Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova

Enrico Obrecht

Sulle equazioni paraboliche semilineari di ordine arbitrario in uno spazio di Banach

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 57 (1977), p. 231-246

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1977__57__231_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 57 (1977)

Sulle equazioni paraboliche semilineari di ordine arbitrario in uno spazio di Banach

ENRICO OBRECHT (*)

SUMMARY - We prove, extending a Pazy's result, a local existence theorem for solutions of the Cauchy problem for a parabolic semilinear differential equation of arbitrary order in Banach space.

1. - Introduzione.

Pazy [4] ha dimostrato l'esistenza locale di una soluzione classica del problema di Cauchy in uno spazio di Banach

$$\begin{cases} u' = Au + f(t,u), \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

supponendo f hölderiana in entrambi gli argomenti e A generatore infinitesimale di un semigruppo analitico e compatto.

In questo lavoro, estendiamo questi risultati a equazioni di ordine qualsiasi

$$(0) \quad u^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} A_k u^{(k)} = f\big(t, u, u', \ldots, u^{(n-1)}, B_0 u, B_1 u', \ldots, B_{n-2} u^{(n-2)}\big),$$

dove la parte lineare è parabolica (cfr. [3]) e i B_i sono dominati da opportuni A_k, in modo da garantire che la «parte principale» dell'equazione sia lineare.

(*) Indirizzo dell'A.: Istituto Matematico dell'Università, Piazza di Porta S. Donato, 5 - Bologna.

Le tecniche utilizzate sono simili a quelle di Pazy e consistono essenzialmente nel dimostrare l'esistenza di una soluzione « mild » del problema per mezzo del teorema di Schauder.

Diamo, ora, un breve riassunto del lavoro. In 2., dopo aver formulato le ipotesi e definito soluzioni classiche e « mild » del probela di Cauchy per l'equazione (0), dimostriamo che ogni soluzione classica è « mild ». In 3. dimostriamo l'esistenza locale di una soluzione « mild ». In 4., infine, dopo aver dimostrato l'esistenza di una soluzione del problema di Cauchy lineare, a complemento dei risultati di [3], proviamo che, se f è hölderiana in tutti i suoi argomenti, ogni soluzione « mild » è anche soluzione classica.

2. - Ipotesi e preliminari.

Siano $A_0, A_1, \dots, A_{n-1}$ degli operatori lineari chiusi nello spazio di Banach complesso X.

Indicato, per semplicità di scrittura, con A_n l'operatore identità in X e posto, se $\omega \in]0, \pi[$, $S_\omega = \{\lambda \in \mathbf{C} - \{0\} \,;\, |\arg \lambda| < \omega\}$, formuliamo la seguente ipotesi, che supporremo sempre verificata nel seguito.

IPOTESI I. Esistano $\theta \in]0, \pi/2[$, $M \in \mathbf{R}^+$, tali che:

$$a) \quad S_{\theta+\pi/2} \subseteq \varrho(P) = \{\lambda \in \mathbf{C} \,;\, \exists\, P^{-1}(\lambda) = (\sum_{k=0}^{n} \lambda^k A_k)^{-1} \in \mathfrak{L}(X)\},$$

dove con $\mathfrak{L}(X)$ abbiamo indicato lo spazio di Banach delle applicazioni lineari limitate da X in sè;

$$b) \quad \|A_j P^{-1}(\lambda)\| \leq M |\lambda|^{-j}, \ \forall\, \lambda \in S_{\theta+\pi/2}, \ j = 0, 1, \dots, n.$$

Sotto tale ipotesi è possibile definire gli operatori

$$U_k(t) = (2\pi i)^{-1} \int_\Gamma \lambda^k \exp(\lambda t)\, P^{-1}(\lambda)\, d\lambda, \ t \in S_{\theta'}, \ k \in I^+ \cup \{0\},$$

dove $\theta' \in]0, \theta[$ e Γ è una curva in $\mathbf{C}$ regolare a tratti e orientata che va da $(+\infty) \exp[-i(\theta' + \pi/2)]$ a $(+\infty) \exp[i(\theta' + \pi/2)]$ « passando a destra dell'origine ». Le funzioni $t \to U_k(t)$ sono analitiche in $S_{\theta'}$ a valori in $\mathfrak{L}(X)$, le loro derivate si ottengono derivando sotto al segno di integrale (si ha, quindi, $U_k^{(h)}(t) = U_{k+h}(t)$, $\forall\, k \in I^+ \cup \{0\}$, $\forall\, h \in N$ e $\forall\, t \in S_{\theta'}$) e risulta $U_k(t)\, x \in \mathfrak{D}(P) = \bigcap_{h=0}^{n-1} \mathfrak{D}(A_k)$, $\forall\, x \in X$, $\forall\, t \in S_{\theta'}$ e $\forall\, k \in I^+ \cup \{0\}$ ([3], Lemmi 1,2,3).

Per $h = -1, 0, \dots, n-1$, poniamo $X_h = \bigcap_{k=h+1}^{n} \mathfrak{D}(A_k)$ e muniamo lo spazio vettoriale X_h della norma

$$\|u\|_{X_h} = \sum_{k=h+1}^{n} \|A_k\, u\|_X \,,\; h = 0, 1, \dots, n-1.$$

In tal modo, gli X_h diventano spazi di Banach (perchè gli A_k sono chiusi) e $X_{n-1} = X$.

Siano, poi, $B_0, \dots, B_{n-2}$ degli operatori lineari chiusi in X. Nel seguito, supporremo sempre verificata l'ipotesi seguente.

Ipotesi II. *a*) $X_j \subseteq \mathfrak{D}(B_j)$, $j = 0, 1, \dots, n-2$;

b) esistano $C_0, C_1, \dots, C_{n-2} \in \mathbb{R}^+$, tali che

$$\|B_j\, x\| \le C_j\, \|x\|_{X_j} \,,\; \forall\, x \in X_j \,,\, j = 0,1, \dots, n-2.$$

Infine, siano $T \in \mathbb{R}^+$, $\Omega_0, \Omega_1, \dots, \Omega_{n-1}, W_0, W_1, \dots, W_{n-2}$ aperti di X, $f \in \mathcal{C}\big([0, T] \times (\times_{j=0}^{n-1} \Omega_j) \times (\times_{i=0}^{n-2} W_i); X\big)$, $u_0, u_1, \dots, u_{n-1} \in X$.

Definizione 1. *Chiameremo soluzione classica del problema di Cauchy*

$$(1)\begin{cases} \sum_{k=0}^{n} A_k\, u^{(k)}(t) = f\big(t, u(t), \dots, u^{(n-1)}(t), B_0\, u(t), \dots, B_{n-2}\, u^{(n-2)}(t)\big), \\ u^{(h)}(0) = u_h \,,\, h = 0, 1, \dots, n-1, \end{cases}$$

una funzione $u: [0, t_0] \to X$, *dove* $t_0 \in]\,0, T]$, *tale che*:

1) $u \in \bigcap_{h=0}^{n-1} \mathcal{C}^{(h+1)}(]0, t_0]; X_h) \cap \big(\bigcap_{h=0}^{n-1} \mathcal{C}^{(h)}([0, t_0]; X_h)\big)$;

2) $u^{(k)}(t) \in \Omega_k$, $\forall\, t \in [0, t_0]$ *e per* $k = 0, 1, \dots, n-1$;

3) $B_j u^{(j)}(t) \in W_j$, $\forall\, t \in [0, t_0]$ *e per* $j = 0, 1, \dots, n-2$;

4) $\sum_{k=0}^{n} A_k u^{(k)}(t) = f\big(t, u(t), \dots, u^{(n-1)}(t), B_0 u(t), \dots, B_{n-2} u^{(n-2)}(t)\big)$, $\forall\, t \in]0, t_0]$;

5) $u^{(h)}(0) = u_h$, $h = 0, 1, \dots, n-1$.

OSSERAZIONE. Dalla 1) e dalla 5) della definizione precedente segue che i dati iniziali devono essere assegnati in modo che $u_h \in X_h$, per $h = 0, 1, \dots, n-1$.

DEFINIZIONE 2. *Sia* $u_h \in X_h$, *per* $h = 0, 1, \dots, n-1$.

Chiameremo soluzione « mild » del problema di Cauchy (1) *una funzione* $u : [0, t_0] \to X$, *dove* $t_0 \in]0, T]$, *tale che* :

1) $u \in \bigcap_{h=0}^{n-1} \mathcal{C}^{(h)}\big([0, t_0]; X_h\big)$;

2) $u^{(k)}(t) \in \Omega_k$, $\quad \forall\, t \in [0, t_0]$ *e per* $k = 0, 1, \dots, n-1$;

3) $B_j u^{(j)}(t) \in W_j$, $\forall\, t \in [0, t_0]$ *e per* $j = 0, 1, \dots, n-2$;

4)
$$u(t) = \sum_{h=0}^{n-1} \sum_{k=h+1}^{n} U_{k-h-1}(t) A_k u_h + \int_0^t U_0(t-s) f\big(s, u(s), u'(s), \dots, u^{(n-1)}(s),$$
$$B_0 u(s), B_1 u'(s), \dots, B_{n-2} u^{(n-2)}(s)\big)\, ds, \quad \forall\, t \in [0, t_0].$$

TEOREMA 1. *Supponiamo che* $\mathfrak{D}(P)$ *sia denso in* X. *Allora, ogni soluzione classica del problema di Cauchy* (1) *è anche soluzione « mild » dello stesso problema.*

DIMOSTRAZIONE. Fissiamo $t \in]0, t_0]$ e siano $\varepsilon \in]0, t[$, $\delta \in]0, t-\varepsilon[$. Allora, se u è soluzione classica del problema (1), si ha:

$$\int_{\varepsilon}^{t-\delta} U_0(t-s)\, f\big(s,\ u(s),\ u'(s), \dots,\ u^{(n-1)}(s),\ B_0\, u(s), \dots,\ B_{n-2}\, u^{(n-2)}(s)\big)\, ds = \sum_{k=0}^{n} \int_{\varepsilon}^{t-\delta} U_0(t-s)\, A_k\, u^{(k)}(s)\, ds. \tag{2}$$

Integrando ripetutamente per parti gli integrali al secondo membro di questa uguaglianza, si ottiene:

$$\begin{aligned} &\int_{\varepsilon}^{t-\delta} U_0(t-s)\, f\big(s, u(s), \dots, u^{(n-1)}(s), B_0\, u(s), \dots, B_{n-2}\, u^{(n-2)}(s)\big)\, ds = \\ &= \int_{\varepsilon}^{t-\delta} \sum_{j=0}^{n} U_j(t-s)\, A_j u(s)\, ds + \sum_{h=0}^{n-1} \sum_{j=h+1}^{n} \big[U_h(\delta)\, A_j\, u^{(j-h-1)}(t-\delta) - \\ &\qquad - U_h(t-\varepsilon)\, A_j\, u^{(j-h-1)}(\varepsilon)\big]. \end{aligned} \tag{3}$$

L'integrale al secondo membro della (3) è uguale a zero, in quanto, $\forall\, \tau \in \mathbb{R}^+$ e $\forall\, x \in \mathfrak{D}(P)$, si ha:

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{n} U_j(\tau)\, A_j\, x &= (2\pi i)^{-1} \int_{\Gamma} \sum_{j=0}^{n} \lambda^j \exp(\lambda\tau)\, P^{-1}(\lambda)\, A_j\, x\, d\lambda = \\ &= (2\pi i)^{-1} \int_{\Gamma} \exp(\lambda\tau)\, P^{-1}(\lambda)\, P(\lambda)\, x\, d\lambda = \\ &= (2\pi i)^{-1} \int_{\Gamma} \exp(\lambda\tau)\, x\, d\lambda = 0. \end{aligned}$$

Facendo tendere δ a zero nella (3), si ottiene (cfr. [3], Lemma 6 e Corollario 3):

$$\begin{aligned} u(t) &= \sum_{h=0}^{n-1} \sum_{j=h+1}^{n} U_h(t-\varepsilon)\, A_j\, u^{(j-h-1)}(\varepsilon) + \\ &+ \int_{\varepsilon}^{t} U_0(t-s)\, f\big(s, u(s), \dots, u^{(n-1)}(s), B_0\, u(s), \dots, B_{n-2} u^{(n-2)}(s)\big)\, ds\,. \end{aligned}$$

Facendo tendere ε a zero e tenendo presente la 1) della Definizione 1, si ottiene il risultato.

3. - Esistenza di una soluzione « mild ».

Siano $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, Z uno spazio di Banach, $k \in N$.

Muniamo lo spazio vettoriale $\mathcal{C}^{(k)}([a, b]; Z)$ della norma

$$\|u\|_{\mathcal{C}^{(k)}([a, b]; Z)} = \sum_{h=0}^{k} \max_{[a,b]} \|u^{(h)}(t)\|_Z .$$

In tal modo, $\mathcal{C}^{(k)}([a, b]; Z)$ diventa uno spazio di Banach.

TEOREMA 2. *Supponiamo che*:

a) *siano soddisfatte le ipotesi I e II*;

b) $\overline{\mathfrak{D}(P)} = X$;

c) *esista* $\lambda_0 \in \varrho(P)$, *tale che* $P^{-1}(\lambda_0)$ *sia compatto come operatore da* X *a* X_0;

d) $u_h \in \mathfrak{D}(P)$, *per* $h = 0, 1, \ldots, n-2$, *e* $u_{n-1} \in X$;

e) $f \in \mathcal{C}\left([0, T] \times (\times_{j=0}^{n-1} \Omega_j) \times (\times_{i=0}^{n-2} W_i); X\right)$,

dove gli Ω_j *e i* W_i *sono aperti di* X, *tali che* $u_j \in \Omega_j$, *per* $j = 0, 1, \ldots, n-1$, e $B_i u_i \in W_i$, *per* $i = 0, 1, \ldots, n-2$.

Allora, esiste $t^* \in]0, T]$, *tale che il problema di Cauchy* (1) *ammetta una soluzione « mild » su* $[0, t^*]$.

DIMOSTRAZIONE. Per il Lemma 6 di [3], esistono $L_{ik} \in \mathbb{R}^+$ ($k = 0, 1, \ldots, n-1$; $i = k+1, \ldots, n$), tali che $\|A_i U_k(t)\| \leq L_{ik}$, $\forall\, t \in]0, T]$. Inoltre, poichè gli Ω_j e i W_i sono aperti e per la continuità di f, esistono $\varrho_h \in \mathbb{R}^+$ ($h = 0, 1, \ldots, n-1$), $\sigma_i \in \mathbb{R}^+$ ($i = 0, 1, \ldots, n-2$), $t' \in]0, T]$ e $N \in \mathbb{R}^+$, tali che

$$\overline{S(u_h, \varrho_h)} = \{ v \in X ; \| v - u_h \| \le \varrho_h \} \subset \Omega_h , \; h = 0, 1, \dots , n-1,$$

$$\overline{S(B_i u_i , \sigma_i)} = \{ w \in X ; \| w - B_i u_i \| \le \sigma_i \} \subset W_i , i = 0, 1, \dots, n-2,$$

$$\text{e } \| f(s, v_0, \dots, v_{n-1}, w_0, \dots, w_{n-2}) \| \le N, \; \forall s \in [0, t'],$$

$$\forall v_h \in \overline{S(u_h , \varrho_h)}, h = 0, 1, \dots, n-1, \text{ e } \forall w_i \in \overline{S(B_i u_i , \sigma_i)},$$

$i = 0, 1, \dots, n-2$. Per i Corollari 2 e 3 e il Teorema 2 di [3], esiste $t_0 \in \mathbb{R}^+$, tale che

$$\left\| (d/dt)^h \left[\sum_{j=0}^{n-1} \left(\sum_{k=j+1}^{n} U_{k-j-1}(t) A_k \right) u_j \right] - u_h \right\|_X \le \frac{1}{2} \varrho_h ,$$

$$\left\| (d/dt)^i \left[\sum_{j=0}^{n-1} \left(\sum_{k=j+1}^{n} U_{k-j-1}(t) A_k \right) u_j \right] - u_i \right\|_{X_i} \le \sigma_i/(2C_i),$$

$$h = 0, 1, \dots, n-1, \; i = 0, 1, \dots, n-2, \; \forall t \in]0, t_0].$$

Poniamo $t^* = \min \{ t', t_0 , \varrho_0/(2L_{n0} N), \dots , \varrho_{n-1}/(2L_{n,n-1} N),$

$$\sigma_0/(2C_0 N \sum_{k=1}^{n} L_{k0}), \dots, \sigma_{n-2}/(2C_{n-2} N \sum_{k=n-1}^{n} L_{k,n-2}) \}.$$

Ciò premesso, sia $Y = \bigcap_{h=0}^{n-1} \mathcal{C}^{(h)}([0, t^*] ; X_h)$. Posto $Y_0 =$

$$= \{ u \in Y ; u^{(h)}(0) = u_h , \; u^{(h)}(t) \in \overline{S(u_h , \varrho_h)}, \; h = 0, 1, \dots, n-1,$$

$$B_i u^{(i)}(t) \in \overline{S(B_i u_i , \sigma_i)}, i = 0, 1, \dots, n-2, \; \forall t \in [0, t^*] \},$$

è evidente che Y_0 è un sottoinsieme convesso e chiuso di Y.

Sia, poi, $\forall u \in Y_0$,

$$(F_1 u)(t) = \sum_{h=0}^{n-1} \left(\sum_{k=h+1}^{n} U_{k-h-1}(t) A_k \right) u_h, \text{ se } t \in]0, t^*], \; (F_1 u)(0) = u_0,$$

$$(F_2 u)(t) = \int_0^t U_0(t-s) f\big(s, u(s), \dots, u^{(n-1)}(s), B_0 u(s), \dots, B_{n-2} u^{(n-2)}(s)\big) \, ds,$$

se $t \in]\,0, t^*]$, $(F_2\, u)\,(0) = 0, Fu = F_1\, u + F_2\, u$. Pertanto, $Fu: [0, t^*] \to X, \forall\, u \in Y_0$.

Cominciamo col provare che $Fu \in Y_0$, $\forall\, u \in Y_0$. Dal Teorema 2 di [3] segue che $F_1\, u \in \bigcap_{h=0}^{n-1} \mathcal{C}^{(h)}\big([0, t^*]\,;\; X_h\big)$. Inoltre, poichè le funzioni $(s, t) \to A_i\, U_k\,(t-s)\; f\big(s, u\,(s), \ldots, u^{(n-1)}\,(s), B_0\, u\,(s), \ldots, B_{n-2}\, u^{(n-2)}\,(s)\big)$ sono continue su $\{(\sigma, \tau) \in \mathbb{R}^2\,;\; 0 \leq \tau \leq t^*, 0 \leq \sigma \leq \tau\}$, per $k = 0, 1, \ldots, n-1$ e per $i = k+1, \ldots, n$, $F_2\, u \in \bigcap_{h=0}^{n-1} \mathcal{C}^{(h)}\big([0, t^*]\,;\; X_h\big)$ e risulta $(A_i\, F_2\, u)^{(k)}\,(t) = \int_0^t A_i\, U_k\,(t-s)\, f\big(s, u\,(s), \ldots, u^{(n-1)}\,(s), B_0 u\,(s), \ldots,$

$B_{n-2}\, u^{(n-2)}\,(s)\big)\, ds$, se $t \in]\,0, t^*]$, $(A_i\, F_2\, u)^{(k)}\,(0) = 0$, per $k = 0, 1, \ldots, n-1$ e per $i = k+1, \ldots, n-2$. Pertanto, $Fu \in Y$ e $(Fu)^{(h)}\,(0) = u_h$, per $h = 0, 1, \ldots, n-1$. Si ha poi, $\forall\, t \in]\,0, t^*]$, $\|\,(Fu)^{(h)}\,(t) - u_h\,\| \leq$ $\leq \frac{1}{2}\, \varrho_h + t^*\, L_{nh}\, N \leq \varrho_h$, $h = 0, 1, \ldots, n-1$, $\|\,B_i\,(Fu)^{(i)}\,(t) - B_i\, u_i\,\|_X \leq$

$$\leq C_i\, \|(Fu)^{(i)}\,(t) - u_i\,\|_{X_i} \leq \frac{1}{2}\, \sigma_i + C_i\, t^*\, N \sum_{k=i+1}^{n} L_{ki} \leq \sigma_i,\; i = 0, 1, \ldots, n-2.$$

Questo prova che $Fu \in Y_0$. Dal Teorema 2 di [3] segue che $F_1 \in \mathcal{C}\,(Y_0, Y_0)$. Sfruttando la continuità di f e la compattezza di $[0, t^*]$, non è difficile dimostrare che anche $F_2 \in \mathcal{C}\,(Y_0, Y_0)$; quindi, $F \in \mathcal{C}\,(Y_0, Y_0)$.

Per poter applicare il teorema di punto fisso di Schauder, resta da provare che $F(Y_0)$ è relativamente compatto in Y. A questo scopo, utilizziamo il seguente risultato, che è un'estensione immediata del teorema di Ascoli-Arzelà per funzioni a valori vettoriali (cfr., per es., [1], Teorema 7.5.7).

LEMMA 1. *Condizione necessaria e sufficiente affinchè $H \subset \mathcal{C}^{(k)}\big([a, b]\,;\; Y\big)$ sia relativamente compatto è che:*

a) gli insiemi $H^{(i)} = \{f^{(i)}\,; f \in H\}$ siano equicontinui, per $i = 0, 1, \ldots, k$;

b) gli insiemi $H^{(i)}\,(t) = \{f^{(i)}\,(t)\,; f \in H\}$ siano relativamente compatti in Y, $\forall\, t \in [a, b]$ e per $i = 0, 1, \ldots, k$.

Pertanto, è sufficiente provare che gli insiemi $\{A_k\, g^{(i)}\,;\, g \in F\,(Y_0)\}$ sono equicontinui, per $i = 0, 1, \ldots, n-1$ e $k = i+1, \ldots, n$, e che gli insiemi $\{A_k g^{(i)}\,(t)\,;\, g \in F\,(Y_0)\}$ sono relativamente compatti in X per $i = 0, 1, \ldots, n-1$, per $k = i+1, \ldots, n$ e $\forall\, t \in [0, t^*]$.

Si ha, $\forall\, t_0,\, t_1 \in]\,0, t^*]$, $t_1 > t_0$, $\forall\, u \in Y_0$, $\forall\, i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ e $\forall\, k \in \{i+1, \ldots, n\}$:

$$\| A_k\,(Fu)^{(i)}\,(t_1) - A_k\,(Fu)^{(i)}\,(t_0)\| \leq \int_{t_0}^{t_1} \| A_k\, U_i\,(t_1 - s)\| \cdot$$

$$\| f\big(s,\, u\,(s), \ldots, u^{(n-1)}\,(s),\, B_0\, u\,(s), \ldots, B_{n-2}\, u^{(n-2)}\,(s)\big)\|\, ds +$$

$$+ \int_0^{t_0} \| A_k\, U_i\,(t_1 - s) - A_k\, U_i\,(t_0 - s)\|\ \| f\big(s, u\,(s), \ldots, u^{(n-1)}\,(s), B_0 u\,(s), \ldots,$$

$$B_{n-2}\, u^{(n-2)}\,(s)\big)\|\, ds + \sum_{h=0}^{n-1} \sum_{j=h+1}^{n} \| A_k\, U_{j-h+i-1}\,(t_1) -$$

$$- A_k\, U_{j-h+i-1}\,(t_0)\|\ \ \| A_j\, u_h\| = \sum_{m=1}^{3} I_m.$$

È immediato che $I_1 \leq L_{ki}\, N\,(t_1 - t_0) \xrightarrow[|t_1 - t_0| \to 0]{} 0$. Inoltre, $I_3 \to 0$, per $|\, t_1 - t_0\,| \to 0$, perchè $A_k\, U_r \in \mathcal{C}\,\big(\mathbb{R}^+\,;\, \mathcal{L}\,(X)\big)$, per $k = 0, 1, \ldots, n$ e $r \in I^+ \cup \{0\}$, in virtù dei Lemmi 1 e 3 di [3]. Per lo stesso motivo e per il teorema di convergenza dominata, tenendo presente che $\| A_k\, U_i\,(t_1 - s) - A_k\, U_i\,(t_0 - s)\| \leq 2L_{ki}$, anche I_2 tende a zero per $|\, t_1 - t_0\,| \to 0$. D'altra parte, se $t \in]\,0, t^*]$, si ha, per $i = 0, 1, \ldots, n-1$ e $k = i+1, \ldots, n$:

$$\| A_k (Fu)^{(i)}\,(t) - A_k\,(Fu)^{(i)}\,(0)\| \leq \Big\| \sum_{h=0}^{n-1} \sum_{j=h+1}^{n} A_k\, U_{j-h+i-1}(t)\, A_j\, u_h - A_k\, u_h \Big\| +$$

$$+ \Big\| \int_0^t A_k\, U_i\,(t-s)\, f\big(s,\, u\,(s), \ldots, u^{(n-1)}\,(s),\, B_0\, u\,(s), \ldots, B_{n-2}\, u^{(n-2)}\,(s)\big) ds \Big\|.$$

Il primo termine tende a zero, per $t \to 0\,+$, per il Teorema 2 di [3] e il secondo tende a zero, perchè si maggiora con $tL_{ki}N$. Questo prova l'equicontinuità degli insiemi $\{A_k g^{(i)}\,;\, g \in F\,(Y_0)\}$, per $i = 0, 1, \ldots, n-1$ e per $k = i+1, \ldots, n$.

Inoltre, gli insiemi $\{A_k g^{(i)}(0) ; g \in F(Y_0)\} = \{A_k u_i\}$ sono compatti per $i = 0, 1, \dots, n-1$ e per $k = i+1, \dots, n$. Sia, ora, $t \in]0, t^*]$ fissato. Poichè gli operatori $U_i(\tau)$ sono a valori in $\mathfrak{D}(P)$, $\forall \tau \in \mathbb{R}^+$ e $\forall i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, le funzioni $s \to P(\lambda_0) U_i(t-s) f\big(s, u(s), \dots, u^{(n-1)}(s), B_0 u(s), \dots, B_{n-2} u^{(n-2)}(s)\big)$ sono continue e, quindi, integrabili su $[0, t-\varepsilon]$, $\forall \varepsilon \in]0, t[$. Dal Lemma 6 di [3] segue allora che $\| \int_0^{t-\varepsilon} P(\lambda_0) U_i(t-s) f\big(s, u(s), \dots, u^{(n-1)}(s), B_0 u(s), \dots, B_{n-2} u^{(n-2)}(s)\big) ds \| \leq C t^* N \varepsilon^{-i-1}$, dove C è una opportuna costante, $\forall u \in Y_0$ e $\forall i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$. Ne viene che gli insiemi $\{A_k \int_0^{t-\varepsilon} U_i(t-s) f\big(s, u(s), \dots, u^{(n-1)}(s), B_0 u(s), \dots, B_{n-2} u^{(n-2)}(s)\big) ds ; u \in Y_0\} = \{A_k P^{-1}(\lambda_0) \int_0^{t-\varepsilon} P(\lambda_0) U_i(t-s) f\big(s, u(s), \dots, u^{(n-1)}(s), B_0 u(s), \dots, B_{n-2} u^{(n-2)}(s)\big) ds ; u \in Y_0\}$ sono relativamente compatti $\forall \varepsilon \in]0, t[$, $\forall i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ e $\forall k \in \{i+1, \dots, n\}$, in quanto ognuno di essi è immagine, attraverso l'operatore compatto $A_k P^{-1}(\lambda_0)$, di un insieme limitato.

Sia, ora, $\delta \in \mathbb{R}^+$. Scelto $\varepsilon < \delta/(2 L_{ki} N)$ e posto $G_{i,k,\varepsilon}(t) u = \int_0^{t-\varepsilon} A_k U_i(t-s) f\big(s, u(s), \dots, u^{(n-1)}(s), B_0 u(s), \dots, B_{n-2} u^{(n-2)}(s)\big) ds$, risulta $\| A_k (F_2 u)^{(i)}(t) - G_{i,k,\varepsilon}(t) u \| \leq \varepsilon L_{ki} N < \frac{1}{2} \delta$.

Poichè gli insiemi $\{G_{i,k,\varepsilon}(t) u ; u \in Y_0\}$ sono relativamente compatti e, quindi, totalmente limitati, esisteranno $u_{ik1}, \dots, u_{ikp_{ik}} \in Y_0$, tali che $\{G_{i,k,\varepsilon}(t) u ; u \in Y_0\} \subseteq \bigcup_{j=1}^{p_{ik}} S\left(G_{i,k,\varepsilon}(t) u_{ikj}, \frac{1}{2}\delta\right)$, per $i = 0, 1, \dots, n-1$ e per $k = i+1, \dots, n$. Ne viene che $\{A_k (F_2 u)^{(i)}(t) ; u \in Y_0\} \subseteq \bigcup_{j=1}^{p_i k} S\big(G_{i,k,\varepsilon}(t) u_{ikj}, \delta\big)$, per $i = 0, 1, \dots, n-1$ e per $k = i+1, \dots, n$. Allora, questi insiemi sono totalmente limitati e, quindi, per la completezza di X, relativamente compatti. Questo prova che gli insiemi $\{A_k (Fu)^{(i)}(t) ; u \in Y_0\}$ sono relativamente compatti in X, $\forall t \in]0, t^*]$, $\forall i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ e $\forall k \in \{i+1, \dots, n\}$.

Allora, il teorema di Schauder assicura l'esistenza di un punto fisso di F, cioè di una soluzione « mild » del problema di Cauchy (1), definita in $[0, t^*]$.

4. - Esistenza di una soluzione classica.

LEMMA 2. *Se l'Ipotesi I è verificata, si ha*

$$\|A_{k+1} U_k (t + h) - A_{k+1} U_k (t)\| \leq M h^\alpha t^{-\alpha},$$

per $k = 0, 1, \dots, n - 1$, $\forall\, t, h \in \mathbb{R}^+$ *e* $\forall\, \alpha \in [0, 1]$.

DIMOSTRAZIONE. Infatti, dal Lemma 6 di [3] e dal teorema del valor medio, si ha:

$$\| A_{k+1} U_k (t + h) - A_{k+1} U_k (t) \| \leq 2 L_{k+1, k}, \tag{4}$$

per $k = 0, 1, \dots, n-1$ e $\forall\, t, h \in \mathbb{R}^+$,

$$\| A_{k+1} U_k (t + h) - A_{k+1} U_k (t) \| \leq h \sup_{[t, t+h]} \| A_{k+1} U_{k+1} (\tau) \| \leq \tag{5}$$
$$\leq M_k h t^{-1}, \text{ per } k = 0, 1, \dots, n - 1 \text{ e } \forall\, t, h \in \mathbb{R}^+.$$

Elevando la (5) alla potenza α e la (4) alla potenza $1 - \alpha$ e moltiplicando si ottiene il risultato.

LEMMA 3. *Se l'Ipotesi I è verificata e se* $g \in L^p\big([0, T]\,;\ X\big)$, *per un* $p \in]1, +\infty]$, *posto*

$$v_k (t) = \int_0^t A_{k+1} U_k (t-s)\, g (s)\ ds, \quad \text{se} \quad t \in]0, T], \quad v_k (0) = 0,$$

per $k = 0, 1, \dots, n-1$, *le* v_k *risultano hölderiane* su $[0, T]$ *di esponente* $\beta < (p')^{-1}$, *dove* p' *è l'esponente coniugato di* p.

DIMOSTRAZIONE. Indichiamo con $\| \cdot \|_p$ la norma in $L^p\big([0, T]\,;\, X\big)$.

Se $h \in\,]0, 1]$, si ha, per la disuguaglianza di Hölder:

$$\| v_k(h) - v_k(0) \| = \Big\| \int_0^h A_{k+1}\, U_k(h-s)\, g(s)\, ds \Big\| \le L_{k+1,k} \int_0^h \| g(s) \|\, ds \le$$

$$\le L_{k+1,k}\, h^{1/p'} \, \| g \|_p \le L_{k+1,k}\, \| g \|_p\, h^\beta\,, \text{ per } k = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{6}$$

Sia $t \in\,]0, T[$. Se $h \in\,]0, 1]$ ed è tale che $t + h \le T$, si ha:

$$v_k(t+h) - v_k(t) = \int_t^{t+h} A_{k+1}\, U_k(t+h-s)\, g(s)\, ds +$$

$$+ \int_0^t \big[A_{k+1}\, U_k(t+h-s) - A_{k+1}\, U_k(t-s)\big]\, g(s)\, ds = I_{k1} + I_{k2}.$$

Ragionando come si è fatto per provare la (6), si ha:

$$\| I_{k1} \| \le L_{k+1,k}\, \| g \|_p\, h^\beta.$$

Per il Lemma 2, ove si prenda $\alpha = \beta$, e la disuguaglianza di Hölder, si ha poi:

$$\| I_{k2} \| \le \int_0^t \| A_{k+1}\, U_k(t+h-s) - A_{k+1}\, U_k(t-s) \| \;\; \| g(s) \| \;\; ds \le$$

$$\le M\, h^\beta \int_0^t (t-s)^{-\beta}\, \| g(s) \|\, ds \le M\, \| g \|_p \left(\int_0^t (t-s)^{-\beta p'}\, ds \right)^{1/p'} h^\beta =$$

$$= M'\, \| g \|_p\, t^{1-\beta p'}\, h^\beta \le M'\, \| g \|_p\, T^{1-\beta p'}\, h^\beta.$$

Da quanto già provato e dal fatto che l'intervallo $[0, T]$ è limitato, segue facilmente il risultato.

TEOREMA 3. *Supponiamo che sia verificata l'Ipotesi I e che* $\overline{\mathcal{D}(P)} = X$. *Allora, se* $g \in \mathcal{C}\big([0, T]\,;\, X\big)$ *è localmente hölderiana su*$]\,0, T]$, *di esponente* α, *la funzione*

$$u(t) = \int_0^t U_0(t - s)\, g(s)\, ds, \quad \text{se } t \in\,]\,0, T],\ u(0) = 0,$$

è soluzione classica del problema di Cauchy

$$(7)\qquad \begin{cases} \sum\limits_{k=0}^{n} A_k\, u^{(k)}(t) = g(t),\ t \in\,]\,0, T]\,, \\ u^{(h)}(0) = 0, \quad h = 0, 1, \ldots, n-1. \end{cases}$$

DIMOSTRAZIONE. Per quanto provato nel corso della dimostrazione del Teorema 2, $u \in \bigcap\limits_{h=0}^{n-1} \mathcal{C}^{(h)}\big([0, T]\,;\, X_h\big)$ e soddisfa le condizioni iniziali ; inoltre, $A_i\, u^{(k)}(t) = \int_0^t A_i\, U_k(t - s)\, g(s)\, ds, \quad \forall\, t \in [0, T]\,,$

$$\forall\, k \in \{0, 1, \ldots, n-1\} \ \text{ e } \ \forall\, i \in \{k+1, \ldots, n\}.$$

Dimostriamo che $u \in \bigcap\limits_{h=0}^{n-1} \mathcal{C}^{(h+1)}\big(]\,0, T]\,;\, X_h\big)$. Sia K un intervallo compatto contenuto in $]\,0, T]$ e fissiamo $\delta \in\,]\,0, \min K\,[$.

Poniamo $K_\delta = [\min K - \delta,\ \max K]$ e, $\forall\, \varepsilon \in\,]\,0, \delta\,[\,$, $v_{k,\varepsilon}(t) =$

$$= \int_0^{t-\varepsilon} U_k(t - s)\, g(s)\, ds,\ t \in K,\ k = 0, 1, \ldots, n-1\,.$$

Evidentemente, $A_{k+1}\, v_{k,\varepsilon}(t) \xrightarrow[\varepsilon \to 0+]{} A_{k+1}\, u^{(k)}(t)$, $\forall\, t \in K$ e $\forall k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, $A_{k+1}\, v_{k,\varepsilon} \in \mathcal{C}^{(1)}(K;\, X)$ e risulta $A_{k+1}\, v'_{k,\varepsilon}(t) =$

$$= A_{k+1}\, U_k(\varepsilon)\, g(t - \varepsilon) + \int_0^{t-\varepsilon} A_{k+1}\, U_{k+1}(t - s)\, g(s)\, ds,$$

$\forall\, t \in K$ e $\forall\, k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$. Dal Teorema 2 di [3] e dalla compattezza di $[0, T]$ si ottiene che

$$
(8)\qquad
\begin{aligned}
&A_{k+1}\, U_k(\varepsilon)\, g(t-\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon \to 0+]{} 0, \quad k = 0, 1, \dots, n-2\,, \\
&U_{n-1}(\varepsilon)\, g(t-\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon \to 0+]{} g(t)\,,
\end{aligned}
$$

uniformemente su K. Poichè g è localmente hölderiana su K_δ e questo è compatto, g risulta hölderiana su K_δ e si ha, se $0 < \varepsilon'' < \varepsilon' < \delta$, utilizzando il Lemma 6 di [3]:

$$
\begin{aligned}
&\Big\| \int_{t-\varepsilon'}^{t-\varepsilon''} A_{k+1}\, U_{k+1}(t-s)\, g(s)\, ds \Big\| \leq \Big\| \int_{t-\varepsilon'}^{t-\varepsilon''} A_{k+1}\, U_{k+1}(t-s)\, [g(s) - g(t)]\, ds \Big\| + \\
&+ \Big\| \int_{t-\varepsilon'}^{t-\varepsilon''} A_{k+1}\, U_{k+1}(t-s)\, g(t)\, ds \Big\| \leq M \int_{t-\varepsilon'}^{t-\varepsilon''} (t-s)^{\alpha-1}\, ds + \\
&+ \| A_{k+1}\, U_k(\varepsilon')\, g(t-\varepsilon') - A_{k+1}\, U_k(\varepsilon'')\, g(t-\varepsilon'') \| = (M/\alpha)\, (\varepsilon'^{\alpha} - \varepsilon''^{\alpha}) + \\
&+ \| A_{k+1}\, U_k(\varepsilon') g(t-\varepsilon') - A_{k+1}\, U_k(t-\varepsilon'')\, g(t-\varepsilon'') \| \xrightarrow[\varepsilon', \varepsilon'' \to 0+]{} 0\,,
\end{aligned}
$$

uniformemente su K, per $k = 0, 1, \dots, n-1$, come si vede tenendo presenti le (8). Pertanto, $A_{k+1}\, v'_{k,\varepsilon}$ converge uniformemente su K. Ne viene che $u \in \bigcap_{h=0}^{n-1} \mathcal{C}^{(h+1)}\big(\,]0, T]\,; X_h\big)$ e risulta

$$
\begin{aligned}
&A_k\, u^{(k)}(t) = \int_0^t A_k\, U_k(t-s)\, g(s)\, ds\,, \quad k = 1, \dots, n-1\,, \\
&u^{(n)}(t) = g(t) + \int_0^t U_n(t-s)\, g(s)\, ds\,.
\end{aligned}
$$

Si ha, poi, utilizzando le stesse notazioni di prima:

$$
\begin{aligned}
\Big\| \int_{t-\varepsilon'}^{t-\varepsilon''} A_0\, U_0(t-s)\, g(s)\, ds \Big\| \leq \Big\| \int_{t-\varepsilon'}^{t-\varepsilon''} A_0\, U_0(t-s)\, [g(s) - g(t)]\, ds \Big\| + \\
+ \Big\| \int_{t-\varepsilon'}^{t-\varepsilon''} A_0\, U_0(t-s)\, g(t)\, ds \Big\|\,.
\end{aligned}
$$

Il primo integrale si tratta in maniera analoga a prima ; il secondo è uguale, per il Lemma 4 di [3], a

$$-\sum_{j=1}^{n}\int_{t-\varepsilon'}^{t-\varepsilon''} A_j\, U_j\,(t-s)\, g(t)\, ds \xrightarrow[\varepsilon',\,\varepsilon''\to 0+]{} 0\,,$$ per quanto già dimostrato. Pertanto, $u(t)\in\mathfrak{D}\,(A_0)$, $\forall\, t\in\,]\,0\,,\,T]$. Da quanto finora dimostrato e dal Lemma 4 di [3] segue poi che u soddisfa l'equazione differenziale in $]\,0\,,\,T]$.

Con ciò, il teorema è completamente provato.

Osservazione. Il teorema precedente permette di estendere i risultati di [3] anche al caso di equazioni non omogenee ; nell'applicazione ai problemi misti per equazioni paraboliche secondo Petrovskii si riottengono così completamente i risultati di Lagnese [2].

Teorema 4. *Supponiamo che le Ipotesi I e II siano verificate e che* $\overline{\mathfrak{D}(P)}=X$. *Allora, se* $u_h\in\mathfrak{D}(P)$, *per* $h=0,1,\dots,n-2$, $u_{n-1}\in X$ *e* $f:[0\,,\,T]\times\left(\mathop{\times}\limits_{j=0}^{n-1}\Omega_j\right)\times\left(\mathop{\times}\limits_{i=0}^{n-2}W_i\right)\to X$ *è hölderiana in tutti i suoi argomenti, ogni soluzione «mild» in* $[0\,,\,t^*]$ *del problema* (1) *è anche soluzione classica dello stesso problema.*

Dimostrazione. Sia u una soluzione «mild» del problema (1).

Allora, $u\in\bigcap\limits_{h=0}^{n-1}\mathcal{C}^{(h)}\big([0\,,\,t^*]\,;\,X_h\big)$ e soddisfa le condizioni iniziali. Utilizzando le notazioni introdotte nel corso della dimostrazione del Teorema 2, si ha $u(t)=(F_1\,u)\,(t)+(F_2\,u)(t)$, $\forall\, t\in[0\,,\,t^*]$. Per il Corollario 3 e il Teorema 2 di [3], $F_1\,u$ è soluzione classica del problema (1) con $f=0$. Poichè le funzioni $u\,,\,u'\,,\dots,\,u^{(n-2)}\in\mathcal{C}^{(1)}\big([0\,,\,t^*]\,;\,X\big)$, sono sicuramente hölderiane in $[0\,,\,t^*]$ con qualsiasi esponente $\alpha\in\,]\,0\,,1]$. Inoltre, poichè $u\,,\,u'\,,\dots,\,u^{(n-1)}$, $B_0\,u$, $B_1\,u'\,,\dots,\,B_{n-2}\,u^{(n-2)}\in\mathcal{C}\,\big([0\,,\,t^*]\,;\,X\big)$, la funzione $s\to f\big(s\,,\,u(s),\dots,\,u^{(n-1)}\,(s),\ B_0\,u(s),\dots,\,B_{n-2}\,u^{(n-2)}\,(s)\big)$ è continua e, quindi, appartiene a $L^\infty\big([0\,,\,t^*]\,;\,X\big)$. Il Lemma 3 e l'Ipotesi II assicurano allora che $(F_2u)^{(n-1)}$, $B_0\,F_2\,u\,,\dots,\,B_{n-2}\,(F_2\,u)^{(n-2)}$ sono hölderiane su $[0,\,t^*]$ di esponente β, $\forall\,\beta\in\,]\,0\,,1\,[$. Inoltre, per il Teorema 2 di [3] e l'Ipotesi II, $(F_1\,u)^{(n-1)}$, $B_0\,F_1\,u\,,\dots,\,B_{n-2}\,(F_1\,u)^{(n-1)}$ sono localmente hölderiane su $]\,0\,,\,t^*]$ con qualsiasi esponente $\alpha\in\,]\,0\,,1]$, in quanto sono ivi di classe $\mathcal{C}^{(1)}$. Pertanto, $u^{(n-1)}$, $B_0\,u\,,\,B_1\,u'\,,\dots,$

$B_{n-2}\, u^{(n-2)}$ sono localmente hölderiane su $]\,0\,, t^*]$ di esponente β, $\forall\, \beta \in]\,0\,,1\,[$. Ne consegue che la funzione $s \to f\big(s\,, u\,(s)\,, \ldots\,, u^{(n-1)}\,(s)\,, B_0\, u(s)\,, \ldots\,, B_{n-2}\, u^{(n-2)}\,(s)\big)$ è localmente hölderiana su $]\,0\,, t^*]$. Allora, il Teorema 3 assicura che $F_2 u$ è soluzione classica del problema (7), con $g(s) = f\big(s\,, u(s)\,, \ldots\,, u^{(n-1)}\,(s)\,, B_0\, u(s)\,, \ldots\,, B_{n-2}\, u^{(n-2)}\,(s)\big)$. Questo prova il teorema.

BIBLIOGRAFIA

[1] J. DIEUDONNÉ, *Éléments d'Analyse*, tome 1, nouvelle édit., Cahiers Scientifiques, fasc. 28, Gauthier-Villars, Paris, 1967.

[2] J. LAGNESE, *On Equations of Evolution and Parabolic Equations of Higher Order in t*, J. Math. Anal. Appl., **32** (1970), pp. 15-37.

[3] E. OBRECHT, *Sul problema di Cauchy per le equazioni paraboliche astratte di ordine n*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **53** (1975), pp. 231-256.

[4] A. PAZY, *A Class of Semi-Linear Equations of Evolution*, Israel J. Math., **20** (1975), pp. 23-36.

Manoscritto pervenuto in redazione il 4 aprile 1977.