution de distribution de l'équation $P(D) u = 0$ qui s'annule avec toutes ses dérivées par rapport à ξ' qui appartient à l'espace \mathcal{G}_I^q , s'annule, ainsi que toutes ses dérivées, sur L_1 .

DÉMONSTRATION. Notons pas

$$\begin{aligned} I'(\xi') &= I^1(\xi^1) \cdot I^m(\xi^m) & \check{I}'(\xi') &= I'((1 + \varepsilon) \xi') \\ I''(\xi'') &= I^2(\xi^2) \dots I^t(\xi^t) & I''(\xi'') &= I''((1 + \varepsilon) \xi'') \end{aligned}$$

et par deux fonctions arbitraires φ et ψ respectivement de $S_{I'}^{q'}$ et $S_{I''}^{q''}$ où q' , q'' sont arbitraires.

En utilisant le théorème de la représentation exponentielle des solutions et la condition (3.6) on obtient (cf. Palamodov (9), formule (8.6) ch. VI) :

$$\begin{aligned} (3.7) \quad |(u, \varphi \psi)| &\leq C_1 \|\varphi\|_{I'}^{q'} \|\psi\|_{I''}^{q''} \sup_{N(P)} \frac{(|z'| + 1)^{-q'} (|z''| + 1)^{-q''}}{(|z| + 1)^{q-B}} \times \\ &\times \frac{\exp \left[(a' + \varepsilon') |y'|^{\frac{1}{\gamma}} + \sum_{i=2}^t (a_i + \varepsilon_i'') |y^i|^{\frac{1}{\beta_i}} \right]}{\exp \left[(a^1 + \delta') |y'|^{\frac{1}{\gamma}} + \sum_{i=2}^t (a_i + \delta_i) |y^i|^{\frac{1}{\beta_i}} \right]} \leq \\ &\leq C_2 \|\varphi\|_{I'}^{q'} \|\psi\|_{I''}^{q''} \sup_{N(P)} (|z''| + 1)^{-q''+B-q+\frac{1}{\beta}} \left(-\frac{q'}{a} - q' + \frac{B-q}{a} + B-q \right) \end{aligned}$$

où nous avons mis $1/\beta = 1/\beta_2 + 1/\beta_3 + \dots + 1/\beta_t$. Prenons q' entier et arbitraire et q'' le plus petit entier qui satisfait l'inégalité

$$(3.8) \quad q'' \geq -q + B + 1/\beta (-q'/a - q' + (B - q)/a + B - q)$$

De (3.7) nous obtenons ainsi

$$(3.9) \quad |(u, \varphi \times \psi)| \leq C_3 \|\varphi\|_{I'}^{q'} \|\psi\|_{I''}^{q''}$$

Soit $\eta_m \in R^1$ arbitraire et j un nombre entier, également arbitraire. Soit $\eta' = (0, \dots, 0, \eta_m) \in R^m$. En substituant $\varphi = \delta^j(\xi' - \eta')$ (où δ^j est la dérivée d'ordre j de la mesure Dirac) de la formule de

représentation exponentielle des solutions et en supposant, pour l'instant que l'inégalité

$$(3.10) \quad |\tilde{\psi}(z'')| \leq C_4 \exp(-\delta'' \sum_{i=2}^t |x^i|^{1/\beta_i} + \delta'' \sum_{i=2}^t |y^i|^{1/\beta_i}),$$

est satisfaite, où $\tilde{\psi}$ est la transformée Fourier de ψ et δ'' un nombre positif quelconque, nous obtenons :

$$(3.11) \quad |D_{\xi'}^j(u, \psi)_{\xi''} |_{\xi^1=0} \leq C_5 \sup_{N(P)} (|z| + 1)^{B-q} (|z_m| + |z| + 1)^j \exp[|y_m||\eta_m| - (a^1 + \delta') |y'|^{1/\nu} - \delta'' \sum_{i=2}^t (a_i + \delta_i - \delta'') |y^i|^{1/\beta_i}]$$

où $((f, \psi)_{\xi''}, \varphi) = (f, \varphi \times \psi)$.

En utilisant de nouveau (3.6) et en prenant $\delta'' \leq \delta_i$ ($i = 2, \dots, t$) nous obtenons

$$(3.12) \quad |D_{\xi_m}^j(u, \psi)_{\xi'} |_{\xi^1=0} \leq C_6 \sup_{\xi_m=\eta_m} (|z| + 1)^{B-q} (|z_m| + |z''| + 1)^j \exp(-\delta'_1 |z^1|^a - \delta'_2 |z_m| - \delta'_3 |z''|)$$

où $\delta'_1, \delta'_2, \delta'_3$ sont des constantes positives.

De (3.12) il résulte (cf. (9)) que $(u, \psi)_{\xi''/L_1} = 0$ pour toute fonction ψ satisfaisant (3.10). On termine la démonstration du théorème en éliminant la condition supplémentaire (3.10), exactement de la même manière que dans (9).

Nous donnerons maintenant un théorème d'unicité du problème de Cauchy pour les opérateurs partiellement semi-elliptiques en ξ' .

THÉORÈME 3. Soit $P(D)$ un opérateur partiellement semi-elliptique en ξ' , sa partie semi-elliptique étant définie par les nombres $p_1^0 \leq p_2^0 \leq \dots \leq p_m^0$. Si p_0 (donné par (2.9)) est tel que $p_0 > 1$, toute solution de distribution de l'équation $P(D)u = 0$ qui s'annule avec toutes ses dérivées sur L et qui appartient à l'espace $\mathcal{G}_I^{q,*}$, est identiquement nulle.

Nous avons noté ci-dessus par q un nombre entier quelconque et par I^*

$$(3.13) \quad I^* = I^*(\xi) = I'_1(\xi_1) \cdot I'_2(\xi_2) \dots I'_m(\xi_m) \cdot I''(\xi'')$$

où

$$(3.14) \quad I_i(\xi_i) = \exp(A_i |\xi_i|^{1/(1-b_i)})$$

$$(3.15) \quad I'_i(\xi_i) = \begin{cases} \exp(A_i |\xi_i|^{1/(1-b_i)}) & \text{si } p_i^0 = p_1^0 \\ \exp(A_i |\xi_i|^{p_i^0/(p_i^0-p_1^0)}) & \text{si } p_i^0 \neq p_1^0 \end{cases}$$

pour $i = 2, \dots, m$ et

$$(3.16) \quad I''(\xi'') = \exp(A'' |\xi''|^{p_0/(p_0-1)})$$

A_1, \dots, A_m, A'' sont des constantes positives et b_i des nombres arbitraires tels que $0 < b_i < 1$, $i = 1, 2, \dots, m$.

DÉMONSTRATION. Nous procéderons par récurrence. Posons $r = m$ dans le théorème 1. Du (2.8) il résulte :

$$(3.17) \quad |x^1|^a + |x_m| \leq C(1 + y' + |z''|^{p_0 p_1^0/p_1^0}) \quad (\forall) z \in N(P)$$

L'inégalité (3.6) est donc vérifiée sur $N(P)$ avec $a = p_1^0/p_m^0$, γ un nombre arbitraire tel que $0 < \gamma < 1$, $k_2 = n - m$, $z^2 = z''$ et

$$\beta_2 = \begin{cases} p_m^0/p_0 p_1^0 & \text{si } p_0 p_1^0/p_m^0 > 1 \\ \text{un nombre arbitraire appartenant à l'intervalle } (0,1) & \text{si } p_0 p_1^0/p_m^0 \leq 1 \end{cases}$$

Choisissons tel que

$$1 > \gamma \geq \begin{cases} \max b_i & \text{si } p_i^0 = p_1^0 \\ \max p_1^0/p_i^0 & \text{si } p_i^0 > p_1^0 \end{cases}$$

et, si $p_0 p_1^0/p_m^0 \leq 1$, nous choisissons aussi β_2 tel que $1 > \beta_2 \geq 1/p_0$.
Nous avons maintenant :

$$I'_1(\xi_1) I'_2(\xi_2) \dots I'_m(\xi_m) \leq I^1(\xi^1) \dots I^m(\xi^m)$$

$$I''(\xi'') \leq I''^j(\xi^j)$$

d'où

$$(3.18) \quad I^*(\xi) \leq I(\xi)$$

De (3.18) il résulte que $\mathcal{G}_I^q \subset \mathcal{G}_I^q$ ce qui entraîne que notre solution est $u \in \mathcal{G}_I^q$. Les conditions du théorème 2 sont donc satisfaites, d'où la conclusion que $D^i_{\xi^1} u|_{L_1} = 0$, pour tout i .

Supposons que $D^i_{\xi^{1r}} u|_{L_{m-r}} = 0$ où L_{m-r} est le sous-espace linéaire de \mathbb{R}^n dont les points ont les coordonnées $(0, \dots, 0, \xi_{r+1}, \dots, \xi_n)$

Posons dans le théorème 2 : $x^1 = x^{1r}$, $x_m = x_r$, $z^2 = z_{r+1}$, $z^3 = z_{r+2}$, \dots , $z^{m-r+1} = z_m$, $z^{m-r-2} = z''$ et

$$\beta_2 = p_r^0/p_{r+1}^0, \beta_3 = p_r^0/p_{r+2}^0, \dots, \beta_{m-(r-1)} = p_r^0/p_m^0,$$

$$\beta_{m-r} \left\{ \begin{array}{l} = p_0^r/p_0 p_1^0 \quad \text{si} \quad p_0 p_1^0/p_r^0 > 1 \\ \text{un nombre arbitraire appartenant à } (0,1) \quad \text{si} \quad p_1^0 p_0/p_r^0 \leq 1 \end{array} \right.$$

$a = p_1^0/p_r^0$ et γ un nombre arbitraire appartenant à $(0, 1)$.

Si nous choisissons γ et β_{m-r} de la même manière que plus haut, nous arrivons dans ce cas aussi à (3.18). Du théorème 2 il résulte que $D^i_{\xi^{1r}} u|_{L_{m-r+1}} = 0$ où L_{m-r+1} est l'espace des points $(0, \dots, 0, \xi_r, \dots, \xi_n)$. Le théorème est ainsi démontré.

COROLLAIRE 1. Toute solution indéfiniment différentiable qui s'annule sur L , ainsi que toutes ses dérivées par rapport à ξ' , et qui satisfait l'inégalité

$$(3.20) \quad |u(\xi)| \leq C \exp[A(|\xi_1|^{b_1} + |\xi_2|^{p_2^0/(p_2^0-p_1^0)} + \dots + |\xi_m|^{p_m^0/(p_m^0-p_1^0)} + |\xi''|^{p_0/(p_0-1)})]$$

où $b_1 > 1$, est identiquement nulle.

4 - Théorème de non-unicité du problème de Cauchy pour opérateurs partiellement semi-elliptiques.

Dans ce paragraphe nous montrerons que le théorème 3 est le meilleur au sens de Thichonov-Täklind. C'est-à-dire nous démontrerons les théorèmes suivants :

THÉORÈME 4. Etant donné un $\varepsilon > 0$, il existe une solution de l'équation partiellement semi-elliptique $P(D) u = 0$ appartenant à C^∞ et s'annulant avec toutes ses dérivées par rapport à ξ' sur L , qui satisfait l'inégalité

$$(4.1) \quad |u(\xi)| \leq C \exp [A(|\xi_1| + |\xi_k|^{p_k^0/(p_k^0-p_1^0)+\varepsilon})], \quad 2 \leq k \leq m$$

où k est tel que $p_1^0 < p_k^0$,

mais qui n'est pas identiquement nulle.

THÉORÈME 5. Etant donné un $\varepsilon > 0$, il existe une solution non-nulle de l'équation partiellement semi-elliptique $P(D) u = 0$ appartenant à C^∞ et s'annulant avec toutes ses dérivées par rapport à ξ' , sur L , et qui satisfait l'inégalité

$$(4.2) \quad |u(\xi)| \leq C \exp [A(|\xi_1| + |\xi_2|^{p_2^0/(p_2^0-p_1^0)} + \dots + |\xi_m|^{p_m^0/(p_m^0-p_1^0)} + |\xi''|^{p_0^0/(p_0^0-1)+\varepsilon})]$$

si $p_1^0 < p_2^0$ (s' il existe des i pour lesquels $p_1^0 = p_i^0$, les exposants de ces $|\xi_i|$ dans (4.2) doivent être remplacés par 1), mais qui n'est pas identiquement nulle.

A et C sont des constantes positives et on a supposé $p_0 > 1$.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 4. On démontre le théorème exactement de la même manière que le théorème 4 de (11).

Avant de démontrer le théorème 5, nous rappellerons les résultats suivants :

LEMME 2 (Zolotareff (10)). Soit l'équation

$$(4.3) \quad \lambda^n + P_1(s) \lambda^{n-1} + \dots + P_{n-1}(s) \lambda + P_n(s) = 0$$

où $P_j(s)$ sont des polynôme de degrés M_j . Notons par $M = \max M_j$, par p_r — l'ordre de croissance de la racine $\lambda_r(s)$, $1/q_t$ — l'ordre de croissance de la racine $s_t(\lambda)$ et, finalement, par $p' = \max_{1 \leq r \leq n} p_r$, $1/q' = \min_{1 \leq t \leq M} 1/q_t$. Alors on a

$$(4.4) \quad p' = q'.$$

FORMULE DE BOROK [1]. Soit $P(\xi)$ un polynôme de la forme

$$(4.5) \quad \xi_1^0 + \sum_{j=1}^p P_j(\xi'') \xi_1^{p-j} \quad \text{où } p = \deg P$$

et soit

$$(4.6) \quad p_0 = \max_{1 \leq j \leq p} \deg P_j/j$$

Alors l'inégalité

$$(4.7) \quad |z_1| \leq C (|z''|^{p_0} + 1)$$

est satisfaite pour tout $z \in N(P)$ et p_0 est le plus petit nombre pour lequel (4.7) est vérifié (on dit que p_0 est « l'ordre réduit » de l'équation $P(\xi) = 0$).

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 5. Supposons $p_1^0 < p_2^0$. Notons pour chaque j :

$$(4.8) \quad \alpha_j = \alpha_2^j/p_2^0 + \alpha_3^j/p_3^0 + \dots + \alpha_m^j/p_m^0$$

$$(4.9) \quad A_j = p_1^0 |\alpha^j : p_0|.$$

Parmi tous les polynômes $P_j(\xi'')$ pour lesquels l'égalité

$$(4.10) \quad p_0 = \frac{p_j}{p_1^0(1 - \alpha_1^j/p_1^0 - \dots - \alpha_m^j/p_m^0)} = p_j/(p_1^0 - A_j)$$

est satisfaite, choisissons seulement ceux pour lesquels on a p_j/α_j maximum. Parmi ces polynômes, choisissons ceux pour lesquels le degré p_j est maximum. Soit $P_{j_1}(\xi''), \dots, P_{j_k}(\xi'')$ l'ensemble ainsi défini. Evidemment on a $p_{j_1} = p_{j_2} = \dots = p_{j_k}$. Soit

$$(4.11) \quad S(\xi) = P_{j_1}(\xi'') \xi'^{d_1} + \dots + P_{j_k}(\xi'') \xi'^{d_k}$$

Choisissons un $a \in R^m$ tel que $\deg S(a, \xi'') = p_{j_1}$, et un $\xi^0 \in R^{n-m}$ tel que $\deg S(a, v, \xi^0) = p_{j_1}$.

Notons par

$$(4.12) \quad J = \{j \in [1, l], j \text{ étant un nombre entier et} \\ 0 < (A_{j_1} - A_j)/(a_{j_1} - a_j) < \infty \}$$

Soit δ un nombre rationnel et strictement positif satisfaisant les conditions :

$$(4.13) \quad \delta < p_1$$

$$(4.14) \quad \delta < \min_{j \in J} (A_{j_1} - A_j)/(a_{j_1} - a_j)$$

et tel que pour tout indice j , $j \in [1, l]$ pour lequel $p_j/(p_1^0 - A_j) < p_0 = p_{j_1}/(p_1^0 - A_{j_1})$ on a

$$(4.15) \quad p_j/(p_1^0 - A_j + \delta a_j) \leq p_{j_1}/(p_1^0 - A_{j_1} + \delta a_{j_1}).$$

Considérons maintenant l'équation

$$(4.16) \quad P(a_1 s, a_2 s^{(p_1^0 - \delta)/p_2^0}, \dots, a_m s^{(p_1^0 - \delta)/p_m^0}, v \xi_{m+1}^0, \dots, v \xi_n^0) = 0$$

qui, en appliquant (2.8), s'écrit aussi

$$(4.17) \quad P_0(a_1 s, a_2 s^{(p_1^0 - \delta)/p_2^0}, \dots, a_m s^{(p_1^0 - \delta)/p_m^0}) + \sum_{j=1}^l P_j(v \xi^0) \alpha^{x_j} s^{A_j - \delta a_j}$$

Soit d tel que les nombres

$$(4.18) \quad ((p_1^0 - \delta)/p_2^0) \cdot d, ((p_1^0 - \delta)/p_3^0) \cdot d, \dots, ((p_1^0 - \delta)/p_m^0) \cdot d$$

soient tous des nombres entiers. En faisant dans (4.17) le changement de variable $s = \lambda^d$, nous obtenons

$$(4.19) \quad P_0(a_1 \lambda^d, a_2 \lambda^{((p_1^0 - \delta)/p_2^0)d}, \dots, a_m \lambda^{((p_1^0 - \delta)/p_m^0)d}) + \\ + \sum_{j=1}^l P_j(v \xi^0) \alpha^{x_j} \lambda^{d(A_j - \delta a_j)} = 0$$

Pour déterminer la solution $v(\lambda)$ ayant le plus petit ordre de croissance, nous devons, conformément au Lemme 2, déterminer d'abord la solution $\lambda(v)$ ayant l'ordre de croissance le plus grand. Mais, cet ordre maximum est « l'ordre réduit » même que nous pouvons calculer à l'aide de la formule de Borck.

Soit un terme quelconque du premier membre de l'équation (4.19). Il sera de la forme

$$(4.20) \quad \alpha_\alpha \alpha_1^{\alpha_1} \alpha_2^{\alpha_2} \dots \alpha_n^{\alpha_n} \lambda^{\alpha_1 d} \lambda^{((p_1^0 - \delta)/p_2^0) d \alpha_2} \dots \lambda^{((p_1^0 - \delta)/p_m^0) d \alpha_m}$$

où α a la propriété

$$(4.21) \quad \alpha_1/p_1^0 + \alpha_2/p_2^0 + \dots + \alpha_m/p_m^0 \leq 1.$$

De (4.20) et (4.21) l'on voit que la puissance maximum de λ dans le premier terme de l'équation sera obtenué lorsque $\alpha_2/p_2^0 + \dots + \alpha_m/p_m^0 = 0$ et $\alpha_1/p_1^0 = 1$. Par conséquent la puissance maximum de λ en P_0 est $d p_1^0$.

Vu la relation $P_\alpha \ll P_0$, en utilisant (2.18), il résulte que dans (2.8), les α_j ont la propriété

$$(4.22) \quad \alpha_1^j/p_1^0 + \dots + \alpha_m^j/p_m^0 < 1.$$

De (4.22) il résulte que dans les termes de 1 à l de l'équation (4.20) les puissances de λ sont plus petites que $d p_1^0$.

Dans l'équation (4.20) on a aussi le terme

$$(4.23) \quad S(\alpha_1 \lambda^d, \alpha_2 \lambda^{((p_1^0 - \delta)/p_2^0) d}, \dots, \alpha_m^{((p_1^0 - \delta)/p_m^0) d}, v \xi^0) = \\ = \lambda^{d(A_{j_1} - a_{j_1})} S(\alpha_1 v \xi^0).$$

Nous montrerons que dans l'équation il n'apparaît aucun autre terme avec lequel le terme (4.23) pourrait se réduire.

En fait, soit un monôme quelconque de l'équation qui ne figure pas dans S :

$$(4.24) \quad b \xi^{\alpha i} \xi^{\beta j} = b \alpha^{\alpha i} \xi_0^{\beta j} s^{d(A_j - \delta a_j)} v^{|\beta j|}.$$

Pour que ce monôme et le terme de degré p_j en v de S se réduisent, il faudrait que

$$(4.25) \quad A_j - \delta a_j = A_{j_1} - \delta a_{j_1}.$$

Si $j \in J$, (4.25) ne peut pas être vraie à cause de (4.14).

Si $j \notin J$, il y a deux possibilités :

a) $a_j = a_{j_1}$; dans ce cas, de (4.25) il résulte $A_j = A_{j_1}$. Mais $p_j/(p_1^0 - A_j) \leq p_{j_1}/(p_1^0 - A_{j_1})$ entraîne $p_j \leq p_{j_1}$ (p_j étant le degré du polynôme P_j auquel appartient le monôme (4.24); d'où $|\beta^j| \leq p_j$).

Si $|\beta^j| = p_{j_1}$ alors $p_j = p_{j_1}$ et $p_j/a_j = p_{j_1}/a_j$, donc P_j figurerait en S ce qui contredit (4.24).

Si $|\beta^j| < p_{j_1}$, (4.23) pourrait se réduire, tout au plus avec un monôme de S dont la puissance en v est strictement plus petite que p_{j_1} .

b) $a_j \neq a_{j_1}$; mais puisque $j \notin J$, nous avons $(A_{j_1} - A_j)/(a_{j_1} - a_j) < 0$ et donc, d'après (4.25), $\delta < 0$. Ce qui est impossible.

Par conséquent, le terme (4.23) figure effectivement en (4.19).

En appliquant maintenant la formule de Borok, nous montrons que « l'ordre réduit » de l'équation (4.19) est

$$(4.26) \quad p'_0 = \frac{p_{j_1}}{d(p_1^0 - A_j + \delta a_j)}.$$

Pour ceci, considérons de nouveau le monôme (4.24). Nous montrerons que

$$(4.27) \quad \frac{p_j}{p_1^0 - A_j + \delta a_j} \leq \frac{p_{j_1}}{p_1^0 - A_{j_1} + \delta a_{j_1}}.$$

Mais $p_j/(p_1^0 - A_j) \leq p_{j_1}/(p_1^0 - A_{j_1})$.

Si on a $p_j/(p_1^0 - A_j) = p_{j_1}/(p_1^0 - A_{j_1})$ il résulte (moyennant le choix de P_{j_1}) $p_{j_1}/a_{j_1} \geq p_j/a_j$ et on a donc (4.27).

Si $p_j/(p_1^0 - A_j) < p_{j_1}/(p_1^0 - A_{j_1})$, d'après (4.15) on a (4.27).

Du Lemme 2 il résulte qu'il existe une solution analytique $v(\lambda)$ de cette équation telle que

$$(4.28) \quad |v(\lambda)| \leq C |\lambda|^{\frac{1}{\delta p'_0}}$$

lorsque $|\lambda|$ est suffisamment grand. Par conséquent il existe une solution analytique de cette équation telle que

$$(4.29) \quad |v(s)| \leq C |s|^{1/\delta p'_0}$$

lorsque $|s|$ est suffisamment grand.

Soit $\varepsilon > 0$ arbitraire. De $p_0 > 1$ on a

$$0 < \frac{p_0 + \varepsilon(p_0 - 1)}{p_0 [1 + \varepsilon(p_0 - 1)]} < 1.$$

Posons $\delta_1 = p_0 - p'_0 d$. D'après (4.25) l'on voit que $\delta_1 \rightarrow 0$ lorsque $\delta \rightarrow 0$. On peut donc choisir δ tel que

$$(4.30) \quad 0 < \delta_2 = \frac{p_0 + \varepsilon(p_0 - 1)}{(p_0 - \delta_1) [1 + \varepsilon(p_0 - 1)]} < 1.$$

Soit également un nombre ϱ tel que

$$(4.31) \quad \max\left(\delta_2, 1 - \frac{\delta}{p_1^0}\right) < \varrho < 1.$$

Maintenant on peut construire la « solution nulle » (Hörmander [8]) de l'équation $P(D)u = 0$

$$(4.32) \quad u(\xi) = \int_{i\tau+\infty}^{i\tau-\infty} \exp \{i[a_1 \xi_1 s + a_2 \xi_2 s^{(p_1^0-\delta)/p_2^0} + \dots \\ \dots + a_m \xi_m s^{(p_1^0-\delta)/p_m^0} + v(s) (\xi'', \xi^0) e^{-(s/i)e} ds$$

où τ est suffisamment grand.

Conformément à [8] pag. 122, il résulte que u satisfait toutes les hypothèses du théorème, sauf (4.2). Pour démontrer cette inégalité nous utiliserons l'inégalité

$$(4.33) \quad \operatorname{Re} \{ i[a_1 \xi_1 s + a_2 \xi_2 s^{(p_1^0-\delta)/p_2^0} + \dots + a_m \xi_m s^{(p_1^0-\delta)/p_m^0} + \\ + v(s) (\xi'', \xi^0)] - (s/i)e \} \leq -\tau \xi_1 a_1 + C_1(|\xi_2|(s)p_1^0)^{\delta/p_1^0} + \dots + \\ + |\xi_m|s|^{(p_1^0-\delta)/p_m^0} + |\xi''||_0|^{1/(p_0+\delta_1)} - |s|e \cos \frac{\pi \varrho}{2}$$

En appliquant l'inégalité de Hölder, (4.29), (4.30), (4.31), (4.32) et (4.33) on obtient (4.2).

Dans la démonstration précédente nous avons supposé $p_1^0 < p^0$.

Si $p_1^0 = p_2^0 = \dots = p_r^0$, la démonstration du théorème se fait en appliquant la même méthode, mais en partant de l'équation

$$(4.34) \quad P(a_1 s, a_2 s, \dots, a_r s, a_{r-1} s^{(p_1^0 - \delta)/p_{r+1}}, \dots, a_m s^{(p_1^0 - \delta)/p_m^0}, \\ v \xi_{m+1}^0, \dots, v \xi_n^0) = 0$$

au lieu de (4.16).

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BOROK, *Réduction de systèmes linéaires d'équations à dérivées partielles à coefficients constants à la forme canonique*, D. A. N., SSST, **115**, 1 (1957), 13-16.
- [2] F. E. BROWDER, *The saymptotic distribution of eifenfunctions and eigenvalues for semielliptic differential operators*. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., **43** (1957), 270-273.
- [3] J. FRIBERG, *Estimates for partially hypoelliptic differential operators*. Medd. f. Lunds Univ., **17**.
- [4] J. FRIBERG, *Multi quasielliptic polynomials*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, **21** (1967), 239-260.
- [5] J. FRIBERG, *Principal parts and canonical factorizations of hypoelliptic polynomials in two variables*, Rend. Sum. Mat. Univ. Padova, **37** (1967), 112-132.
- [6] L. GARDING et B. MALGRANGE, *Opérateurs différentiels partiellement hypoelliptiques et partiellement elliptiques*. Math. Scand., **9** (1961), 5-21.
- [7] S. G. GUINDIKINE et L. R. VOLEVITCH, *Sur une classe de polynômes hypoelliptiques*, Mat. Sbornik **75**, 3, (1968), 400-416.
- [8] L. HÖRMANDER, *Linear partial differential operators*, Springer, 1964.
- [9] V. P. PALAMODOV, *Opérateurs différentiels linéaires coefficients constants*, Nauka, 1967.
- [10] G. N. ZOLOTAREFF, *Sur la majoration des classes d'unicité du problème de Cauchy pour les systèmes d'équations à dérivées partielles*, Naou. dokl. rish., chkol., **2** (1958), 47-40.
- [11] O. BERECHET, *Le problème de Cauchy pour opérateurs semielliptiques*, Rev. Roum. Math. Pures et Appl., **16**, 9, (1971), 1321-1328.
- [12] O. BERECHET, *Sur les classes d'unicité du probleme de Cauchy pour l'équation $D_t u + D_x u = 0$* . Rev. Roum. Math. Pures et Appl., **17**, 4, (1972).

Manoscritto pervenuto in redazione il 21 aprile 1977.