RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

L. G. PACCAGNELLA

Un confronto tra densità

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 56 (1976), p. 85-90

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1976__56__85_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 56 (1977)

Un confronto tra densità.

L. G. PACCAGNELLA (*)

SUNTO - Si presenta un raffronto tra la densità secondo Besicovitch ed una una densità reticolare. Si conclude con alcune disuguaglianze tra i limiti superiori ed inferiori di tali densità.

La *k-densità superiore* e la *k-densità inferiore* di un insieme $E \subset \boldsymbol{R}^n$ in un punto $x \in \boldsymbol{R}^n$, relative ad una misura esterna μ, sono definite come il massimo e minimo limite, rispettivamente, del rapporto

$$\frac{\mu(E \cap I(x, \varrho))}{\omega_k \varrho^k}$$

per $\varrho \to 0^+$, dove $I(x, \varrho)$ è la sfera aperta in $\boldsymbol{R}^n$ di centro x e raggio ϱ, ed ω_k è la misura di Lebesgue della sfera di raggio 1 in $\boldsymbol{R}^k$. Esse vengono indicate con i simboli $\bar{\theta}_k(x, \mu, E)$ e $\underline{\theta}_k(x, \mu, E)$ (per le definizioni vedi ad esempio [F.]). Nel caso in cui si abbia $\bar{\theta}_k(x, \mu, E) = \underline{\theta}_k(x, \mu, E)$, tale valore viene chiamato k-densità dell'insieme E nel punto x e lo si indica con $\theta_k(x, \mu, E)$.

Besicovitch si occupò della densità θ_1 relativa alla misura $\mathcal{H}_1$ per gli insiemi $E \subset \boldsymbol{R}^2$ (v. [B.]). La densità θ_k, nel caso generale $k \geqslant 1$ ed $n \geqslant 2$, si trova negli studi di vari autori (v. ad es. [F.], [M.]). Un altro tipo di densità, che viene chiamata « *net-density* », è definita nel modo

---

(*) Indirizzo dell'A.: Istituto di Matematica Applicata dell'Università - Via Belzoni 7 - 35100 Padova.

Lavoro eseguito mentre l'A. godeva di una borsa di studio del C.N.R. per laureandi.

seguente (cfr. [H.]): prendiamo l'insieme $\boldsymbol{R}^n$ dotato della metrica definita da $\varrho(x, y) = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{|x_i - y_i|\}$ ed un numero intero positivo p; consideriamo il cubo semiaperto di lato p^{-m}, i cui vertici sono tutti del tipo $(k_1 p^{-m}, \dots, k_n p^{-m})$ con $k_1, \dots, k_n$ interi, chiamato cilindro p-adico di rango m. Per ogni $x \in \boldsymbol{R}^n$ indichiamo con $u_m(x)$ l'unico cilindro p-adico di rango m contenente x e consideriamo quindi una funzione non decrescente h di variabile reale $t \geqslant 0$, per la quale è $h(t) = 0$ se e solo se $t = 0$. Presa una misura m su $\boldsymbol{R}^n$, si chiama $\overline{\mathcal{U}}$-*densità superiore* di m in x e si indica con $\overline{\mathcal{U}}_h m(x)$, il massimo limite, per $n \to +\infty$, del rapporto

$$\frac{m(u_n(x))}{h(p^{-n})}\,. \tag{1}$$

In maniera analoga si definiscono la $\underline{\mathcal{U}}$-*densità inferiore* e la $\mathcal{U}$-*densità*. Hawkes utilizza la densità $\overline{\mathcal{U}}$ per lo studio della indipendenza di insiemi « piccoli », definita in termini di ε-entropia, importante in teoria dell'informazione.

Richiamiamo ora alcuni risultati sulle proprietà di θ_k; la loro dimostrazione si può trovare ad esempio in [F.].

TEOREMA 1. *Sia μ una misura esterna metrica regolare e sia E un insieme μ-misurabile di misura μ localmente finita nell'insieme aperto A. In $\mathcal{H}_k$-quasi tutti i punti $x \in A \setminus E$ si ha: $\theta_k(x, \mu, E) = 0$. In particolare, se E è μ-misurabile ed è $\mu(E) < \infty$, in $\mathcal{H}_k$-quasi tutti i punti di $\boldsymbol{R}^n \setminus E$ si ha: $\theta_k(x, \mu, E) = 0$.*

Per la densità superiore abbiamo inoltre che: *se $E \subset \boldsymbol{R}^n$ e $\mathcal{H}_k(E) < \infty$, in $\mathcal{H}_k$-quasi tutti i punti $x \in E$ è:*

$$2^{-k} \leqslant \bar{\theta}_k(x, \mathcal{H}_k, E) \leqslant 1\,. \tag{2}$$

Sono stati inoltre stabiliti, per entrambe le densità superiori, $\bar{\theta}_k$ e $\overline{\mathcal{U}}_k$, relative ad una misura μ, teoremi che, a partire da opportune limitazioni di tali densità, mettono in relazione la misura μ con la misura k-dimensionale di Hausdorff (v. [F.], [H.]).

1. Confronto tra le densità θ_k e $\mathcal{U}_k$.

Consideriamo ora $\boldsymbol{R}^n$ dotato della metrica euclidea. Sia E un sottoinsieme di $\boldsymbol{R}^n$ e k un intero positivo. Definiamo la misura esterna intersezione $m_{k,E}$ nel modo seguente: $m_{k,E}(A) = \mathcal{H}_k(E \cap A)$ per ogni $A \subset \boldsymbol{R}^n$. Se ora nelle due definizioni di densità superiore prendiamo, come misura, la misura esterna intersezione $m_{k,E}$, otteniamo:

$$\bar{\theta}_k(x, \mathcal{H}_k, E) = \limsup_{\varrho \to 0^+} \frac{\mathcal{H}_k(E \cap I(x, \varrho))}{\omega_k \varrho^k} \tag{3}$$

$$\overline{\mathcal{U}}_k m_{k,E}(x) = \limsup_{n \to +\infty} \frac{\mathcal{H}_k(E \cap u_n(x))}{(p^{-n})^k} = \overline{\mathcal{U}}_k(x, \mathcal{H}_k, E) \tag{4}$$

dove in (4) si è presa, rispetto alla (1), la particolare funzione $h(t) = t^k$.

TEOREMA 1.1. *Sia $E \subset \boldsymbol{R}^n$. Per ogni punto $x \in \boldsymbol{R}^n$ si ha:*

$$\overline{\mathcal{U}}_k(x, \mathcal{H}_k, E) \leqslant \omega_k (\sqrt{n})^k \bar{\theta}_k(x, \mathcal{H}_k, E) .$$

DIMOSTRAZIONE. Posto $\varrho_m = \sqrt{n} p^{-m}$, si ha, per ogni m, $I(x, \varrho_m) \supset$ $\supset u_m(x)$ e quindi $\mathcal{H}_k(E \cap I(x, \varrho_m)) \geqslant \mathcal{H}_k(E \cap u_m(x))$.

Ne segue che

$$\frac{\mathcal{H}_k(E \cap I(x, \varrho_m))}{\omega_k \varrho_m^k} \geqslant \frac{\mathcal{H}_k(E \cap u_m(x))}{\omega_k (\sqrt{n})^k (p^{-m})^k}$$

e pertanto si ha

$$\limsup_{m \to +\infty} \frac{\mathcal{H}_k(E \cap I(x, \varrho_m))}{\omega_k \varrho_m^k} \geqslant \limsup_{m \to +\infty} \frac{\mathcal{H}_k(E \cap u_m(x))}{\omega_k (\sqrt{n} p^{-m})^k} .$$

Dalle definizioni di $\bar{\theta}_k$ e $\overline{\mathcal{U}}_k$ possiamo concludere che:

$$\bar{\theta}_k(x, \mathcal{H}_k, E) \geqslant \limsup_{m \to +\infty} \frac{\mathcal{H}_k(E \cap I(x, \varrho_m))}{\omega_k \varrho_m^k} \geqslant$$

$$\geqslant \limsup_{m \to +\infty} \frac{\mathcal{H}_k(E \cap u_m(x))}{\omega_k (\sqrt{n} p^{-m})^k} = \frac{\overline{\mathcal{U}}_k(x, \mathcal{H}_k, E)}{\omega_k (\sqrt{n})^k} .$$

COROLLARIO 1. *Se $E \subset \boldsymbol{R}^n$, in ogni punto $x \in \boldsymbol{R}^n$ nel quale si abbia $\bar{\theta}_k(x, \mathcal{H}_k, E) = 0$ è anche*

$$\overline{\mathcal{U}}_k(x, \mathcal{H}_k, E) = 0 .$$

Non è generalmente vero il viceversa, cioè che da $\overline{\mathcal{U}}_k(x, \mathcal{H}_k, E) = 0$

segua che $\bar{\theta}_k(x, \mathcal{H}_k, E) = 0$. Infatti possono esistere punti x nei quali è $\overline{\mathfrak{U}}_k(x, \mathcal{H}_k, E) = 0$, mentre non solo è $\bar{\theta}_k(x, \mathcal{H}_k, E) > 0$, ma anche $\underline{\theta}_k(x, \mathcal{H}_k, E) > 0$. Consideriamo a tale scopo come insieme E una retta di $\boldsymbol{R}^2$ con coefficiente angolare negativo ed un punto x su di essa che sia, per ogni m, vertice di $u_m(x)$: avremo

$$\bar{\theta}_1(x, \mathcal{H}_1, E) = \underline{\theta}_1(x, \mathcal{H}_1, E) = 1$$

come in ogni altro punto di E, mentre abbiamo

$$\overline{\mathfrak{U}}_1(x, \mathcal{H}_1, E) = 0 \, .$$

Osservazione. Dal teorema 1 e dal precedente corollario segue che: *se $E \subset \boldsymbol{R}^n$ è un insieme $\mathcal{H}_k$-misurabile di misura $\mathcal{H}_k$ localmente finita in $\boldsymbol{R}^n$, in $\mathcal{H}_k$-quasi tutti i punti di $\boldsymbol{R}^n \setminus E$ si ha*

$$\overline{\mathfrak{U}}_k(x, \mathcal{H}_k, E) = 0 \, .$$

Corollario 2. *Sia $E \subset \boldsymbol{R}^n$ un insieme di misura $\mathcal{H}_k$ localmente finita nell'insieme aperto A. In $\mathcal{H}_k$-quasi tutti i punti $x \in A$*

$$\overline{\mathfrak{U}}_k(x, \mathcal{H}_k, E) \leqslant \omega_k (\sqrt{n})^k \, .$$

Dimostrazione. Segue dal teorema 1.1 tenendo presente che in $\mathcal{H}_k$-quasi tutti i punti $x \in A$ è $\bar{\theta}_k(x, \mathcal{H}_k, E) \leqslant 1$ (v. (2)).

Teorema 1.2. *Sia $E \subset \boldsymbol{R}^n$ unione finita o numerabile di insiemi E_i,* $\mathcal{H}_k$-misurabili, e sia $0 < \mathcal{H}_k(E) < \infty$. In $\mathcal{H}_k$-quasi tutti i punti $x \in E$ *risulta*

$$\overline{\mathfrak{U}}_k(x, \mathcal{H}_k, E) = \overline{\mathfrak{U}}_k(x, \mathcal{H}_k, E_i) \tag{5}$$

essendo E_i quell'insieme della famiglia (E_i) al quale appartiene il punto x.

Dimostrazione. Per ogni i, l'insieme $E \setminus E_i$ è $\mathcal{H}_k$-misurabile e di misura $\mathcal{H}_k$ finita. Pertanto in $\mathcal{H}_k$-quasi tutti i punti $x \in E_i$ si ha, per l'osservazione precedente,

$$\overline{\mathfrak{U}}_k(x, \mathcal{H}_{\bar{k}}, E \setminus E_i) = 0 \, .$$

Ora, essendo E $\mathcal{H}_k$-misurabile, abbiamo, per ogni $x \in E_i$ ed ogni m,

$$\mathcal{H}_k(E \cap u_m(x)) = \mathcal{H}_k(E \cap E_i \cap u_m(x)) + \mathcal{H}_k((E \setminus E_i) \cap u_m(x)) .$$

Perciò

$$\sup_{n \leqslant m} \frac{\mathcal{H}_k(E \cap u_m(x))}{(p^{-m})^k} \leqslant \sup_{n \leqslant m} \frac{\mathcal{H}_k(E_i \cap u_m(x))}{(p^{-m})^k} + \sup_{n \leqslant m} \frac{\mathcal{H}_k((E \setminus E_i) \cap u_m(x))}{(p^{-m})^k}$$

e quindi, passando al limite per $n \to +\infty$, abbiamo, per ogni $x \in E_i$

$$\overline{\mathcal{U}}_k(x, \mathcal{H}_k, E) \leqslant \overline{\mathcal{U}}_k(x, \mathcal{H}_k, E_i) + \overline{\mathcal{U}}_k(x, \mathcal{H}_k, E \setminus E_i).$$

Per la monotonia della misura $\mathcal{H}_k$ è anche $\overline{\mathcal{U}}_k(x, \mathcal{H}_k, E) \geqslant \overline{\mathcal{U}}_k(x, \mathcal{H}_k, E_i)$ per ogni $x \in E_i$, e dunque: in $\mathcal{H}_k$-quasi tutti i punti $x \in E_i$ sarà

$$\overline{\mathcal{U}}_k(x, \mathcal{H}_k, E) = \overline{\mathcal{U}}_k(x, \mathcal{H}_k, E_i) .$$

Dal momento che gli E_i sono un'infinità numerabile, possiamo concludere con la (5).

TEOREMA 1.3. *Sia E un sottoinsieme di $\mathbf{R}^n$ e sia x un punto di E. Supponiamo che x sia sempre interno ad $u_m(x)$ per ogni m. Allora si ha:*

$$\underline{\mathcal{U}}_k(x, \mathcal{H}_k, E) \leqslant (\sqrt{n})^k p^k \omega_k \underline{\theta}_k(x, \mathcal{H}_k, E) . \tag{6}$$

DIMOSTRAZIONE. Ad ogni $\varrho > 0$ associamo il numero $m(\varrho)$ che è il minimo intero m per il quale si ha $\sqrt{n}p^{-m} < \varrho$ (poichè x è sempre interno, per m sufficientemente grande è $u_m(x) \subset I(x, \varrho)$ e quindi $\sqrt{n}p^{-m} < \varrho$). Abbiamo allora, per definizione di $m(\varrho)$, che $\sqrt{n}p^{-(m(\varrho)-1)} > \varrho$ e pertanto

$$\frac{\mathcal{H}_k(E \cap I(x, \varrho))}{\varrho^k} \geqslant \frac{\mathcal{H}_k(E \cap u_{m(\varrho)}(x))}{(\sqrt{n}p^{-(m(\varrho)-1)})^k} = \frac{\mathcal{H}_k(E \cap u_{m(\varrho)}(x))}{(p^{-m(\varrho)})^k} \cdot \frac{1}{(\sqrt{n}p)^k} .$$

Di qui, dato che per $\varrho \to 0^+$, $m(\varrho) \to +\infty$, si ha

$$\underline{\theta}_k(x, \mathcal{H}_k, E) = \liminf_{\varrho \to 0^+} \frac{\mathcal{H}_k(E \cap I(x, \varrho))}{\omega_k \varrho^k} \geqslant$$

$$\geqslant \liminf_{\varrho \to 0^+} \frac{\mathcal{H}_k(E \cap u_{m(\varrho)}(x))}{(p^{-m(\varrho)})^k} \cdot \frac{1}{(\sqrt{n}p)^k \omega_k} .$$

Dal momento che $m(\varrho)$ non assume, in generale, tutti i valori interi (positivi) consideriamo il minimo limite su tutti gli interi $m > 0$, avremo

$$\liminf_{\varrho\to 0^+} \frac{\mathcal{H}_k(E \cap u_{m(\varrho)}(x))}{(p^{-m(\varrho)})^k} \cdot \frac{1}{(\sqrt{n}\,p)^k \omega_k} \geqslant$$

$$\geqslant \liminf_{m\to+\infty} \frac{\mathcal{H}_k(E \cap u_m(x))}{(p^{-m})^k} \cdot \frac{1}{(\sqrt{n}\,p)^k \omega_k} = \frac{\mathcal{U}_k(x, \mathcal{H}_k, E)}{(\sqrt{n}\,p)^k \omega_k}\,.$$

e la (6) è dimostrata.

Ringrazio C. Minnaja per l'aiuto e i preziosi consigli che mi ha dato e A. Chiffi per alcuni utili suggerimenti.

BIBLIOGRAFIA

[B.] A. S. Besicovitch, *On the fundamental geometrical properties of linearly measurable plane sets of points, I*, Math. Ann., **98** (1928), pp. 422-464.

[F.] H. Federer, *The (φ, k) rectifiable subsets of n space*, Trans. Amer. Math. Soc., **62** (1947), pp. 114-192.

[H.] J. Hawkes, *Hausdorff measure, entropy, and the independence of small sets*, Proc. London Math. Soc., (3) **28** (1974), pp. 700-724.

[M.] E. F. Moore, *Density ratios and $(\varphi, 1)$ rectifiability in n space*, Trans. Amer. Math. Soc., **69** (1950), pp. 324-334.

Manoscritto pervenuto in Redazione il 9 dicembre 1975.