RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

MAURIZIO CHICCO

Esistenza ed unicità della soluzione di una disequazione variazionale associata ad un operatore ellittico del secondo ordine a coefficienti discontinui

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 57 (1977), p. 17-37

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1977__57__17_0>

REND. SEM. UNIV. PADOVA, VOL. 57 (1977)

Esistenza ed unicità della soluzione di una disequazione variazionale associata ad un operatore ellittico del secondo ordine a coefficienti discontinui.

MAURIZIO CHICCO (*)

SOMMARIO - Nel presente lavoro si considera una disequazione variazionale associata ad un operatore lineare ellittico del secondo ordine in forma di divergenza e a coefficienti discontinui. Si prova che la disequazione variazionale ammette una ed una sola soluzione nella ipotesi che il primo autovalore dell'operatore ellittico associato sia negativo ovvero (ciò che è lo stesso) se per tale operatore vale il principio di massimo generalizzato.

1. - Introduzione.

Il presente lavoro è una continuazione di [6] in cui si danno teoremi di esistenza ed unicità per la soluzione di una disequazione variazionale associata ad un operatore lineare ellittico del secondo ordine, in forma di divergenza, a coefficienti discontinui e non (necessariamente) coercivo. In [6] si faceva tuttavia l'ipotesi che

(1) $$c - \sum_{i=1}^{n} (d_i)_{x_i} \geq 0 \quad \text{nel senso delle distribuzioni.}$$

(*) Indirizzo dell'A: Istituto Matematico - Università di Genova - Via L. B. Alberti, 4 - Genova.

Lavoro eseguito nell'ambito del Laboratorio di Matematica Applicata del C.N.R., Genova.

Nel presente lavoro tale ipotesi viene sostituita con un'altra più debole la quale si dimostra sufficiente per l'esistenza, l'unicità e la continuità della soluzione della disequazione variazionale.

Inoltre nel presente lavoro viene estesa la classe di « ostacoli » per i quali è valido il teorema di esistenza ed unicità. Mentre in [6] si supponeva che la funzione ostacolo ψ fosse tale che

$$
(2) \qquad \begin{cases} \text{esiste } f \in L_p(\Omega), \text{ con } p > n, \text{ tale che} \\ \psi \in H^1(\Omega),\ \psi \leq 0 \text{ su } \partial\Omega,\ a(\psi, v) = \displaystyle\int_\Omega f v\, dx \\ \text{per ogni } v \in H_0^1(\Omega), \end{cases}
$$

nel presente lavoro si suppone solo $\psi \in H^1(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$, $\psi \leq 0$ su $\partial\Omega$.

Nel paragrafo 6 si dà qualche risultato anche nel caso $\psi \in C^0(\overline{\Omega})$, $\psi < 0$ su $\partial\Omega$.

Lavori precedenti che trattano problemo simili, pur con ipotesi diverse, sono ad esempio [4], [5], [7], [10] oltre al già citato [6].

2. - Notazioni ed ipotesi.

Sia Ω un insieme aperto e limitato di R^n, con $n \geq 3$.

I risultati valgono anche per $n = 2$, pur di modificare qualche esponente di sommabilità negli spazi funzionali considerati. Si suppone che la frontiera $\partial\Omega$ di Ω sia abbastanza regolare, e precisamente che Ω sia $H_0^1(\Omega)$ — ammissibile (vedi [8]). Ciò si verifica ad esempio se $\partial\Omega$ è rappresentabile localmente come grafico di una funzione lipschitziana.

Siano $H^1(\Omega)$ e $H_0^1(\Omega)$ gli spazi di Hilbert sui reali ottenuti completando rispettivamente $C^1(\overline{\Omega})$ e $C_0^1(\Omega)$ secondo la norma

$$
\|u\|_{H^1(\Omega)} = \|u\|_{L_2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} \|u_{x_i}\|_{L_2(\Omega)} .
$$

Sia $C^{0,\lambda}(\overline{\Omega})$ lo spazio di Banach delle funzioni hölderiane di esponente λ $(0 < \lambda \leq 1)$ in $\overline{\Omega}$, cioè delle funzioni u per le quali è finita la norma

$$
\|u\|_{C^{0,\lambda}(\overline{\Omega})} =
$$
$$
= \max_{\overline{\Omega}} |u| + \sup \{ |u(x') - u(x'')|\ |x' - x''|^{-\lambda} : x',\ x'' \in \Omega, x' \neq x'' \} .
$$

Siano $a_{ij} \in L_\infty(\Omega)$, $b_i \in L_n(\Omega)$, $d_i \in L_p(\Omega)$ $(i, j = 1, 2, \dots, n)$, $c \in L_{p/2}(\Omega)$, $p > n$, c_0 costante positiva, $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} t_i t_j \geq c_0 |t|^2$ q. o. in Ω e per ogni $t \in R^n$.

Sia $a(.,.)$ la forma bilineare su $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ così definita

$$a(u, v) = \int_\Omega \Big\{ \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{x_i} v_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} (b_i u_{x_i} v + d_i u v_{x_i}) + cuv \Big\} dx .$$

Data una funzione $u \in H^1(\Omega)$, un sottoinsieme compatto B contenuto in Ω ed un numero reale k, si dirà che $u \leq k$ in B nel senso di $H^1(\Omega)$ se esiste una successione u_j $(j = 1, 2, \dots)$ tale che $u_j \in C^1(\overline{\Omega})$, $u_j \leq k$ in $B (j = 1, 2, \dots)$ e $\lim_j \|u - u_j\|_{H^1(\Omega)} = 0$. Nel caso in cui $B = \overline{\Omega}$, si potrebbe dimostrare che $u \leq k$ in $\overline{\Omega}$ nel senso di $H^1(\Omega)$ se e solo se $u \leq k$ q. o. in Ω. Useremo pertanto indifferentemente i due tipi di disuguaglianze se $B = \overline{\Omega}$.

Sia ψ una funzione di $H^1(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ tale che si possa estendere ad una funzione, ancora denotata con ψ, appartenente ad $H^1(\Omega_1)$, essendo Ω_1 un aperto contenente $\overline{\Omega}$ (ciò si verifica senz'altro se la frontiera $\partial\Omega$ è localmente lipschitziana). Sia inoltre $\psi \leq 0$ su $\partial\Omega$.

Indichiamo con $\boldsymbol{k}$ l'insieme (convesso e chiuso in $H_0^1(\Omega)$)

$$\boldsymbol{k} = \{ v \in H_0^1(\Omega) \, : \, v \geq \psi \text{ q. o. in } \Omega \} .$$

Per ulteriori proprietà degli spazi $H^1(\Omega)$, $H_0^1(\Omega)$ e della forma bilineare $a(.,.)$ in connessione con le equazioni ellittiche di tipo variazionale si rimanda a [9].

L'ipotesi più importante che si farà nel presente lavoro è questa:

$$\text{(4)} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{esiste una funzione } w \in H^1(\Omega) \text{ tale che } w \geq 0 \\ \text{q. o. in } \Omega \text{ e risulta } a(w, v) > 0 \text{ per ogni } v \in C_0^1(\Omega), \\ v \geq 0 \text{ in } \Omega, \, v(x) > 0 \text{ per qualche } x \in \Omega. \end{array} \right.$$

Per i risultati di [2] tale ipotesi (4) è equivalente alle (4′), (4″) seguenti:

$$\text{(4}'\text{)} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{per ogni funzione } u \in H^1(\Omega) \text{ tale che } u \leq 0 \text{ su } \partial\Omega \text{ nel senso} \\ \text{di } H^1(\Omega) \text{ e } a(u, v) \leq 0 \text{ per ogni } v \in H_0^1(\Omega), \, v \geq 0 \text{ q. o. in } \Omega, \\ \text{risulta } u \leq 0 \text{ q. o. in } \Omega; \end{array} \right.$$

$$(4'')\quad \left\{\begin{array}{l} \text{detto } \lambda_1 \text{ l'autovalore del problema al contorno} \\ \left\{\begin{array}{l} a(u, v) + \lambda(u, v)_{L_2(\Omega)} = 0 \quad \text{per ogni } v \in H_0^1(\Omega)\,, \\ u \in H_0^1(\Omega) \end{array}\right. \\ \text{avente massima parte reale, risulta } \lambda_1 < 0\,. \end{array}\right.$$

Tali ipotesi sono senz'altro verificate ad esempio se vale la (1) (vedasi [1], [9]) oppure se la forma bilineare $a(.,.)$ è coercitiva su $H_0^1(\Omega)$ (vedi [9]).

3. - Lemmi preliminari.

Nel presente paragrafo si proveranno esistenza ed unicità della soluzione $u \in \boldsymbol{k}$ della disequazione variazionale

$$a(u, v - u) \geq 0 \qquad \text{per ogni} \quad v \in \boldsymbol{k}$$

con un'ipotesi supplementare, già utilizzata in [6]: cioè si suppone che esista una funzione $f \in L_p(\Omega)$ (con $p > n$) tale che $a(\psi, v) = \int_\Omega f v dx$ per ogni $v \in H_0^1(\Omega)$.

LEMMA 1. *Siano soddisfatte le ipotesi elencate nel paragrafo 2, ed inoltre esista una funzione $f \in L_p(\Omega)$ (con $p > n$) tale che $a(\psi, v) = \int_\Omega f v dx$ per ogni $v \in H_0^1(\Omega)$. Allora esiste una soluzione u appartenente a $\boldsymbol{k} \cap C^0(\overline{\Omega})$ della disequazione variazionale*

$$a(u, v - u) \geq 0 \qquad \textit{per ogni } v \in \boldsymbol{k}\,. \tag{5}$$

DIMOSTRAZIONE. Basta ripetere parola per parola quella di [6] (teorema 2.3), osservando che per la ipotesi (4') è ancora verificato il «principio di massimo generalizzato». Pertanto è ancora vero che $u_n \geq \psi$ in Ω, essendo u_n le approssimazioni di u di cui si parla in [6]. Il resto della dimostrazione del teorema 2.3 di [6] non cambia.

LEMMA 2. *Siano soddisfatte le ipotesi elencate nel paragrafo 2, sia $u \in \boldsymbol{k} \cap C^0(\overline{\Omega})$ una soluzione della disequazione variazionale* (5), *sia z*

una funzione di $H^1(\Omega)$ *tale che* $z \geq 0$ *su* $\partial\Omega$ *(nel senso di* $H^1(\Omega)$*),* $\psi \leq z$ *q. o. in* Ω *e* $a(z, v) \geq 0$ *per ogni* $v \in H_0^1(\Omega)$, $v \geq 0$ *in* Ω. *Allora risulta* $u \leq z$ *q. o. in* Ω.

DIMOSTRAZIONE. Essendo sia u sia ψ funzioni continue in $\overline{\Omega}$, l'insieme

$$B = \{ x \in \overline{\Omega} : u(x) = \psi(x) \} \tag{6}$$

è chiuso. Allora, come facilmente si verifica, la funzione u è soluzione nell'aperto $\Omega \setminus B$ dell'equazione

$$a(u, v) = 0 \quad \text{per ogni} \quad v \in H_0^1(\Omega \setminus B) . \tag{7}$$

Inoltre per le ipotesi fatte su z risulta pure

$$a(z, v) \geq 0 \quad \text{per ogni} \quad v \in H_0^1(\Omega \setminus B) \;,\; v \geq 0 \text{ q. o. in } \Omega \setminus B \,, \tag{8}$$

da cui subito

$$a(u-z, v) \leq 0 \quad \text{per ogni} \quad v \in H_0^1(\Omega \setminus B) \;,\; v \geq 0 \text{ q. o. in } \Omega \setminus B \,. \tag{9}$$

Dalla definizione di $\boldsymbol{k}$, dal fatto che $u \in \boldsymbol{k}$ e per le ipotesi fatte su z, segue che $u-z \leq 0$ su $\partial\Omega$ nel senso di $H^1(\Omega)$. Per quanto riguarda ∂B (cioè la frontiera di B) si ha: $z \geq \psi$ su ∂B nel senso di $H^1(\Omega)$ ed $u = \psi$ su ∂B nel senso di $H^1(\Omega)$ (si veda ad esempio [3]). Pertanto è pure $u-z \leq 0$ su ∂B nel senso di $H^1(\Omega)$, ed infine

$$u-z \leq 0 \quad \text{su } \partial(\Omega \setminus B) \text{ nel senso di } H^1(\Omega) \,. \tag{10}$$

Dalle (4′), (9), (10) si deduce

$$u \leq z \quad \text{q. o. in } \Omega \setminus B \,. \tag{11}$$

Essendo poi per definizione $u(x) = \psi(x)$ per ogni $x \in B$ e $\psi \leq z$ in B nel senso di $H^1(\Omega)$, si conclude che $u \leq z$ q. o. in Ω.

LEMMA 3. *Siano soddisfatte le ipotesi del lemma precedente, sia* $u \in \boldsymbol{k} \cap C^0(\overline{\Omega})$ *soluzione della disequazione variazionale* (5), *sia* $\psi_1 \in H^1(\Omega)$, $\psi_1 \leq 0$ *su* $\partial\Omega$ *nel senso di* $H^1(\Omega)$, $\psi \leq \psi_1$ *q. o. in* Ω.

Sia $u_1 \in H_0^1(\Omega)$, $u_1 \geq \psi_1$ *q. o. in* Ω, *una soluzione della disequazione variazionale*

(12) $\quad a(u_1\ , v - u_1) \geq 0$ *per ogni* $v \in H_0^1(\Omega)$, $v \geq \psi_1$ *q. o. in* Ω .

Allora risulta $u \leq u_1$, *q. o. in* Ω .

DIMOSTRAZIONE. Ponendo nella (12) $v = u_1 + \varphi$ con $\varphi \in H_0^1(\Omega)$, $\varphi \geq 0$ q. o. in Ω, si ottiene che

(13) $\quad a(u_1\ , \varphi) \geq 0$ per ogni $\varphi \in H_0^1(\Omega)$, $\varphi \geq 0$ q. o. in Ω .

Pertanto, essendo pure $\psi \leq \psi_1 \leq u_1$ q. o. in Ω, si può applicare il lemma precedente (ponendovi $z = u_1$) ottenendo, come si voleva, che $u \leq u_1$ q. o. in Ω .

LEMMA 4. *Siano soddisfatte le ipotesi del lemma precedente, sia* $u \in \boldsymbol{k} \cap C^0(\overline{\Omega})$ *soluzione della disequazione variazionale* (5). *Allora esiste una costante* K_1, *dipendente da* n, Ω *e dai coefficienti della forma bilineare* $a(.,.)$, *tale che risulti*

$$\max_{\overline{\Omega}} u \leq K_1 \quad \max(\max_{\overline{\Omega}} \psi \ , 0) \ .$$

DIMOSTRAZIONE. Per l'ipotesi (4) la soluzione w del problema di Dirichlet

$$(14) \qquad \begin{cases} a(w, v) = 0 \quad \text{per ogni } v \in H_0^1(\Omega) \\ w - 1 \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

(certamente esistente ed unica per la teoria di Riesz-Fredholm e perchè per la (4″) lo zero non è autovalore del problema (14)) è non negativa in Ω . Inoltre per il Corollario 1 di [2] w è strettamente positiva in ogni compatto di Ω , ed è hölderiana in $\overline{\Omega}$ per le ipotesi fatte su $\partial\Omega$ e per i risultati di [9]. Pertanto risulta $\min_{\overline{\Omega}} w > 0$. Essendo $\psi \in C^0(\overline{\Omega})$ e $\psi \leq 0$ su $\partial\Omega$, si ha

$$\psi(x) \leq K_2 w(x) \qquad \text{per ogni} \quad x \in \overline{\Omega}$$

pur di porre $K_2 = (\min_{\overline{\Omega}} w)^{-1} \max \ \{\max_{\overline{\Omega}} \psi \ , 0\}$.

Allora la funzione $K_2 w$ si comporta come la funzione z del lemma 2, in quanto è non negativa su $\partial\Omega$ (nel senso di $H^1(\Omega)$) e non inferiore a ψ in Ω, mentre $a(K_2 w, v) = 0$ per ogni $v \in H_0^1(\Omega)$. Dal lemma 2 segue quindi

$$u(x) \leq K_2 w(x) \quad \text{per ogni} \quad x \in \overline{\Omega}\,. \tag{16}$$

Ricordando la definizione di K_2, dalla (16) segue

$$u(x) \leq (\max_{\overline{\Omega}} w)\,(\min_{\overline{\Omega}} w)^{-1} \max\{\max_{\overline{\Omega}} \psi, 0\} \text{ per ogni } x \in \overline{\Omega}$$

pertanto il lemma risulta provato con $K_1 = (\max_{\overline{\Omega}} w)\,(\min_{\overline{\Omega}} w)^{-1}$.

LEMMA 5. *Siano soddisfatte le ipotesi del lemma precedente, siano u, ψ, u_1, ψ_1, come nel lemma 3, sia inoltre $a(\psi_1, v) = \int_\Omega f_1 v\, dx$ per ogni $v \in H_0^1(\Omega)$, ove $f_1 \in L_p(\Omega)$ (con $p > n$). Allora esiste una costante K_1 dipendente da n, Ω e dai coefficienti della forma bilineare $a(.,.)$ tale che risulti*

$$0 \leq u_1 - u \leq K_1 \max_{\overline{\Omega}} (\psi_1 - \psi) \quad \text{q. o. in } \Omega\,.$$

DIMOSTRAZIONE. Per le ipotesi fatte la funzione ψ_1 è continua in $\overline{\Omega}$ e quindi ivi limitata. Sia w la soluzione del problema di Dirichlet (14); come si è già osservato risulta $\min_{\overline{\Omega}} w > 0$ e w è hölderiana in $\overline{\Omega}$. Posto

$$K_3 = (\min_{\overline{\Omega}} w)^{-1} \max_{\overline{\Omega}} (\psi_1 - \psi)$$

risulta evidentemente

$$\psi_1 - \psi \leq K_3 w \quad \text{q. o. in } \Omega\,. \tag{17}$$

Posto

$$B_1 = \{ x \in \overline{\Omega} : u_1(x) = \psi_1(x) \}$$

l'insieme B_1 è chiuso e si ha

$$a(u_1, v) = 0 \quad \text{per ogni} \quad v \in H_0^1(\Omega \setminus B_1)\,. \tag{18}$$

Poichè è pure, come si verifica facilmente,

(19) $$a(u, v) \geq 0 \quad \text{per ogni } v \in H^1_0(\Omega)\,, \; v \geq 0 \quad \text{q. o. in } \Omega$$

ne segue

(20) $$a(u_1 - u, v) \leq 0 \text{ per ogni } v \in H^1_0(\Omega \setminus B_1)\,, \; v \geq 0 \text{ q.o. in } \Omega \setminus B_1\,.$$

Poichè $u, u_1 \in H^1_0(\Omega)$ è $u_1 - u = 0$ su $\partial\Omega$ nel senso di $H^1(\Omega)$. Inoltre è $u_1 = \psi_1$ su ∂B_1, $u \geq \psi$ q. o. in Ω, e quindi $u_1 - u \leq \psi_1 - \psi$ su B_1 nel senso di $H^1(\Omega)$. Dalla (17) segue quindi

(21) $$u_1 - u \leq K_3 w \quad \text{su} \quad \partial(\Omega \setminus B_1) \text{ nel senso di } H^1(\Omega)\,.$$

Dalle (14), (20) si ha

$$a(u_1 - u - K_3 w, v) \leq 0 \text{ per ogni } v \in H^1_0(\Omega \setminus B_1),\, v \geq 0 \text{ q.o. in } \Omega \setminus B_1$$

ed essendo pure, per la (21), $u_1 - u - K_3 w \leq 0$ su $\partial(\Omega \setminus B_1)$ nel senso di $H^1(\Omega)$, per la (4') si deduce che

$$u_1 - u \leq K_3 w \quad \text{q.o. in } \Omega \setminus B_1\,.$$

Per la definizione di B_1 e per la (17) la stessa disuguaglianza vale q. o. in Ω.

Ricordando la definizione di K_3 e il lemma 3 si ottiene infine

$$0 \leq u_1 - u \leq K_1 \max_{\overline{\Omega}} (\psi_1 - \psi) \quad \text{q. o. in } \Omega\,,$$

essendo $K_1 = (\max_{\overline{\Omega}} w)\,(\min_{\overline{\Omega}} w)^{-1}$. Si osservi che la costante K_1 è la stessa del lemma 4.

Lemma 6. *Siano verificate le ipotesi del lemma* 4 *e sia u una soluzione della disequazione variazionale* (5).

Allora esiste una costante K_4, *dipendente da* n, Ω *e dai coefficienti della forma bilineare* $a(.,.)$, *tale che risulti*

$$\| u \|_{H^1_0(\Omega)} \leq K_4 \left[\max_{\overline{\Omega}} \psi^+ + \| \psi^+_x \|_{L_2(\Omega)} \right]$$

ove si è posto per brevità $\psi^+ = \max(\psi, 0)$ *e* $\psi^+_x = \left[\sum_{i=1}^n (\psi^+)^2_{x_i} \right]^{\frac{1}{2}}$.

DIMOSTRAZIONE. Evidentemente la funzione ψ^+ appartiene al convesso k pertanto, essendo u soluzione della disequazione variazionale (5), si ha

$$a(u, u) \leq a(u, \psi^+) \tag{22}$$

cioè

$$\int_\Omega \sum_{j,i=1}^n a_{ij}\, u_{x_i}\, u_{x_j}\, dx \leq -\int_\Omega \left\{ \sum_{i=1}^n (b_i + d_i) u_{x_i} u + c u^2 \right\} dx + \tag{23}$$
$$+ \int_\Omega \left\{ \sum_{i,j=1}^n a_{ij}\, u_{x_i}\, \psi^+_{x_j} + \sum_{i=1}^n (b_i u_{x_i} \psi^+ + d_i u\, \psi^+_{x_i}) + c u\, \psi^+ \right\} dx .$$

Poniamo ancora, per brevità, $M = \max_{\bar\Omega} u$, $M_1 = \max_{\bar\Omega} \psi$.

Dalla (23) e dalle ipotesi fatte sui coefficienti della forma bilineare $a(.,.)$ si deduce allora

$$c_0 \left\| u_x \right\|^2_{L_2(\Omega)} \leq K_5 \left[M \left\| u_x \right\|_{L_2(\Omega)} + M^2 + \left\| u_x \right\|_{L_2(\Omega)} \left\| \psi^+_x \right\|_{L_2(\Omega)} + \right. \tag{24}$$
$$\left. + M_1 \left\| u_x \right\|_{L_2(\Omega)} + M \left\| \psi^+_x \right\|_{L_2(\Omega)} + M M_1 \right]$$

ove la costante K_5 dipende dai coefficienti della forma bilineare $a(.,.)$, da n e da Ω.

Dalla (24) si deduce, con facili calcoli

$$c_0 \left\| u_x \right\|^2_{L_2(\Omega)} \leq K_5 \left[3\eta \left\| u_x \right\|^2_{L_2(\Omega)} + \left(2 + \frac{1}{4\eta} \right) M^2 + \right. \tag{25}$$
$$\left. + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4\eta} \right) \left\| \psi^+_x \right\|^2_{L_2(\Omega)} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4\eta} \right) M_1^2 \right]$$

dove η è un qualunque numero positivo. Scegliamo $\eta = c_0/2K_5$; ricordando che per il lemma 4 è $M \leq K_1 M_1$, dalla (25) si ottiene

$$\left\| u_x \right\|^2_{L_2(\Omega)} \leq K_6 \left[M_1^2 + \left\| \psi^+_x \right\|^2_{L_2(\Omega)} \right] , \tag{26}$$

essendo ancora K_6 una costante dipendente da n, Ω e dai coefficienti della forma bilineare $a(.,.)$. Poichè $u \in H_0^1(\Omega)$, per note proprietà di tale spazio dalla (26) segue infine

$$\left\| u \right\|_{H_0^1(\Omega)} \leq K_7 \left[M_1 + \left\| \psi_x^+ \right\|_{L_2(\Omega)} \right]$$

essendo K_7 una costante dipendente dagli stessi argomenti di K_6.

4. - Esistenza della soluzione.

TEOREMA 7. *Siano verificate le ipotesi elencate nel paragrafo* 2. *Allora esiste* (*almeno*) *una soluzione* $u \in \boldsymbol{k}$ *della disequazione variazionale* (5).

DIMOSTRAZIONE. Fissati due numeri ε e δ tali che $0 < \delta < \varepsilon/2$, per noti risultati e per le ipotesi fatte sulla funzione ψ esiste una funzione $g \in C^\infty(\overline{\Omega})$ tale che

$$\|g-\psi+\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} < \delta \ , \quad \|g-\psi+\varepsilon\|_{C^0(\overline{\Omega})} < \delta \, . \tag{27}$$

Poichè $H_0^1(\Omega)$ è uno spazio di Hilbert e la forma $a(.,.)$ è bilineare su $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$, esiste una funzione $h \in H_0^1(\Omega)$ tale che

$$a(g, v) = \int_\Omega \sum_{i=1}^n h_{x_i} v_{x_i} \, dx \qquad \text{per ogni} \quad v \in H_0^1(\Omega) \, . \tag{28}$$

Inoltre, poichè $g \in C^\infty(\overline{\Omega})$, si vede facilmente che risulta $h_{x_i} \in L_p(\Omega)$ con $p > n$ $(i = 1, 2, ..., n)$. Sia h_1 una funzione di classe $C^\infty(\overline{\Omega})$ e sia g_1 la soluzione del problema al contorno

$$\left\{ \begin{array}{l} a(g_1, v) = \displaystyle\int_\Omega \sum_{i=1}^n (h_1)_{x_i} v_{x_i} \, dx \qquad \text{per ogni} \ v \in H_0^1(\Omega) \\ g_1 - g \in H_0^1(\Omega) \, . \end{array} \right. \tag{29}$$

Dalle (28), (29) e dai risultati di [9] segue che la funzione g_1 è hölderiana in $\overline{\Omega}$ di esponente λ (dipendente da n, Ω e dai coefficienti della forma bilineare $a(.,.)$) ; inoltre si ha

$$\|g_1 - g\|_{H^1(\Omega)} + \|g_1 - g\|_{C^{0,\lambda}(\Omega)} \leq K_8 \sum_{i=1}^{n} \|(h_1 - h)_{x_i}\|_{L_p(\Omega)} \tag{30}$$

essendo K_8 una costante anch'essa dipendente da n, Ω e dai coefficienti della forma bilineare $a(.,.)$. La funzione h appartiene ad $H_0^1(\Omega)$ e quindi ad $H_0^1(R^n)$ pur di prolungarla uguale a zero fuori di Ω. Inoltre, essendo $h_{x_i} \in L_p(R^n)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, è possibile trovare una funzione $h_1 \in C_o^\infty(R^n)$ tale che la quantità $\sum_{i=1}^{n} \|(h_1 - h)_{x_i}\|_{L_p(\Omega)}$ sia arbitrariamente piccola. Pertanto dalla (30) discende che si può supporre, pur di scegliere opportunamente h_1:

$$\| g_1 - g \|_{H^1(\Omega)} + \max_{\bar{\Omega}} | g_1 - g| < \delta . \tag{31}$$

D'altra parte la prima delle (29), essendo la funzione h_1 di classe $C^\infty(\bar{\Omega})$, può essere scritta

$$a(g_1, v) = - \int_\Omega (\Delta h_1) v \, dx \quad \text{per ogni} \quad v \in H_0^1(\Omega) \tag{32}$$

ove Δ è l'operatore di Laplace: $\Delta = \sum_{i=1}^{n} \partial^2/\partial x_i^2$.

Pertanto la funzione g_1 soddisfa ad un'ipotesi del tipo di quella richiesta alla funzione ψ nel lemma 1, essendo evidentemente $h_1 \in L_p(\Omega)$ per ogni $p \geq 1$. Ciò basta per poter applicare il lemma 1 e ottenere l'esistenza di una funzione u_1 tale che: $u_1 \in H_0^1(\Omega)$, $u_1 \geq g_1$ in $\bar{\Omega}$,

$$a(u_1, v - u_1) \geq 0 \quad \text{per ogni} \quad v \in H_0^1(\Omega), \; v \geq g_1 \quad \text{q.o. in } \Omega . \tag{33}$$

Inoltre, sempre per il lemma 1, tale funzione è continua in $\bar{\Omega}$. Osserviamo ancora che per la (31) e le (27) risulta

$$\psi(x) - 2\varepsilon < g_1(x) < \psi(x) \qquad \text{per ogni} \quad x \in \bar{\Omega} \tag{34}$$

$$\| g_1 - \psi \|_{H^1(\Omega)} < \varepsilon(1 + \sqrt{\operatorname{mis} \Omega}) . \tag{35}$$

A questo punto possiamo ripetere tutto il procedimento precedente sostituendo ad ε e δ due successioni numeriche $\{\varepsilon_m\}_{m \in N}$ e

$\{\delta_m\}_{m\in N}$ tali che $\varepsilon_m = 2^{-m}$, $\delta_m = 2^{-m-3}$ $(m = 1, 2, \ldots)$. Evidentemente risulta

$$0 < \delta_m < \varepsilon_m/2\,,\ \delta_{m+1} < \delta_m\,,\ \varepsilon_{m+1} < \varepsilon_m\ (m=1, 2, \ldots)\,,\ \lim_{m\to+\infty} \varepsilon_m = 0\,.$$

Dette g_m, u_m le funzioni corrispondenti a g_1, u_1 ove si sostituiscano δ_m, ε_m a δ, ε, le (33), (34), (35) si riscrivono

$$(36)\qquad \begin{cases} a(u_m\,, v-u_m) \geq 0 \quad \text{per ogni} \quad v \in H_0^1(\Omega),\ v \geq g_m \quad \text{q.o. in } \Omega\,; \\ u_m \in H_0^1(\Omega)\ ,\ u_m \geq g_m \quad \text{q. o. in } \Omega\,. \end{cases}$$

$$(37)\qquad \psi(x) - 2\,\varepsilon_m < g_m(x) < \psi(x) \qquad \text{per ogni} \quad x \in \overline{\Omega}$$

$$(38)\qquad \|g_m - \psi\|_{H^1(\Omega)} \leq \varepsilon_m \left(1 + \sqrt{\text{mis}\,\Omega}\right).$$

Inoltre dalla (31) e dalla seconda delle (27), scritte con ε_m, δ_m, g_m al posto di ε, δ, g_1 si ottiene

$$(39)\qquad \left.\begin{array}{l} \psi(x) - \varepsilon_m - \delta_m < g(x) < \psi(x) - \varepsilon_m + \delta_m\,, \\ \qquad - \delta_m < g_m(x) - g(x) < \delta_m \end{array}\right\} \quad \text{per ogni } x \in \overline{\Omega}\,.$$

Sommando membro a membro le (39) e riscrivendole per m ed $m + 1$ ne segue in particolare

$$(40)\qquad \begin{cases} g_m(x) < \psi(x) - \varepsilon_m + 2\delta_m \\ \psi(x) - \varepsilon_{m+1} - 2\delta_{m+1} < g_{m+1}(x) \qquad \text{per ogni } x \in \overline{\Omega}\,. \end{cases}$$

Dalle (40) si deduce facilmente che

$$(41)\qquad g_m(x) < g_{m+1}(x) \qquad\qquad \text{per ogni } x \in \overline{\Omega}\,.$$

Poichè le funzioni g_m e u_m soddisfano alle ipotesi di tutti i lemmi precedenti, per la (41) e per il lemma 3 si ha

$$(42)\qquad u_m(x) \leq u_{m+1}(x) \qquad\qquad \text{per ogni } x \in \overline{\Omega}\,.$$

Inoltre per il lemma 5 risulta pure

$$(43) \qquad 0 \leq u_{m+1}(x) - u_m(x) \leq K_1 \max_{\overline{\Omega}}(g_{m+1} - g_m) \qquad \text{per ogni } x \in \overline{\Omega}\,.$$

Dalle (39) e dalla definizione di δ_m, ε_m si deduce facilmente che

$$(44) \qquad \max(g_{m+1} - g_m) < 2^{-m+1}$$

sicchè per le (43), (44) la successione $\{u_m\}_{m\in N}$ converge uniformemente in $\overline{\Omega}$ ad una funzione continua u. Basta ormai dimostrare che $u \in \boldsymbol{k}$ ed u è soluzione della disequazione variazionale (5).

Intanto per la seconda delle (36) e per il fatto che la successione $\{g_m\}_{m\in N}$ per le (37) converge uniformemente a ψ in Ω, segue che $u(x) \geq \psi(x)$ per ogni $x \in \overline{\Omega}$.

Per le (37), (38) e per il lemma 6 le funzioni $\{u_m\}_{m\in N}$ hanno le norme (in $H^1_0(\Omega)$) equilimitate, cioè più precisamente risulta

$$(45) \qquad \left\| u_m \right\|_{H^1_0(\Omega)} \leq K_9 \left[\max_{\overline{\Omega}} \psi + \left\| \psi^+_x \right\|_{L_2(\Omega)}\right]$$

essendo K_9 una costante dipendente solo da n, Ω e dai coefficienti della forma bilineare $a\,(.,.)$. Per la (45) esiste un'estratta della successione $\{u_m\}_{m\in N}$ che converge debolmente in $H^1_0(\Omega)$ ad una funzione $u^* \in H^1_0(\Omega)$; un'ulteriore estratta converge quasi ovunque in Ω ad u^*, pertanto $u = u^*$ q.o. in Ω ed $u \in C^0(\overline{\Omega}) \cap H^1_0(\Omega)$. Per semplicità nel seguito supporremo che la successione $\{u_m\}_{m\in N}$ stessa converga debolmente in $H^1_0(\Omega)$ ad u (oltre che uniformemente).

Resta da far vedere che u è soluzione della disequazione variazionale (5). Ricordiamo intanto che per la prima delle (36) e per la (37) risulta

$$(46) \qquad a(u_m\,,\, u_m) \leq a(u_m\,,\, v) \qquad \text{per ogni } v \in \boldsymbol{k}\,.$$

Proviamo ora che

$$(47) \qquad a(u, u) \leq \min_{m\to+\infty} \lim\, a(u_m\,,\, u_m)$$

Infatti intanto risulta

$$\lim_{m\to\infty}\int_\Omega\left[\sum_{i=1}^n (b_i + d_i)\,(u_m)_{x_i}\,u_m + cu_m^2\right]dx = \tag{48}$$

$$= \int_\Omega\left[\sum_{i=1}^n (b_i + d_i)\,u_{x_i}\,u + cu^2\right]dx$$

a causa della convergenza di $\{u_m\}_{m\in N}$ ad u in $C^0(\overline{\Omega})$ e debolmente in $H_0^1(\Omega)$. Inoltre si ha

$$\min_{m\to\infty}\lim\int_\Omega \sum_{i,j=1}^n a_{ij}\,(u_m)_{x_i}\,(u_m)_{x_j}\,dx \geq \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n a_{ij}\,u_{x_i}\,u_{x_j}\,dx \tag{49}$$

essendo la funzione

$$\varphi \longrightarrow \sqrt{\int_\Omega \sum_{i,j=1}^n a_{ij}\,\varphi_{x_i}\,\varphi_{x_j}\,dx}$$

una norma in $H_0^1(\Omega)$ equivalente alla norma usuale (si lascia al lettore la facile verifica di questo fatto).

Pertanto la (49) non è altro che la ben nota semicontinuità inferiore sequenziale della norma rispetto alla convergenza debole.

Dalle (48), (49) segue la (47); si può quindi passare al minimo limite nella (46). Tenendo conto della (47) e del fatto che $\{u_m\}_{m\in N}$ converge debolmente ad u in $H_0^1(\Omega)$, si ottiene

$$a(u, u) \leq a(u, v) \qquad \text{per ogni } v \in \boldsymbol{k}$$

cioè u è soluzione della disequazione variazionale (5).

5. - Regolarità ed unicità della soluzione.

LEMMA 8. *Siano soddisfatte le ipotesi elencate nel paragrafo* 2, *sia* $u \in \boldsymbol{k}$ *una soluzione della disequazione variazionale* (5). *Allora* u *è* (*essenzialmente*) *limitata in* Ω.

DIMOSTRAZIONE. La funzione u è inferiormente limitata in Ω, e si ha $u \geq 0$ q. o. in Ω. Infatti dalla (5) si deduce che risulta

$a(u, \varphi) \geq 0$ per ogni $\varphi \in H_0^1(\Omega)$, $\varphi \geq 0$: basta prendere nella (5) $v = u + \varphi$, con φ non negativa ed appartenente ad $H_0^1(\Omega)$. Di qui e dalla (4') applicata a $-u$ si ottiene appunto che $u \geq 0$ q. o. in Ω.

Dimostriamo ora che u è superiormente (essenzialmente) limitata in Ω. Sia w la funzione la cui esistenza è supposta nella ipotesi (4). Anzi, più precisamente, scegliamo come funzione w la soluzione del problema di Dirichlet (14); si è già osservato che tale soluzione esiste, è unica, è continua in $\bar{\Omega}$ e risulta

$$\min_{\bar{\Omega}} w > 0 . \tag{50}$$

Sia per assurdo $\operatorname{ess\,sup}_{\Omega} u = +\infty$; posto, per ogni k reale

$$\Omega(k) = \{x \in \Omega \ : \ u(x) > kw(x)\}$$

risulta allora

$$\operatorname{mis} \Omega(k) > 0 \qquad \text{per ogni } k \text{ reale.} \tag{51}$$

D'altra parte, dal fatto che $u \in L_2(\Omega)$ e dalla (50), si ottiene

$$\lim_{k \to +\infty} \operatorname{mis} \Omega(k) = 0 . \tag{52}$$

Poichè la funzione ψ che compare nella definizione del convesso $\boldsymbol{k}$ è continua in $\bar{\Omega}$ e quindi ivi limitata, esiste un numero positivo k_0 tale che

$$kw(x) \geq \psi(x) \qquad \text{per ogni } x \in \bar{\Omega} \text{ e per ogni } k \geq k_0 . \tag{53}$$

Posto, per $k \geq k_0$,

$$w_k = \max(u - kw, 0)$$

per note proprietà dello spazio $H_0^1(\Omega)$ risulta allora $w_k \in H_0^1(\Omega)$, $w_k \geq 0$ q. o. in Ω. Inoltre evidentemente è $w_k = 0$ q. o. in $\Omega \setminus \Omega(k)$ e per la (53) si ha pure $u - w_k \in \boldsymbol{k}$.

Allora ponendo $v = u - w_k$ nella (5) se ne deduce

$$a(u, w_k) \leq 0 \qquad \text{per ogni } k \geq k_0 . \tag{54}$$

Inoltre è pure evidentemente

$$a(kw,\, w_k) = 0 \qquad \text{per ogni } k \geq k_0 \tag{55}$$

quindi dalle (54), (55) si ottiene

$$a(u - kw,\, w_k) \leq 0 \qquad \text{per ogni } k \geq k_0 . \tag{56}$$

Essendo, come si è già osservato, $w_k = 0$ q. o. in $\Omega \setminus \Omega(k)$ la (56) si può riscrivere

$$a(w_k\,,\; w_k) \leq 0 \qquad \text{per ogni} \qquad k \geq k_0\,,$$

da cui si deduce, per le ipotesi fatte sulla forma bilineare $a\,(.,.)$:

$$c_0 \left\| (w_k)_x \right\|^2_{L_2(\Omega(k))} \leq \sum_{i=1}^{n} \left\| b_i + d_i \right\|_{L_n(\Omega(k))} \left\| w_k \right\|_{L_{2^*}(\Omega(k))} \left\| (w_k)_x \right\|_{L_2(\Omega(k))} + \tag{57}$$

$$+ \left\| c \right\|_{L_{n/2}(\Omega(k))} \left\| w_k \right\|^2_{L_{2^*}(\Omega(k))}$$

essendo $2^* = 2n/(n-2)$. Ricordiamo ora la nota disuguaglianza

$$\left\| v \right\|_{L_{2^*}(R^n)} \leq K_{10} \left\| v_x \right\|_{L_2(R^n)} \tag{58}$$

valida per ogni $v \in H^1_0(R^n)$, ove K_{10} è una costante dipendente solo da n. Dalle (57), (58) si deduce

$$c_0 \left\| (w_k)_x \right\|^2_{L_2(\Omega(k))} \leq \tag{59}$$

$$\leq K_{10} \left[\sum_{i=1}^{n} \left\| b_i + d_i \right\|_{L_n(\Omega(k))} + K_{10} \left\| c \right\|_{L_{n/2}(\Omega(k))} \right] \left\| (w_k)_x \right\|^2_{L_2(\Omega(k))}$$

Per la (52) si può scegliere k così grande che risulti

$$K_{10} \left[\sum_{i=1}^{n} \left\| b_i + d_i \right\|_{L_n(\Omega(k))} + K_{10} \left\| c \right\|_{L_{n/2}(\Omega(k))} \right] < c_0$$

da cui seguirebbe $(w_k)_x = 0$ q. o. in Ω e quindi $w_k = 0$ q. o. in Ω, assurdo perchè in contrasto con la (51). Il lemma è così provato.

TEOREMA 9. *Siano soddisfatte le ipotesi elencate nel paragrafo* 2, *sia* $u \in \boldsymbol{k}$ *soluzione della disequazione variazionale* (5). *Allora* u *è continua in* $\bar{\Omega}$.

DIMOSTRAZIONE. Indichiamo per brevità con $a'(.,.)$ la forma bilineare su $H_0^1(\Omega)$ tale che

$$a'(u, v) = \int_\Omega \left\{ \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\, u_{x_i} v_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i\, u_{x_i} v \right\} dx$$

per ogni $u, v \in H_0^1(\Omega)$. Per il lemma precedente, detta u una soluzione della disequazione variazionale (5), la funzione u risulta (essenzialmente) limitata in Ω. Sia $\hat{u}$ la soluzione del problema al contorno

$$(60) \qquad \begin{cases} a'(\hat{u}, \varphi) = -\displaystyle\int_\Omega \left\{ \sum_{i=1}^{n} d_i\, u\varphi_{x_i} + cu\varphi \right\} dx \quad \text{per ogni } \varphi \in H_0^1(\Omega) \\ \hat{u} \in H_0^1(\Omega)\,. \end{cases}$$

Allora per i risultati di [9] risulta $\hat{u} \in C^0(\bar{\Omega})$. Detta v una qualunque funzione del convesso $\boldsymbol{k}$, dalle (5) e (60) segue

$$(61) \qquad a'(u-\hat{u}, v-u) \geq 0\,.$$

Sia ora φ una funzione tale che $\varphi \in H_0^1(\Omega)$, $\varphi \geq \psi - \hat{u}$ q. o. in Ω; allora risulta evidentemente $\varphi + \hat{u} \in \boldsymbol{k}$, per cui ponendo $v = \varphi + \hat{u}$ nella (61) si ottiene

$$(62) \qquad a'(u-\hat{u}, \varphi - u + \hat{u}) \geq 0\,.$$

Indicato con $\boldsymbol{k}'$ il convesso

$$\boldsymbol{k}' = \{ \varphi \in H_0^1(\Omega) \ : \ \varphi \geq \psi - \hat{u} \quad \text{q. o. in } \Omega \}$$

si vede che la funzione $u-\hat{u}$ appartiene a $\boldsymbol{k}'$ ed è soluzione della disequazione variazionale (62) per ogni $\varphi \in \boldsymbol{k}'$. Poichè, come già osservato, la funzione $\hat{u}$ è continua in $\bar{\Omega}$, la disequazione variazionale (62) è esattamente dello stesso tipo della (5), colla sola differenza che in essa compare la forma bilineare $a'(.,.)$ in luogo di $a(.,.)$. Per questa ragione alla disequazione (62) possono essere applicati i risultati di [4], valendo per l'equazione associata il principio di massimo [1], [9].

Pertanto per i risultati di [4], tuttora validi per questo caso, la funzione $u-\hat{u}$, soluzione della (62), è continua in $\overline{\Omega}$. Poichè pure $\hat{u}$, come si è detto, è continua in $\overline{\Omega}$, ne segue che u è continua in $\overline{\Omega}$.

TEOREMA 10. *Siano soddisfatte le ipotesi elencate nel paragrafo* 2. *Allora la disequazione variazionale* (5) *ammette al più una soluzione.*

DIMOSTRAZIONE. Siano u_1, u_2 due soluzioni della disequazione variazionale (5); per il teorema precedente esse sono entrambe continue in $\overline{\Omega}$. Basta applicare il lemma 3 con $\psi_1 = \psi$ per ottenere $u_1 \leq u_2$, $u_2 \leq u_1$ in $\overline{\Omega}$, cioè la tesi.

6. - Ostacolo continuo non appartenente ad $H^1(\Omega)$.

Nel presente paragrafo consideriamo il caso in cui la funzione ostacolo appartenga a $C^0(\overline{\Omega})$, senza necessariamente appartenere ad $H^1(\Omega)$.

Data una funzione $\psi \in H^1(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$, $\psi \leq 0$ su $\partial\Omega$, indichiamo con $u(\psi)$ la soluzione della disequazione variazionale (5). Per i risultati precedenti la funzione $u(\psi)$ esiste, è unica ed è continua in $\overline{\Omega}$.

LEMMA 10. *Siano* ψ', ψ'' *funzioni tali che* $\psi', \psi'' \leq 0$ *su* $\partial\Omega$, $\psi', \psi'' \in H^1(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$, $\min_{\overline{\Omega}} (\psi'-\psi'') > 0$. *Allora risulta*

$$0 \leq u(\psi')-u(\psi'') \leq K_1 \max_{\overline{\Omega}} (\psi'-\psi'') \text{ in } \Omega .$$

DIMOSTRAZIONE. Poniamo per brevità $u' = u(\psi')$, $u'' = u(\psi'')$. Per il lemma 3 risulta intanto $0 \leq u'-u''$ in Ω.

Dalla dimostrazione del teorema 7 si deduce che esistono successioni $\{\psi'_m\}_{m\in N}$, $\{\psi''_m\}_{m\in N} \subset C^0(\overline{\Omega}) \cap H^1(\Omega)$, ψ'_m, $\psi''_m \leq 0$ su $\partial\Omega$, tali che

$$a(\psi'_m, v) = \int_\Omega f'_m v\, dx \ , \quad a(\psi''_m , v) = \int_\Omega f''_m v\, dx$$

per ogni $v \in H_0^1(\Omega)$, con f'_m, $f''_m \in L_p(\Omega)$, $p > n$ $(m = 1, 2, \ldots)$,

$$\lim_{m \to +\infty} \max_{\overline{\Omega}} (|\psi'_m - \psi'| + |\psi''_m - \psi''|) = 0 . \tag{63}$$

Posto per brevità

$$u'_m = u(\psi'_m) , \quad u''_m = u(\psi''_m) \qquad (m = 1, 2, \ldots)$$

sempre dalla dimostrazione del teorema 7 si ottiene che

$$\lim_{m \to +\infty} \max_{\overline{\Omega}} (|u'_m - u'| + |u''_m - u''|) = 0 . \tag{64}$$

Dall'ipotesi $\psi''(x) < \psi'(x)$ per ogni $x \in \overline{\Omega}$ e dalla (63) segue che per ogni m abbastanza grande risulta

$$\min_{\overline{\Omega}} (\psi'_m - \psi''_m) > 0 . \tag{65}$$

Applicando il lemma 5 si ottiene

$$0 \leq u'_m - u''_m \leq K_1 \max_{\overline{\Omega}} (\psi'_m - \psi''_m) \text{ in } \Omega \tag{66}$$

valida per ogni m abbastanza grande.

Passando al limite nella (66) per $m \to +\infty$ e tenendo conto delle (63), (64) si ha la tesi.

TEOREMA 11. *Sia $\psi \in C^0(\overline{\Omega})$, $\psi < 0$ su $\partial\Omega$. Posto*

$$u = \inf \{g \in H^1(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega}) : g \geq 0 \text{ su } \partial\Omega,\ g \geq \psi \text{ in } \Omega ,$$
$$a(g, v) \geq 0 \text{ per ogni } v \in H_0^1(\Omega) ,\ v \geq 0 \text{ q. o. in } \Omega \} ,$$

$$\tilde{u} = \inf \{u(\psi') \in H_0^1(\Omega) : \psi' \in H^1(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega}),\ \psi' \geq \psi \text{ in } \Omega,\ \psi' \leq 0 \text{ su } \partial\Omega\},$$

$$\hat{u} = \sup \{u(\psi'') \in H_0^1(\Omega) : \psi'' \in H^1(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega}),\ \psi'' \leq \psi \text{ in } \Omega\} ,$$

allora risulta $u = \tilde{u} = \hat{u} \in C^0(\overline{\Omega})$.

DIMOSTRAZIONE. (Lewy-Stampacchia [5]). 1) Facciamo vedere che $\tilde{u} \leq u$. Per le ipotesi fatte sulla funzione ψ, per ogni $\varepsilon > 0$ è possibile determinare due funzioni ψ'_ε, ψ''_ε tali che ψ'_ε , $\psi''_\varepsilon \in C^\infty(R^n)$, $\psi''_\varepsilon(x) < \psi(x) < \psi'_\varepsilon(x)$ per ogni $x \in \bar{\Omega}$, $\psi'_\varepsilon \leq 0$ su $\partial\Omega$, $\max_{\bar{\Omega}} (\psi'_\varepsilon - - \psi''_\varepsilon) < \varepsilon$. Posto per brevità

$$u'_\varepsilon = u(\psi'_\varepsilon) \quad , \quad u''_\varepsilon = u(\psi''_\varepsilon)$$

dal lemma precedente segue

$$0 \leq u'_\varepsilon - u''_\varepsilon \leq K_1 \max_{\bar{\Omega}} (\psi'_\varepsilon - \psi''_\varepsilon) < K_1 \varepsilon \text{ in } \bar{\Omega} . \tag{67}$$

Essendo $\tilde{u} \leq u'_\varepsilon$ in $\bar{\Omega}$ (per definizione di $\tilde{u}$), $u''_\varepsilon \leq u$ in $\bar{\Omega}$ (per il lemma 2) si deduce

$$\tilde{u} \leq u'_\varepsilon = u''_\varepsilon + u'_\varepsilon - u''_\varepsilon \leq u''_\varepsilon + K_1 \varepsilon \leq u + K_1 \varepsilon \text{ in } \bar{\Omega} .$$

Per l'arbitrarietà di ε si ha:

$$\tilde{u} \leq u \quad \text{in } \bar{\Omega} . \tag{68}$$

2) In modo analogo, poichè risulta $u''_\varepsilon \leq \hat{u}$ in $\bar{\Omega}$ per definizione di $\hat{u}$ e $u \leq u'_\varepsilon$ in $\bar{\Omega}$, si ottiene

$$\hat{u} \geq u''_\varepsilon = u'_\varepsilon - (u'_\varepsilon - u''_\varepsilon) \geq u'_\varepsilon - K_1 \max_{\bar{\Omega}} (\psi'_\varepsilon - \psi''_\varepsilon) \geq u - K_1 \varepsilon \text{ in } \bar{\Omega}$$

e per l'arbitrarietà di ε

$$u \leq \hat{u} \quad \text{in } \bar{\Omega} . \tag{69}$$

3) Dai lemmi 3 e 10 è immediato che

$$\hat{u} \leq \tilde{u} \quad \text{in } \bar{\Omega} . \tag{70}$$

Dalle (68), (69), (70) segue che $u = \tilde{u} = \hat{u}$ in $\bar{\Omega}$; la continuità di u in $\bar{\Omega}$ è conseguenza del fatto che la funzione $\tilde{u}$ è superiormente semicontinua in $\bar{\Omega}$, mentre la funzione $\hat{u}$ è inferiormente semicontinua in $\bar{\Omega}$.

BIBLIOGRAFIA

[1] M. CHICCO, *Principio di massimo forte per sottosoluzioni di equazioni ellittiche di tipo variazionale*, Boll. Un. Mat. Ital. (3), **22** (1967), 368-372.

[2] M. CHICCO, *Principio di massimo generalizzato e valutazione del primo autovalore per problemi ellittici del secondo ordine di tipo variazionale*. Ann. Mat. Pura Appl., (4) **87** (1970), 1-10.

[3] M. CHICCO, *Sulle disuguaglianze negli spazi* $H^{k,p}(\Omega)$. Matematiche (Catania) **28** (1973), 18-29.

[4] H. LEWY - G. STAMPACCHIA, *On the regularity of the solution of a variational inequality*, Comm. Pure Appl. Math., **22** (1969), 153-188.

[5] H. LEWY - G. STAMPACCHIA, *On existence and smoothness of solutions of some non-coercive variational inequalities*, Arch. Rat. Mech. Anal., **42** (1971), 241-253.

[6] M. E. MARINA, *Esistenza ed unicità della soluzione di una disuguaglianza variazionale associata ad un operatore non coercivo*, Boll. Un. Mat. Ital., (4) **10** (1974), 500-511.

[7] M. K. V. MURTHY-G. STAMPACCHIA, *A variational inequality with mixed boundary conditions.*, Israel J. Math. **13** (1972), 188-224.

[8] G. STAMPACCHIA, *Problemi al contorno ellittici con dati discontinui dotati di soluzioni hölderiane*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **51** (1960), 1-38.

[9] G. STAMPACCHIA, *Le problème de Dirichlet pour les équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **15** (1965), 189-258.

[10] G. STAMPACCHIA, *Variational inequalities*, Proc. Nato Advanced Study Inst., Theory and applications of monotone operators, Venice 1968, 101-192.

Manoscritto pervenuto in redazione il 3 settembre 1976.