RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

GABRIELE H. GRECO

Integrale monotono

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 57 (1977), p. 149-166

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1977__57__149_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 57 (1977)

Integrale monotono

GABRIELE H. GRECO (*)

Introduzione.

Sia $f: A \to [0, +\infty]$ una funzione misurabile rispetto ad una misura ψ su A. La funzione f è ψ—integrabile e $\int_A f d\psi = \int_0^{+\infty} \psi(\{x : f(x) > \tau\}) \, d\tau$, cioè integrale della funzione f è l'integrale elementare della funzione $g(\tau) = \psi\{x : f(x) > \tau\}$ monotona in τ. In modo naturale si ottiene una estensione del significato di integrale di una funzione $f: A \to [0, +\infty]$ al caso che ψ sia solo una funzione d'insieme non decrescente; cioè poniamo, per definizione, $\int_A f d\psi = \int_0^{+\infty} \psi\{x \in A : f(x) > \tau\} \, d\tau$, qualora f sia una qualsiasi funzione di A in $[0, +\infty]$ e ψ una funzione non decrescente di $\mathcal{P}(A)$ in $[0, +\infty]$.

Sia $a: \mathcal{P}(A) \to [0, +\infty]$ una funzione d'insieme monotona, cioè $a(\varnothing) = 0$ e $a(B) \leq a(C)$ se $B \subset C$, poniamo $\int_A f da = \int_0^{+\infty} a\{x \in A : f(x) > \tau\} \, d\tau$ per ogni $f \in [0, +\infty]^A$.

(*) Indirizzo dell'A.: Ist. Matematico Università di Trento.

Sia $\mathbb{B} \subset [0\,,\,+\infty]^A$ con la proprietà

1) $\lambda \in [0\,,\,+\infty)\,,\ g \in \mathbb{B} \Rightarrow \lambda g\,, g \wedge \lambda\,, g \vee \lambda - \lambda \in \mathbb{B}$

Si vedrà in seguito che l'applicazione $T : \mathbb{B} \to [0\,,\,+\infty]$ è rappresentata da una funzione d'insieme monotona γ, cioè $T(f) = \int_A f d\gamma\ \forall f \in \mathbb{B}$, se e solo se T verifica le proprietà

2) $T(f) \leq T(g)$ se $f \leq g$

3) $T(\lambda f) = \lambda T(f)$ se $\lambda \in [0\,,\,+\infty)$

4) $T(f) = T(f \wedge \lambda) + T(f \vee \lambda - \lambda)$

5) $T(f) = \lim\limits_n T(f \wedge n)$

6) $T(f) = \lim\limits_n T\left(f \vee \frac{1}{n} - \frac{1}{n}\right)$

Quando le proprietà 1, 2, 3, 4, 5, 6 sono soddisfatte, diciamo che l'applicazione T è un « integrale monotono su $\mathbb{B}$ ». Inoltre se T è un integrale nonotono su $\mathbb{B}$, una funzione d'insieme monotona γ rappresenta T se e solo se $\beta_T \leq \gamma \leq \alpha_T$, dove β_T e α_T sono le funzioni d'insieme monotone, definite dalle posizioni

$$\alpha_T(B) = \inf \ \{ T(g) : g \in \mathbb{B}\,, g \geq \varphi_B \} \quad , \quad \forall B \subset A$$

$$\beta_T(B) = \sup \ \{ T(g) : g \in \mathbb{B}\,, g \leq \varphi_B \} \quad , \quad \forall B \subset A$$

Occupano un ruolo importante nello studio delle proprietà dell'integrale monotono gli insiemi $B \subset A$ tali che $\alpha_T(B) = \beta_T(B) < < +\infty$. Diciamo che questi insiemi sono T-regolari; indichiamo con $\mathfrak{R}_T$ la famiglia degli insiemi T-regolari e con δ_T la restrizione della funzione α_T alla famiglia $\mathfrak{R}_T$. Se T è un integrale monotono e $\int_A f d\alpha_T = \int_A f d\beta_T$ allora l'insieme $\left\{ H : H = \{ x : f(x) > \tau \} \text{ per qualche } \tau \in)0\,,\,+\infty] \text{ e } H \text{ non è } T\text{-regolare} \right\}$ è numerabile.

Nel teorema 2 si dimostrerà che per un integrale monotono $T : \mathbb{B} \to [0\,,\,+\infty)$ con la proprietà

7) $f \wedge g\,, f \vee g\,, f \vee g - g \in \mathbb{B}$ se $f\,, g \in \mathbb{B}$ e limitate

esiste una rappresentazione γ che rende le funzioni $f \in \mathbf{B}$ γ-misurabili se e solo se

$$8)\quad T(f) = T(f \wedge g) + T(f \vee g - g) \quad \text{se} \quad f\,,\, f \wedge g\,,\, f \vee g - g \in \mathbf{B}$$

Inoltre se le proprietà 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 sono verificate, si ottiene che la famiglia degli insiemi T-regolari $\mathfrak{R}_T$ è un anello di insiemi e la funzione δ_T è additiva in $\mathfrak{R}_T$, cioè $\delta_T(A \cup B) = \delta_T(A) + \delta_T(B)$ se $A \cap B = \varnothing$.

Se l'integrale monotono $T : \mathbf{B} \to [0\,, +\infty)$ soddisfa le proprietà 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e

$$9)\quad T(f) \leq \sum_{i=1}^{\infty} T(f_i) \quad \text{se} \quad f\,, f_i \in \mathbf{B} \quad \text{limitate e} \quad f \leq \sum_{i=1}^{\infty} f_i$$

esiste una misura esterna μ, cioè una funzione d'insieme monotona e numerabilmente subadditiva, tale che $T(f) = \int_A f d\mu$ e ogni funzione f è μ-misurabile.

In questo caso δ_T è numerabilmente additiva, cioè $\delta_T(\bigcup_{i=1}^{\infty} H_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \delta_T(H_i)$ se $H_i \in \mathfrak{R}_T$ e $H_i \cap H_j = \varnothing$ per $i \neq j$; la misura esterna μ è definita da

$$\mu(B) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \delta_T(H_i) : \; H_i \in \mathfrak{R}_T\,, \bigcup_{i=1}^{\infty} H_i \supset B \right\}, \quad \forall\, B \subset A\,.$$

Una interessante applicazione dell'integrale monotono è il teorema di Riesz sulla rappresentazione di funzionali lineari su spazi di funzioni continue.

Le notazioni e la terminologia sono quelle usuali. Indichiamo con φ_B la funzione caratteristica di un insieme B e con $\mathbf{N}$ l'insieme dei numeri naturali. Inoltre poniamo $0 \cdot (+\infty) = 0$ e $\inf(\varnothing) = +\infty$.

Ringrazio il prof. Mario Miranda per avermi suggerito questa ricerca.

1. *Proprietà e assiomi dell'integrale monotono.*

DEFINIZIONE 1. *Dato un insieme A, sia $\mathcal{P}(A)$ l'insieme delle parti di A. Diremo che una funzione d'insieme $a : \mathcal{P}(A) \to [0, +\infty]$ è monotona se verifica*

(i) $a(\varnothing) = 0$

(ii) $X, Y \in \mathcal{P}(A), X \subset Y \Rightarrow a(X) \leq a(Y)$

DEFINIZIONE 2. *Diremo che una applicazione T: $\mathbf{B} \to [0, +\infty]$, dove $\mathbf{B} \subset [0, +\infty]^A$ è un «integrale monotono su $\mathbf{B}$», se per ogni $\lambda \in [0, +\infty)$ e per ogni $g, f \in \mathbf{B}$ valgono le seguenti proprietà:*

(i) $\lambda g \in B$

(ii) $g \wedge \lambda, g \vee \lambda - \lambda \in \mathbf{B}$

(iii) $g \leq f \Rightarrow T(g) \leq T(f)$

(iv) $T(\lambda g) = \lambda T(g)$

(v) $T(g) = T(g \wedge \lambda) + T(g \vee \lambda - \lambda)$

(vi) $T(g) = \lim\limits_{n} T(g \wedge n)$

(vii) $T(g) = \lim\limits_{n} T\left(g \vee \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n}\right)$

Se T è un integrale monotono, chiamiamo a_T e β_T le funzioni d'insieme monotone definite in $\mathcal{P}(A)$ dalle posizioni:

$$a_T(B) = \inf \{ T(g) : g \in B, g \geq \varphi_B \} \qquad \text{per ogni } B \subset A$$
$$\beta_T(B) = \sup \{ T(g) : g \in B, g \leq \varphi_B \} \qquad \text{per ogni } B \subset A$$

Inoltre indichiamo con $[\beta_T, a_T]$ la famiglia delle funzioni d'insieme γ monotone, definite in $\mathcal{P}(A)$ tali che $\beta_T(B) \leq \gamma(B) \leq a_T(B)$, $\forall B \subset A$. Si noti che $[\beta_T, a_T] \neq \varnothing$ perchè $\beta_T \leq a_T$.

PROPOSIZIONE 1. *Sia α una funzione d'insieme monotona, definita in $\mathcal{P}(A)$, e sia $\int_A - da$: $[0, +\infty]^A \to [0, +\infty]$ l'applicazione definita da $\int_A f da = \int_0^{+\infty} \alpha \{ x : f(x) > \tau \} d\tau$. Valgono le seguenti pro-*

prietà :

(1) $\int_A - da$ *è un integrale monotono su* $[0\,,\,+\infty]^A$

(2) $\displaystyle\int_A f da = \lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{\infty} a\left\{ x : f(x) > \frac{k}{n}\right\}$

(3) *Se per ogni* $n \in \mathbf{N}$ *la successione* $\{ g_k \wedge n \}_{k\in\mathbb{N}}$ *converge uniformemente in* A *alla funzione* $g \wedge n$, *allora*

$$\int_A g da \leq \operatorname*{minlim}_k \int_A g_k\, da$$

(4) *Se la successione* $\{ g_n \}_{n\in\mathbb{N}} \subset [0\,,\,+\infty)^A$ *converge uniformemente alla funzione* $g \in [0\,,\,+\infty)^A$, *se esiste* $f \in [0\,,\,+\infty]^A$ *tale che* $g_n \leq f \ \ \forall n \in \mathbf{N}$ e $\int_A f da < +\infty$, *allora* $\int_A g da = \lim_n \int_A g_n da$

Prova : le proprietà (1) e (2) sono ovvie conseguenze della definizione di $\int_A - da$, la validità della (3) segue da (1), tenendo conto che per ogni $\varepsilon\,,\,\delta \in (0\,,\,+\infty)$ con $\delta > \operatorname*{minlim}_k \int_A (g_k \wedge n)\, da$ si ha $\int_A [(g \wedge n) \vee \varepsilon - \varepsilon]\; da \leq \delta$. Infatti per l'uniforme convergenza della successione $\{ g_k \wedge n \}_{k\in\mathbb{N}}$ esiste $k(\varepsilon) \in \mathbf{N}$ tale che $g \wedge n \leq g_{k(\varepsilon)} \wedge n + \varepsilon$ e $\int_A (g_{(k\varepsilon)} \wedge n)\; d\,a \leq \delta$.

Dunque $(g \wedge n) \vee \varepsilon - \varepsilon \leq g_{k(\varepsilon)} \wedge n$ e $\int_A [(g \wedge n) \vee \varepsilon - \varepsilon]\, d\alpha \leq$ $\leq \int_A (g_{k(\varepsilon)} \wedge n)\, d\alpha \leq \delta$. Perciò per ogni $n \in \mathbf{N}$ e per ogni $\delta \geq \operatorname*{minlim}_k \int_A (g_k \wedge n)\, da$ si ha che $\int_A (g \wedge n)\, da = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_A [(g \wedge n) \vee \varepsilon - \varepsilon]\, da \leq \delta$ (vedi proprietà (iii) e (vii) della definizione 2).

Quindi $\int_A (g \wedge n)\, da \leq \operatorname{minlim}_k \int_A (g_k \wedge n)\, da \leq \operatorname{minlim}_k \int_A g_k\, da$. Infine per la proprietà (vi) dell'integrale monotono, si ha $\int_A g\, da = \lim_n \int_A (g \wedge n)\, da \leq \operatorname{minlim}_k \int_A g_k\, da$.

Per verificare (4) è sufficiente provare che $\operatorname{maxlim}_n \int_A g_n\, da \leq \int_A g da$.

Sia $\varepsilon, \delta \in (0, +\infty)$ con $\delta < \operatorname{maxlim}_n \int_A g_n\, da$. Per la convergenza uniforme della successione $\{g_n\}$ esiste $n(\varepsilon) \in \mathbf{N}$ tale che $g_{n(\varepsilon)} < g + \varepsilon$ e $\delta \leq \int_A g_{n(\varepsilon)}\, da$. Perciò $\delta \leq \int_A g_{n(\varepsilon)}\, da = \int_A (g_{n(\varepsilon)} \wedge \varepsilon)\, da + \int_A (g_{n(\varepsilon)} \vee \varepsilon - \varepsilon)\, da \leq \int_A (f \wedge \varepsilon)\, da + \int_A g\, da$; passando al limite per $\varepsilon \to 0^+$ si ha $\delta \leq \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_A (f \wedge \varepsilon)\, da + \int_A g\, da = \int_A g\, da$, poichè $\lim_{\varepsilon \to 0+} \int_A (f \wedge \varepsilon)\, da = \lim_{\varepsilon \to 0+} \left[\int_A f\, da - \int_A (f \vee \varepsilon - \varepsilon)\, da \right] = \int_A f\, da - \int_A f\, da = 0$.

Dunque per $\delta \in (0, +\infty)$ si ha $\delta < \operatorname{maxlim}_n \int_A g_n\, da \Rightarrow \delta \leq \int_A g\, da$.

Quindi $\operatorname{maxlim}_n \int_A g_n\, da \leq \int_A g\, da$.

Teorema 1 *Sia* $T: \mathbf{B} - [0, +\infty]$ *un integrale monotono su* $\mathbf{B} \subset [0, +\infty]^A$. *Una funzione d'insieme monotona* γ, *definita in* $\mathcal{S}(A)$, *rappresenta* T, *cioè* $T(g) = \int_A g d\gamma$ *per ogni* $g \in \mathbf{B}$, *se e solo se* $\gamma \in [\beta_T, \alpha_T]$

Prova: La condizione « $\gamma \in [\beta_T, \alpha_T]$ » è necessaria. Infatti se γ è tale che $T(f) = \int_A f d\gamma$ per ogni $f \in \mathbf{B}$ si ha

$$g \leq \varphi_B \leq f,\ g \in \mathbf{B},\ f \in \mathbf{B} \Rightarrow T(g) = \int_A g d\gamma \leq \int_A \varphi_B\, d\gamma = \gamma(B) \leq \int_A f d\gamma = T(f).$$

Quindi per ogni $B \subset A$ si ha $\beta_T(B) \leq \gamma(B) \leq \alpha_T(B)$, cioè $\gamma \in [\beta_T, \alpha_T]$.

Ora proviamo che se $\gamma \in [\beta_T, \alpha_T]$ allora $T(f) = \int_A f d\gamma$ per ogni $f \in \mathbb{B}$. La funzione d'insieme monotona γ verifica le seguenti proprietà:

$$a) \quad g \in B\,,\ g \leq \varphi_B \Rightarrow T(g) \leq \gamma(B)$$

$$b) \quad g \in B\,,\ g \geq \varphi_B \Rightarrow T(g) \geq \gamma(B).$$

Per la proprietà (v) della definizione 2, per ogni $\{B_i\}_{1 \leq i \leq n} \subset \mathcal{S}(A)$ con $B_1 \supset B_2 \supset \ldots \supset B_n$ e per ogni $\{\lambda_i\}_i \subset [0, +\infty)$ si ha

$$(a') \quad g \in \mathbb{B}\,, g \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi_{B_i} \Rightarrow T(g) \leq \int_A \Big(\sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi_{B_i}\Big) d\gamma = \sum_{i=1}^n \lambda_i \gamma(B_i)$$

$$(b') \quad g \in \mathbb{B}\,, g \geq \sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi_{B_i} \Rightarrow T(g) \geq \int_A \Big(\sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi_{B_i}\Big) d\gamma = \sum_{i=1}^n \lambda_i \gamma(B_i)$$

1º CASO. Sia $g \in \mathbb{B}$, limitata e $\gamma\{x : g(x) > 0\} < +\infty$. Supponiamo che sia $g \leq 1$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha $\sum_{i=1}^{2^n} \frac{1}{2^n} \varphi\{x : g(x) > i2^{-n}\} \leq \leq g \leq \frac{1}{2^n} \varphi\{x : g(x) > 0\} + \sum_{i=1}^{2^n} \frac{1}{2^n} \varphi\{x : g(x) > i2^{-n}\}$ e le funzioni $g_n = \sum_{i=1}^{2^n} \frac{1}{2^n} \varphi\{x : g(x) > i2^{-n}\}$ convergono uniformemente a g in A. Quindi da (a') e (b') segue $\int_A g_n\, d\gamma \leq T(g) \leq \frac{1}{2^n} \gamma\{x : g(x) > 0\} + + \int_A g_n\, d\gamma$.

Per la proprietà (3) della proposizione 1 si ha $\lim_n \int_A g_n\, d\gamma = = \int_A g d\gamma$. Perciò $\int_A g d\gamma \leq T(g) \leq \lim_n \frac{1}{2^n} \gamma\{x : g(x) > 0\} + \int_A g d\gamma$.

Essendo $\gamma\{x : g(x) > 0\} < +\infty$ si conclude con l'uguaglianza richiesta $T(g) = \int_A g d\gamma$, qualora $g \in \mathbf{B}$ limitata, $\gamma \{ x : g(x) > 0 \} <$ $< +\infty$ e $g \leq 1$.

Se la funzione $g \leq M$, si ha ancora l'uguaglianza $T(g) = \int_A g d\gamma$ per l'omogeneità dei due integrali monotoni T e $\int_A - d\gamma$.

2° CASO. Sia $g \in \mathbf{B}$ e $\gamma \{ x : g(x) > 0 \} < +\infty$. Dal 1° caso segue $T(g \wedge n) = \int_A (g \wedge n)\, d\gamma$ per ogni $n \in \mathbf{N}$. Quindi per la proprietà (vi) della definizione di integrale monotono si ha $T(g) = \lim_n T(g \wedge n) =$ $= \lim \int_A (g \wedge n)\, d\gamma = \int_A g\, d\gamma$.

3° CASO. Sia $g \in \mathbf{B}$. Se per qualche $\tau > 0$ accade che $\gamma \{ x : g(x) > \tau \} = +\infty$. Allora $\tau \varphi_{\} x : (x) > \tau \{} \leq g$; quindi per (*b*) si ha $T(g) \geq \tau \gamma \{ x : g(x) > \tau \} = +\infty$ e per la monotonia dell'integrale monotono $\int_A - d\gamma$ si ha $\int_A g\, d\gamma \geq \int_A \left(\tau \varphi_{\} x : g(x) > \tau \{} \right) d\gamma =$ $= \tau \gamma \{ x : g(x) > \tau \} = +\infty$. Perciò $T(g) = \int_A g\, d\gamma$. Invece se per ogni $\tau > 0$ è $\gamma \{ x : g(x) > \tau \} < +\infty$, la funzione $g \vee \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^n}$ ricade nel caso precedente.

Quindi per la proprietà (vii) dell'integrale monotono si ha

$$T(g) = \lim_n T\left(g \vee \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^n}\right) = \lim_n \int_A \left(g \vee \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^n}\right) d\gamma = \int_A g\, d\gamma .$$

ESEMPIO 1°. Sia $C_0^+(\mathbb{R}^n)$ l'insieme di tutte le funzioni continue, non negative e a supporto compatto in $\mathbb{R}^n$. Sia μ una misura di Radon su $\mathbb{R}^n$. Sia $T : C_0^+(\mathbb{R}^n) \to [0, +\infty)$ l'applicazione definita da $T(g) = \int_{\mathbb{R}^n} g\, d\mu$. Allora T è un integrale monotono continuo per successioni crescenti. Se $B \subset \mathbb{R}^n$ è limitato si ha $\alpha_T(B) = \mu(\bar{B})$ e $\beta_T(B) = \mu(\mathring{B})$.

ESEMPIO 2°. Sia $C_0^+(\mathbb{R}^n)$ come nell'esempio 1°. Sia $T : C_0^+(\mathbb{R}^n) \to$ $\to [0\,,\,+\infty)$ una applicazione con le proprietà:

(1) $T(\lambda g) = \lambda\, T(g)\,,$ per $\lambda \in [0\,,\,+\infty)$ e $g \in C_0^+(\mathbb{R}^n)$

(2) $g \le f \Rightarrow T(g) \le T(f)\,,$ per $g\,,\ f \in C_0^+(\mathbb{R}^n)$

(5) $T(g) = T(g \wedge \lambda) + T(g \vee \lambda - \lambda)\,,$ per $\lambda \in [0\,,+\infty)$ e $g \in C_0^+(\mathbb{R}^n)$

Allora T è un integrale monotono continuo per successioni crescenti. Inoltre se $B \subset \mathbb{R}^n$ è un insieme limitato e γ rappresenta T, si ha $\beta_T(B) = \beta_T(\mathring{B}) = \lim\limits_{\varrho\to 0+} \gamma(B'_\varrho)$ e $\alpha_T(B) = \alpha_T(\overline{B}) = \lim\limits_{\varrho\to 0+} \gamma(B''_\varrho)\,,$ dove $B'_\varrho = \{\, x \in \mathbb{R}^n : d(x\,,\,\mathbb{R}^n - B) > \varrho \,\}$ e $B''_\varrho = \{\, x \in \mathbb{R}^n : d(x\,,\,B) < \varrho \,\}\,.$

ESEMPIO 3°. Sia $(A\,,\,\geq)$ un insieme diretto e sia $\mathbf{B} =$ $\{\, f \in [0\,,\,+\infty\,]^A : \lim\limits_{x\in A} f(x)$ esiste $\}\,.$

L'applicazione $T : \mathbf{B} \to [0\,,\,+\infty]$ definita da $T(f) = \lim\limits_{x\in A} f(x)$ è un integrale monotono su $\mathbf{B}$. Le funzioni monotone α_T e β_T verificano le uguaglianze $\int\limits_A f d\alpha_T = \operatorname{maxlim}\limits_{x\in A} f(x)$ e $\int\limits_A f d\beta_T = \operatorname{minlim}\limits_{x\in A} f(x)$ per ogni $f \in [0\,,\,+\infty]^A\,.$

ESEMPIO 4°. Sia X uno spazio topologico e $C^+(X)$ l'insieme delle funzioni continue non negative. Ogni funzionale $M : C^+(X) \to [0, +\infty)$ lineare, cioè $M(\lambda f) = \lambda\, M(f)$ e $M(f+g) = M(f) + M(g)$, è un integrale monotono su $C^+(X)$. Le proprietà (i), (ii), (iii), (iv), (vi), (vii) seguono direttamente dalla linearità di M.

Per verificare la (vi), consideriamo una funzione $f \in C^+(X)$. La funzione $g = \sum\limits_{i=1}^{\infty} i[f \wedge i - f \wedge (i-1)]$ è una funzione continua in X e per ogni $n \in \mathbf{N}$ si ha $n(f \vee n - n) \le g$. Perciò $n\, M(f \vee n - n) \le$ $\le M(g) < +\infty$ per ogni $n \in \mathbf{N}$; dunque $\lim\limits_n M(f \vee n - n) = 0\,.$ In conclusione $M(g) = \lim\limits_n \left[M(g \wedge n) + M(g \vee n - n) \right] = \lim\limits_n M(g \wedge n)\,.$

2. – *Linearità dell'integrale monotono e insiemi regolari.*

In questo paragrafo studiamo le relazioni esistenti fra l'integrale monotono lineare e la misurabilità di funzioni. Più precisamente nel teorema 2 si dimostrerà che un integrale monotono T è lineare in $\mathbb{B}$ se e solo se esiste una funzione di insieme α che rappresenta T e che rende le funzioni di $\mathbb{B}$ α-misurabili. Iniziamo con la definizione di insieme misurabile secondo Cathéodory.

DEFINIZIONE 3. *Sia α una funzione d'insieme, definita in $\mathcal{P}(A)$. Diremo che $B \in \mathcal{P}(A)$ è α-misurabile se $\alpha(X) = \alpha(B \cap X) + \alpha(X - B)$ per ogni $X \in \mathcal{P}(A)$.*

Si deduce facilmente dalla definizione 5 che un insieme $B \in \mathcal{P}(A)$ è α-misurabile se e solo se $\int\limits_A f d\alpha = \int\limits_B f d\alpha + \int\limits_{A-B} f d\alpha$, $\forall f \in [0, +\infty]^A$ $\left(NB.\ \text{si pone} \int\limits_B f d\alpha = \int\limits_A f \varphi_B \, d\alpha\right)$, quando α è una funzione d'insieme monotona in $\mathcal{P}(A)$.

PROPOSIZIONE 2. *Sia α una funzione definita in $\mathcal{P}(A)$ tale che $\alpha(\varnothing) = 0$. Allora gli insiemi $\varnothing$, A sono α-misurabili e l'unione, l'intersezione, la differenza di due insiemi α-misurabili sono ancora α-misurabili.*

DEFINIZIONE 4. *sia α una funzione d'insieme definita in $\mathcal{P}(A)$. Sia $f \in [0, +\infty]^A$. Diremo che f è α-misurabile se l'insieme $\left\{\tau \in (0, +\infty) : \{x \in A : f(x) > \tau\} \text{ non è } \alpha\text{-misurabile}\right\}$ è numerabile.*

Osserviamo che ogni f α-misurabile e limitata è limite uniforme di una successione di funzioni semplici che sono combinazioni lineari di insiemi misurabili.

DEFINIZIONE 5. *Sia T un integrale monotono su $\mathbb{B} \subset [0, +\infty]^A$. Diremo che un insieme $B \in \mathcal{P}(A)$ è T-regolare se $\alpha_T(B) = \beta_T(B) < +\infty$.*

Indichiamo con $\mathcal{R}_T$ la famiglia degli insiemi T-regolari e con δ_T la funzione d'insieme definita in $\mathcal{R}_T$ dalla posizione $\delta_T(B) = \alpha_T(B)$.

Se l'integrale monotono T definito in $\mathbb{B}$ è finito, cioè $T(f) < +\infty$ per ogni $f \in \mathbb{B}$, si ottengono le uguaglianze: $\alpha_T(B) = \inf \{\delta_T(H) : H \in \mathfrak{R}_T, H \supset B\}$ e $\beta_T(B) = \sup\{\delta_T(H) : H \in \mathfrak{R}_T, H \subset B\}$ per ogni $B \in \mathcal{P}(A)$.

PROPOSIZIONE 3. *Sia T un integrale monotono su $\mathbb{B} \subset [0, +\infty]^A$. Sia $f \in [0, +\infty]^A$ e $\int_A f d\alpha_T < +\infty$. Allora $\int_A fd\,\beta_T = \int_A fd\,\alpha_T$ se e solo se l'insieme $K = \{\tau \in (0, +\infty) : \{x : f(x) > \tau\}$ non è T-regolare$\}$ è numerabile.*

PROVA. Posto $\varphi(\tau) = \alpha_T\{x : f(x) > \tau\}$ e $\psi(\tau) = \beta_T\{x : f(x) > \tau\}$ per $\tau \in (0, +\infty)$, si ha $\int_A fd\beta_T = \int_0^{+\infty} \psi(\tau)\,d\tau$ e $\int_A fd\alpha_T = \int_0^{+\infty} \varphi(\tau)\,d\tau$.

Se $K = \{\tau \in (0, +\infty) : \varphi(\tau) \neq \psi(\tau)\}$ è numerabile, si ottiene $\int_0^{+\infty} \psi(\tau)\,d\tau = = \int_0^{+\infty} \varphi(\tau)$, quindi $\int_A fd\beta_T = \int_A fd\alpha_T$. D'altra parte, supponendo $\int_A fd\beta_T = = \int_A fd\alpha_T$, basta provare

(1) l'insieme $C = \left\{\tau \in (0, +\infty) : \varphi - \psi \text{ è continua in } \tau\right\}$ è numerabile.

(2) $\varphi(\tau) = \psi(\tau)$ per ogni $\tau \notin C$.

per dimostrare che l'insieme K è numerabile. L'insieme C è numerabile perchè le funzioni ψ e φ sono monotone. Le funzioni φ e ψ soddisfano la relazione $0 \leq \psi(\tau) \leq \varphi(\tau) < +\infty$ per ogni $\tau \in (0, +\infty)$, perchè $\int_A fd\alpha_T < +\infty$ e $\beta_T \leq \alpha_T$. Quindi $\varphi(\tau) - \psi(\tau) \geq 0$ per $\tau > 0$ e da $\int_A fd\beta_T = \int_A fd\alpha_T$ segue $\int_0^{+\infty} \big(\varphi(\tau) - \psi(\tau)\big)\,d\tau = 0$.

Perciò $\varphi(t) = \varphi(t)$ per ogni $\tau \in C$, perchè in ogni $\tau \in C$ la funzione $\varphi - \varphi$ è continua.

PROPOSIZIONE 4. *Sia α una funzione monotona d'insieme definita in $\mathcal{P}(A)$. Poniamo $\mathbb{B} = \{f \in [0, +\infty]^A : f$ è α-misurabile e*

$\int_A f d\alpha < +\infty \}$ e $T(f) = \int_A f d\alpha$ *per ogni* $f \in \mathbf{B}$. *Alloru per l'integrale montono* T *valgono le seguenti proprietà*:

(1) $\int_A f d\beta_T = \int_A f d\alpha_T < +\infty \Rightarrow f$ è *α-misurabile*

(2) $\int_A (f+g)\, d\alpha = \int_A f d\alpha + \int_A g d\alpha$, *per ogni* f e $g \in \mathbf{B}$

(3) *Se* f, $g \in \mathbf{B} \Rightarrow f \vee g$, $f \wedge g$, $f + g \in \mathbf{B}$

(4) *Se* f, $g \in \mathbf{B}$ e f, g *sono limitate in* $A \Rightarrow f \vee g - g \in \mathbf{B}$

PROVA

(1) Tenuto conto della definizione 4 e della proposizione 3, è sufficiente dimostrare che ogni insieme T-regolare è α-misurabile, per ottenere (1). Sia G un insieme T-regolare. Esistono due insiemi J e H α-misurabili tali che $J \supset G \supset H$ e $\alpha(J) - \varepsilon \leq \alpha(G) \leq \alpha(H) + \varepsilon$.

Quindi per ogni $B \in \mathcal{S}(A)$ si ha $\alpha(G) + \alpha(B) \geq \alpha(J) + \alpha(B) - \varepsilon \geq \geq \alpha(I \cap B) + \alpha(J \cup B) - \varepsilon \geq \alpha(G \cap B) + \alpha(G \cup B) - \varepsilon$, e $\alpha(G) + \alpha(B) \leq \leq \alpha(H) + \alpha(B) + \varepsilon \leq \alpha(G \cap B) + \alpha(G \cup B) + \varepsilon$. Dunque per ogni insieme $B \in \mathcal{S}(A)$ è verificata l'uguaglianza $\alpha(G) + \alpha(B) = \alpha(B \cap G) + + \alpha(G \cup B)$, cioè l'insieme G è α-misurabile.

(2) La linearità dell'integrale monotono $\int_A - d\alpha$ sulle funzioni semplici α-misurabili, cioè sulle combinazioni lineari a coefficienti positivi di funzioni caratteristiche di insiemi α-misurabili, è ovvia.

La linearità di $\int_A - d\alpha$ sulle funzioni α-misurabili limitate, si dimostra facilmente poichè ogni funzione α-misurabile limitata è limite uniforme di funzioni semplici α-misurabili.

Infine la linearità di $\int_A - d\alpha$ sulle funzioni α-misurabili non limitate, segue dalla linearità di $\int_A - d\alpha$ sulle funzioni limitate e α-misurabili e dalla disuguaglianza $(f+g) \wedge n \leq f \wedge n + g \wedge n \leq f + g$, valida per ogni $f, g \in [0, +\infty]^A$.

(3) Siano $f, g \in \mathbf{B}$. Le funzioni $f \vee g, f \wedge g$ sono α-misurabili perchè $\{x : [f \wedge g](x) > \tau\} = \{x : f(x) > \tau\} \cap \{x : g(x) > \tau\}$ e $\{x : [f \vee g](x) > \tau\} = \{x : f(x) > \tau\} \cap \{x : g(x) > \tau\}$ e l'intersezione o unione di insiemi α-misurabili è misurabile. Se f e g sono limitate e appartengono a $\mathbf{B}$, esiste una successione $\{s_n\}_n$ di funzioni semplici α-misurabili tali che $\{s_n\}_n$ converge uniformemente a $f+g$ e $s_n \leq f+g$ per ogni $n \in \mathbf{N}$. Quindi $\int_A (f+g) d\beta_T = \lim_n \int_A s_n d\beta_T = = \lim_n \int_A s_n d\alpha_T = \int_A (f+g) d\alpha_T$, cioè $f+g$ è α-misurabile per la proprietà (1). Se f e g sono funzioni qualsiasi appartenenti a $\mathbf{B}$, anche le funzioni $f \wedge n, g \wedge n$ appartengono a $\mathbf{B}$. Quindi

$$\int_A (f+g)\, d\beta_T \leq \int_A (f+g)\, d\alpha_T = \lim_n \int_A (f+g) \wedge n\, d\alpha_T \leq$$

$$\leq \lim_n \int_A f \wedge n\, d\alpha_T + \lim_n \int_A g \wedge n\, d\alpha_T = \lim_n \int_A f \wedge n\, d\beta_T +$$

$$+ \lim_n \int_A g \wedge n\, d\beta_T = \int_A f d\beta_T + \int_A g a\beta_T \leq \int_A (f+g)\, d\beta_T ,$$

perchè $(f+g) \wedge n \leq f \wedge n + g \wedge n \leq f+g$, $\int_A f \wedge n\, d\beta_T =$

$$= \int_A f \wedge n\, d\alpha_T \text{ e } \int_A g \wedge n\, d\beta_T = \int_A g \wedge n\, d\alpha_T .$$

Perciò $f+g$ è una funzione α-misurabile, poichè $\int_A (f+g)\, d\beta_T =$

$$= \int_A (f+g)\, d\alpha_T < +\infty .$$

(4) Siano f, g funzioni limitate, appartenenti a $\mathbf{B}$. Dimostriamo che $f \vee g - g \in \mathbf{B}$. La funzione $f \vee g - g$ è il limite uniforme di una successione $\{s_n\}_n$ di funzioni semplici α-misurabili tali che $s_n \leq f \vee g$ per ogni $n \in \mathbf{N}$. Per la proprietà (4) della preposizione 1 si ottiene

$$\int_A (f \vee g - g)\, d\beta_T = \lim_n \int_A s_n\, d\beta_T = \lim_n \int_A s_n\, d\alpha_T = \int_A (f \vee g - g)\, d\alpha_T .$$

Perciò la funzione $f \vee g - g$ è α-misurabile.

TEOREMA 2. *Sia* $T : \mathbf{B} \to [0\,,\,+\infty)$ *un integrale monotono su* $\mathbf{B} \subset [0\,,\,+\infty]^A$. *Se per ogni paio di funzioni* $f\,,\,g$ *limitate, appartenenti a* $\mathbf{B}$ *valgono le proprietà.*

(i) $f \wedge g\,, f \vee g\,, f \vee g - g \in \mathbf{B}$

(ii) $T(f) = T(f \wedge g) + T(f \vee g - g)$

allora (1) *la famiglia* $\mathcal{R}_T$ *degli insiemi* T*-regolari è un anello di insiemi* α_T *e* β_T*-misurabili.*

(2) *per ogni* $f \in [0\,,\,+\infty)^A$ *con* $\int_A f d\alpha_T < +\infty$ *si ha l'uguaglianza* $\int_A f d\beta_T = \int_A f d\alpha_T$ *se e solo se* f *è una funzione* α_T e β_T*-misurabile.*

PROVA. Siamo $G\,, F \in \mathcal{G}(A)$. Per ogni $g\,, \bar{g}\,, f\,, \bar{f} \in \mathbf{B}$ tali che $\bar{g} \le \varphi_G \le g \le 1$ e $\bar{f} \le \varphi_F \le f \le 1$ si ha $T(f) + T(g) = T(f \wedge g) + T(f \vee g\text{-}g) + T(g) = T(f \wedge g) + T(f \vee g) \ge \alpha_T(G \cup F) + \alpha_T(G \cap F)$ e $T(\bar{f}) + T(\bar{g}) = T(\bar{f} \vee \bar{g}) + T(\bar{f} \wedge \bar{g}) \le \beta_T(G \cup F) + \beta_T(G \cap F)$.

Quindi $\alpha_T(G) + \alpha_T(F) \geq \alpha_T(G \cup F) + \alpha_T(G \cap F)$ e $\beta_T(G \cup F) + \beta_T(G \cap F) \ge \beta_T(G) + \beta_T(F)$, per ogni $G\,, F \in \mathcal{G}(A)$. Perciò $\beta_T(G) + \beta_T(F) \le \beta_T(G \cup F) + \beta_T(G \cap F) \le \alpha_T(G \cup F) + \alpha_T(G \cap F) \le \alpha_T(G) + \alpha_T(F)$, per ogni G e $F \in \mathcal{G}(A)$, perchè $\beta_T \le \alpha_T$. Pertanto se G e F sono insiemi T-regolari si ottiene $\beta_T(G) + \beta_T(F) = \beta_T(G \cup F) + \beta_T(G \cap F) = \alpha_T(G \cup F) + \alpha_T(G \cap F) = \alpha_T(G) + \alpha_T(F)$, dunque gli insiemi $G \cup F$ e $G \cap F$ sono T-regolari e $\delta_T(G) + \delta_T(F) = \delta_T(G \cap F) + \delta_T(G \cup F)$.

Siano G e F insiemi T-regolari e sia $G \supset F$. Allora $G\text{-}F$ è T-regolare. Infatti per ogni $\varepsilon > 0$ esistono delle funzioni $g\,, \bar{g}\,, f\,, \bar{f}$ appartenenti a $\mathbf{B}$ tali che $\bar{g} \le \varphi_G \le g \le 1$, $\bar{f} \le \varphi_F \le f \le 1$, $T(g) - T(\bar{g}) < \varepsilon$ e $T(f) - T(\bar{f}) < \varepsilon$. Le funzioni $g\text{-}\bar{f}$ e $\bar{g} \vee f\text{-}f$ appartengono a $\mathbf{B}$ per la proprietà (i) e sono tali che $g\text{-}\bar{f} \ge \varphi_{G-F} \ge \bar{g} \vee f\text{-}f$. Allora $T(g\text{-}\bar{f}) - T(\bar{g} \vee f\text{-}f) = T(g) - T(\bar{f}) - T(\bar{g} \vee f) + T(f) \le [T(f) - T(\bar{f})] + [T(g) - T(\bar{g})] \le 2\,\varepsilon$. Dunque l'insieme $G\text{-}F$ è T-regolare e la famiglia $\mathcal{R}_T$ è un anello.

Per dimostrare la misurabilità di un insieme T-regolare G rispetto alle funzioni d'insieme a_T e β_T, è sufficiente verificare che

$$(*)\ a_T(B) = a_T(G \cap B) + a_T(B\text{-}G) \text{ per ogni } B \subset A$$

$$(**)\ \beta_T(B) = \beta_T(G \cap B) + \beta_T(B\text{-}G) \text{ per ogni } B \subset A$$

Le disuguaglianze $a_T(B) \leq a_T(B \cap G) + a_T(B - G)$ e $\beta_T(B) \geq \geq \beta_T(B \cap G) + \beta_T(B - G)$ sono state verificate nella prima parte della prova del teorema in questione. Perciò restano da verificare le disuguaglianze opposte: $a_T(B) \geq a_T(B \cap G) + a_T(B-G)$ e $\beta_T(B) \leq \leq \beta_T(B \cap G) + \beta_T(B - G)$ per ogni $B \subset A$. Siano H e Z insiemi T-regolari tali che $H \subset B \subset Z$. Si ha $\delta_T(H) = \delta_T(H \cap G) + \delta_T(H - G) \leq \leq \beta_T(B \cap G) + \beta_T(B - G)$ e $\delta_T(Z) = \delta_T(Z \cap G) + \delta_T(Z - G) \geq a_T(B \cap G) + a_T(B-G)$. Quindi $a_T(B) \geq a_T(B \cap G) + a_T(B-G)$ e $\beta_T(B) \leq \beta_T(B \cap G) + + \beta_T(B - G)$, perchè $a_T(B) = \inf \{\delta_T(Z) : Z \in \mathfrak{R}_T , Z \supset B\}$ e $\beta_T(B) = = \sup \{\delta_T(H) : H \in \mathfrak{R}_T , H \supset B\}$. Dunque ogni insieme G T-regolare è a_T-misurabile e β_T-misurabile.

Per completare la prova del teorema rimane da dimostrare la proprietà (2). In virtù della proposizione 3 e della definizione 4, è sufficiente verificare la (2) quando f è la funzione caratteristica φ_B, di un insieme $B \subset A$. Perciò sia $B \subset A$ tale che $a_T(B) = \beta_T(B) < +\infty$. L'insieme B è T-regolare. Quindi l'uguaglianza $a_T(B) = \beta_T(B)$ implica che l'insieme B è a_T e β_T-misurabile, per quanto scritto sopra.

Invece se B è un insieme a_T e β_T-misurabile, risulta che B è T-regolare, cioè $a_T(B) = \beta_T(B)$. Infatti esiste un insieme G T-regolare che contiene B, perchè $a_T(B) = \inf \{\delta_T(H) : H \in \mathfrak{R}_T , H \supset B\}$. Per la proprietà (1) sappiamo che G è a_T e β_T-misurabile. Dalla misurabilità di B segue che $\beta_T(G) = \beta_T(B) + \beta_T(G - B)$ e $a_T(G) = a_T(B) + + a_T(G - B)$. Dunque $\beta_T(B) + \beta_T(G - B) = a_T(B) + a_T(G\text{-}B)$, cioè $a_T(B) = \beta_T(B)$ perchè $a_T \geqq \beta_T$.

Osservazione Sia T un integrale monotono, soddisfacente le ipotesi del teorema 2. Non è vero, in generale, che per ogni $\gamma \in [\beta_T , a_T]$ le funzioni $f \in \mathbf{B}$ siano γ-misurabili. Infatti si consideri l'integrale monotono T, descritto nell'esempio 3, quando l'insieme diretto $(A , \geq)$ è l'insieme dei numeri naturali $\mathbf{N}$ dotato dell'ordinamento usuale. La funzione d'insieme $\gamma \in [\beta_T , a_T]$, definita sugli insiemi B non T-regolari dalla posizione $\gamma(B) = \dfrac{1}{n_B + 1}$ dove $n_B = \min \{n \in B\}$, non rende misurabili gli insiemi T-regolari ; mentre gli insiemi T-regolari sono γ-misurabili per ogni $\gamma \in [\beta_T, \alpha_T]$ che rende γ-misurabili le funzioni $f \in \mathbb{B}$.

3. – *Integrale monotono e misure esterne.*

In questo paragrafo diamo le proprietà necessarie e sufficienti affinchè un integrale monotono sia rappresentabile come un integrale associato ad una misura esterna.

Per misura esterna μ intendiamo una funzione d'insieme monotona $\mu : \mathcal{P}(A) \to [0, +\infty]$, numerabilmente subadditiva, cioè $\mu(H) \leq \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(H_i)$ se $H \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} H_i$.

TEOREMA 3. *Sia* $T : \mathbb{B} \to [0, +\infty)$ *un integrale monotono su* $\mathbb{B} \subset [0, +\infty]^A$. *Se valgono le seguenti proprietà*

(i) $g \wedge f, g \vee f, g \vee f\text{-}f \in \mathbb{B}$ se $g, f \in \mathbb{B}$ e g, f *sono limitate*

(ii) $T(g) = T(g \wedge f) + T(g \vee f\text{-}f)$ se $g, f \in \mathbb{B}$ e g, f *sono limitate*

(iii) $T(g) \leq \sum_{i=1}^{\infty} T(g_i)$, se $g, g_i \in \mathbb{B}$, $g \leq \sum_{i=1}^{\infty} g_i$, g e g_i *sono limitate*

allora la funzione d'insieme μ *definita da*

$$\mu(B) = \inf \{ \sum_{i=1}^{\infty} \delta_T(H_i) : H \in \mathcal{R}_T \text{ e } \bigcup_{i=1}^{\infty} H_i \supset B \} \quad \textit{per ogni} \quad B \subset A$$

è la massima misura esterna che rappresenta T *e ogni* $f \in \mathbb{B}$ *è* μ*-misurabile.*

PROVA. Per il teorema 2 gli insiemi T-regolari formano un anello e δ_T è additiva in $\mathcal{R}_T$, cioè $\delta_T(H \cup G) = \delta_T(H) + \delta_T(G)$ se H e G sono insiemi T-regolari disgiunti. Gli insiemi T-regolari sono μ-misurabili. Infatti sia $H \in \mathcal{R}_T$ e $B \subset A$ con $\mu(B) < +\infty$. Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\{ H_i \}_i \subset \mathcal{R}_T$ tale che $\mu(B) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \delta_T(H_i)\text{-}\varepsilon$. Quindi $\mu(B) + \varepsilon \geq \sum_{i=1}^{\infty} \delta_T(H_i \cap H) + \sum_{i=1}^{\infty} \delta_T(H_i - H) \geq \mu(B \cap H) + \mu(B - H)$. Perciò $\mu(B) \geq \mu(B \cap H) + \mu(B - H)$.

Da quest'ultima disuguaglianza e dalla subadditività di μ segue che $\mu(B) = \mu(B \cap H) + \mu(B - H)$ per ogni $B \subset A$ e $H \in \mathfrak{R}_T$. Dunque gli insiemi T-regolari sono μ-misurabili. Per il teorema 1 la funzione d'insieme μ rappresenta T, cioè $T(f) = \int_A f d\mu$ per ogni $f \in \mathbf{B}$, se e solo se $\mu(H) = \delta_T(H)$ per ogni insieme H T-regolare.

Per avere $\mu | \mathfrak{R}_T = \delta_T$, è sufficiente dimostrare che δ_T è numerabilmente subadditiva in $\mathfrak{R}_T$. Allora sia $H \subset \sqcup H_i$ con $H \in \mathfrak{R}_T$ e $H_i \in \mathfrak{R}_T$, proviamo che $\delta_T(H) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \delta_T(H_i)$. Per ogni $g \in \mathbf{B}$, $g \leq \varphi_H$ e per ogni $g_i \in \mathbf{B}$, $\varphi_{H_i} \leq g_i \leq 1$ si ha $g \leq \sum_{i=1}^{\infty} g_i$. Quindi per la proprietà (iii) si ottiene $T(g) \leq \sum_{i=1}^{\infty} T(g_i)$, cioè $\beta_T(H) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_T(H_i)$. Essendo H e H_i insiemi T-regolari, si ha $\delta_T(H) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \delta_T(H_i)$, cioè δ_T è numerabilmente subadditiva e la funzione d'insieme μ coincide con δ_T sugli insiemi T-regolari.

OSSERVAZIONE

Altre espressioni della funzione d'insieme μ descritta nel teorema 3 sono:

1) $\mu(B) = \inf \{ \sum_{i=1}^{\infty} T(g_i) : g_i \in \mathbf{B} \text{ e } \sum_{i=1}^{\infty} g_i \geq \varphi_B \}$ per ogni $B \subset A$

2) $\mu(B) = \inf \{ \sum_{i=1}^{\infty} T(g_i) : g_i \in \mathbf{B} \text{ e } \sup_i g_i \gtrsim \varphi_B \}$ per ogni $B \subset A$

3) $\mu(B) = \inf \{ \lim_i T(g_i) : \{ g_i \}_i \subset \mathbf{B}, g_i \leq g_{i+1}, \lim_i g_i \geq \varphi_B \}$ se $\mathbf{B}$ è chiusa rispetto alle somme.

4) $\mu(B) = \inf \{ \sum_{i=1}^{\infty} \beta_T(H_i) : H_i \in P(A), \bigsqcup_{i=1}^{\infty} H_i \supset B \}$, dove $P(A)$ è la famiglia degli insiemi $H = \{ x : f(x) > \tau \}$ per qualche $f \in \mathbf{B}$ e $\tau \in (0, +\infty)$.

5) $\mu(B) = \inf \{ \beta_T(H) : H \in P(A), H \supset B \}$, Se $P(A)$ è come in 4) ed è chiuso rispetto alle unioni numerabili.

ESEMPIO 5°. Sia X uno spazio topologico e $C^+(X)$ l'insieme delle funzioni continue non negative. Ogni funzione $M : C^+(x) \to [0\,, +\infty)$ lineare è un integrale monotono [vedi esempio 4] che verifica le ipotesi del teorema 3. Se si indica con $P(X)$ la famiglia degli insiemi aperti $H = \{ x : f(x) > \tau \}$ per qualche $f \in C^+(X)$ e $\tau \in (0\,, +\infty)$, la misura esterna μ definita dalla posizione $\mu(B) = \inf \{ \beta_T(H) : H \in P(X)\,, H \supset B \}$, è tale che $M(f) = \int_X f d\mu$ per ogni $f \in C^+(X)$ e ogni $f \in C^+(X)$ è μ-misurabile.

Manoscritto pervenuto in redazione il 4 marzo 1977.