

RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

RAFFAELE ESPOSITO

ANTONIO ROMANO

**Sui fondamenti della termomeccanica
dei continui polari**

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 56 (1976), p. 49-66

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1976__56__49_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Sui fondamenti della termomeccanica dei continui polari.

RAFFAELE ESPOSITO (*) - ANTONIO ROMANO (*)

1. Introduzione.

E. e F. Cosserat [1] hanno proposto nel 1909 una teoria più generale dell'ordinaria Meccanica dei sistemi continui, e precisamente quella dei sistemi continui polari, in cui ciascuna particella ha 6 gradi di libertà in quanto ad essa è associata una terna rigida di direttori $\mathbf{d}^{(\alpha)}$ ($\alpha = 1, 2, 3$). Nelle equazioni indefinite della teoria, ottenute da un principio variazionale ed in assenza di fenomeni termici, intervengono le coppie di contatto che, tra l'altro, comportano la non simmetria del tensore degli sforzi.

Generalizzando un'idea di Ericksen e Truesdell [2], Toupin [3], nel 1964, ha proposto il modello dei mezzi orientati con più direttori, allungabili e non vincolati a restare mutuamente ortogonali, ottenendo le relative equazioni indefinite sempre a partire da un principio variazionale ed in assenza di fenomeni termici. In particolare egli ivi mostra che per i continui polari classici (nei quali, pur figurando coppie di contatto nelle equazioni indefinite, ogni particella del continuo ha ancora 3 gradi di libertà come nei continui semplici) la teoria corrispondente coincide con quella dei continui alla Cosserat a rotazioni

(*) Indirizzo degli AA.: Istituto Matematico dell'Università - Via Mezzocannone 8 - 80134 Napoli.

R. Esposito: lavoro eseguito nel periodo di godimento di una borsa di studio presso l'Istituto di Matematica dell'Università di Napoli.

A. Romano: lavoro eseguito nell'ambito delle attività del Gruppo Nazionale per la Fisica Matematica del C.N.R.

vincolate, in cui cioè la terna dei direttori ruota con la velocità angolare locale del mezzo.

Nel suddetto lavoro [3], Toupin non considera però, come si è detto, i fenomeni termici. La termomeccanica dei continui polari, per quanto concerne i polari classici a trasformazioni reversibili, è stata sviluppata da Grioli [3], [5], [6], [7], Bressan [8], Galletto [9] e Ferrarese [10]. Solo recentemente Kafadar e Erigen [11], estendendo il moderno assetto della termomeccanica dei continui semplici (cfr. ad es. [12]), hanno sviluppato la corrispondente teoria per i continui alla Cosserat a trasformazioni anche irreversibili pervenendo alla relativa diseuguaglianza di dissipazione ridotta ⁽¹⁾ e alle conseguenti restrizioni sulle equazioni costitutive. La suddetta diseuguaglianza è precisamente ottenuta utilizzando le ordinarie equazioni del bilancio per l'impulso, per il momento angolare e per l'energia scritte assumendo « a priori » che localmente sia valida la dinamica dei corpi rigidi, ossia che:

a) il momento specifico di spin \mathbf{k} sia una funzione lineare della velocità angolare microscopica \mathbf{v}^* , cioè $\mathbf{k} = \mathbf{J} \cdot \mathbf{v}^*$, dove \mathbf{J} è il tensore densità d'inerzia spaziale ⁽²⁾;

b) l'energia specifica di rotazione microscopica ε_R sia una funzione quadratica di \mathbf{v}^* data da $\varepsilon_R = \frac{1}{2} \mathbf{v}^* \cdot \mathbf{J} \cdot \mathbf{v}^*$;

c) il vettore corrente d'energia $\mathbf{P}_{(e)}$ coincida con il vettore $\mathbf{R}_{(e)} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{h} + \mathbf{M} \cdot \mathbf{v}^*$, dove \mathbf{T} è il tensore degli sforzi, \mathbf{h} è il vettore corrente di calore ed \mathbf{M} il tensore coppie di contatto;

d) per \mathbf{J} sussiste un'equazione, dedotta su basi cinematiche, che esprime la indipendenza dal tempo del tensore d'inerzia materiale ⁽³⁾.

Nel presente lavoro che, come [11], riguarda anch'esso i continui polari alla Cosserat, prescindendo da qualsiasi modello strutturale e quindi dall'ammissione di ipotesi particolari come le a), b), c) e d), vengono innanzitutto scritte, dopo alcuni richiami cinematici (n. 2), le equazioni del bilancio dell'impulso, del momento angolare e del

⁽¹⁾ Stante la citata osservazione di Toupin, tale diseuguaglianza è altresì utilizzabile per i continui polari classici a trasformazioni irreversibili naturalmente identificando in essa la velocità angolare della terna con quella locale del mezzo.

⁽²⁾ Cfr. [11], pag. 275.

⁽³⁾ Cfr. [11], pag. 275.

l'energia in una forma del tutto generale (n. 3) e si perviene (n. 4) alla conseguente diseuguaglianza di dissipazione ridotta.

Successivamente (n. 5), adottando equazioni costitutive dipendenti, oltre che dalle variabili già adottate in [11] (gradiente di deformazione \mathbf{F} , temperatura θ , parametri φ^i che individuano l'orientamento della terna \mathbf{d} e loro derivate spaziali $\partial_h \varphi^i$), anche dalle $\dot{\varphi}^i$ e da $\text{grad } \theta$, si deducono le restrizioni ad esse imposte dal principio di dissipazione e da quello d'oggettività.

In particolare si prova che:

α) l'energia libera specifica ψ è potenziale termodinamico, oltre che per l'entropia specifica η e per \mathbf{T} , anche per \mathbf{k} ;

β) introdotta la grandezza costitutiva extraflusso di energia $\mathbf{s} = \mathbf{P}_{(e)} - \mathbf{R}_{(e)}$, la determinazione di \mathbf{M} presuppone la conoscenza sia di ψ che di \mathbf{s} .

Si osservi che ψ , dipendendo da $\dot{\varphi}^i$, contiene anche l'energia di rotazione, sicchè il risultato α) prova che l'ipotesi a), fatta da Kafadar e Eringen in [11] non è indipendente dall'ipotesi b).

Nel n. 6 si effettua l'applicazione ad una classe particolare di materiali, le cui equazioni costitutive sono lineari nelle $\dot{\varphi}^i$, della teoria proposta al n. 5 e si trova che η e \mathbf{T} sono indipendenti dalle $\dot{\varphi}^i$; che $\mathbf{k} = \mathbf{J} \cdot \mathbf{v}^*$ e che \mathbf{M} dipende linearmente dalle $\dot{\varphi}^i$. Inoltre, si deduce un'equazione di evoluzione per \mathbf{J} equivalente all'equazione citata in d). Se, ancora più in particolare, si assuma $\mathbf{s} = \mathbf{0}$, i risultati del n. 6 si riducono a quelli determinati in [11].

Infine, al n. 7, sempre nell'ipotesi $\mathbf{s} = \mathbf{0}$ e nell'ambito della teoria lineare in $\dot{\boldsymbol{\phi}}$ sviluppata al n. precedente, si perviene ad una nuova forma del bilancio del momento angolare utilizzando il principio di oggettività. L'equazione così ottenuta generalizza quella proposta per le sostanze ferromagnetiche saturate da Schlömann [13] e Tiersten [14] a partire da modelli strutturali e successivamente utilizzata anche da Eringen e Maugin [15], [16] ed altri Autori per lo studio di queste sostanze.

2. Preliminari cinematici.

È ben noto che un continuo alla Cosserat è ottenuto associando alla generica particella X del sistema continuo \mathcal{S} una terna mobile, di origine X , costituita dai versori $(\mathbf{d}_{(1)}, \mathbf{d}_{(2)}, \mathbf{d}_{(3)})$, che ad ogni istante verificano

le condizioni:

$$(1) \quad \underset{(a)}{\mathbf{d}} \cdot \underset{(b)}{\mathbf{d}} = g_{ab} \quad (a, b = 1, 2, 3),$$

dove le g_{ab} sono costanti rispetto al tempo e $\det \|g_{ab}\| \neq 0$. Pertanto, se C^0 e C sono le configurazioni iniziale ed attuale di \mathcal{S} ed \mathbf{X} , \mathbf{x} rispettivamente i vettori di posizione della particella X nelle configurazioni C^0 e C , l'evoluzione di \mathcal{S} è determinata non soltanto dalle equazioni finite del moto di \mathcal{S}

$$(2) \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t),$$

ma anche dalle equazioni, soggette al vincolo (1),

$$(3) \quad \underset{(a)}{\mathbf{d}} = \underset{(a)}{\mathbf{d}}(\mathbf{X}, t),$$

che forniscono il moto della triade $\{\underset{(a)}{\mathbf{d}}\}$.

Dette $\underset{(a)}{\mathbf{d}}^0$ le determinazioni delle (3) all'istante $t = 0$, la condizione (1) impone che la trasformazione $\{\underset{(a)}{\mathbf{d}}^0\} \rightarrow \{\underset{(a)}{\mathbf{d}}\}$ sia ortogonale e come tale sia individuata da una matrice ortogonale $\chi \equiv (\chi_k^h)$. Pertanto,

$$(4) \quad \underset{(a)}{\mathbf{d}} = \chi \underset{(a)}{\mathbf{d}}^0, \quad \chi(\mathbf{X}, 0) = \mathbf{I},$$

dove \mathbf{I} è la matrice identica. La rotazione R , corrispondente alla matrice χ , è individuata dal versore $\mathbf{u} \equiv (u^i)$ dell'asse di rotazione \mathcal{A} e dall'angolo di rotazione $\theta \geq 0$ attorno ad \mathcal{A} . Poichè nel presente lavoro si opererà un confronto con la teoria di Kafadar e Eringen [11], si adotteranno, in luogo delle variabili indipendenti u^i, θ , quelle utilizzate dai suddetti Autori nel già citato lavoro, ossia le variabili

$$(5) \quad \varphi^i \equiv \theta u^i.$$

Inoltre, dall'essere

$$\chi \chi^T = \mathbf{I},$$

poichè χ è ortogonale, si ricava che

$$\dot{\chi} \chi^T = -\chi \dot{\chi}^T = -(\dot{\chi} \chi^T)^T$$

ossia che è antisimmetrico il tensore velocità angolare microscopica

$$(6) \quad \mathbf{v} = \dot{\boldsymbol{\chi}} \boldsymbol{\chi}^T.$$

Detto poi \mathbf{v}^* l'aggiunto di \mathbf{v} , è facile provare (cfr. [11] pag. 273) che

$$(7) \quad \mathbf{v}^* = \boldsymbol{\Lambda} \dot{\boldsymbol{\varphi}}$$

dove $\boldsymbol{\Lambda}$ è una opportuna matrice non singolare dipendente da $\boldsymbol{\varphi}$ ⁽⁴⁾.

3. Equazioni del bilancio per un continuo polare.

Siano \mathcal{S} il sistema continuo polare, V un generico volume materiale di bordo ∂V ed \mathbf{n} la normale esterna all'elemento di superficie $d\sigma$. Le equazioni del bilancio dell'impulso, del momento angolare e dell'energia nel generico riferimento inerziale I si scrivono:

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \int_V \rho \dot{\boldsymbol{x}} dV = \int_{\partial V} \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} d\sigma + \int_V \rho \mathbf{f} dV, \\ \frac{d}{dt} \int_V \rho [(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \wedge \dot{\boldsymbol{x}} + \mathbf{k}] dV = \\ \int_{\partial V} ((\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \wedge \mathbf{T} + \mathbf{M}) \cdot \mathbf{n} d\sigma + \int_V \rho [(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \wedge \mathbf{f} + \mathbf{L}] dV, \\ \frac{d}{dt} \int_V \rho \left(\frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{x}}^2 + e \right) dV = \\ = \int_{\partial V} (\dot{\boldsymbol{x}} \cdot \mathbf{T} + \boldsymbol{\Phi}) \cdot \mathbf{n} d\sigma + \int_V \rho (\mathbf{f} \cdot \dot{\boldsymbol{x}} + \mathbf{L} \cdot \mathbf{v}^* + q) dV \end{array} \right.$$

⁽⁴⁾ Si osservi che $\boldsymbol{\varphi} \equiv (\varphi_i)$ non si trasforma come un vettore per cambiamenti di coordinate e tuttavia, per semplicità, si userà la notazione vettoriale.

dove:

- ρ = densità di massa,
- \mathbf{T} = tensore degli sforzi,
- \mathbf{f} = forza specifica esterna,
- \mathbf{k} = momento specifico di spin,
- \mathbf{M} = tensore momento delle coppie di contatto,
- \mathbf{L} = momento delle coppie di volume esterne,
- e = energia specifica interna,
- Φ = flusso di energia (non prodotto dagli sforzi),
- q = « supply » di energia esterna,

e dove \mathbf{x}_0 è il vettore di posizione di un polo 0 arbitrario.

È da osservare che le equazioni del bilancio (8) si differenziano da quelle solitamente proposte per un continuo polare ⁽⁵⁾ dove si assume

$$(9) \quad \begin{cases} e = \frac{1}{2} \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}^* + \varepsilon_{(i)}, \\ \Phi = \mathbf{M} \cdot \mathbf{v}^* + \mathbf{h}, \\ \mathbf{k} = \mathbf{J} \cdot \mathbf{v}^*, \end{cases}$$

essendo \mathbf{h} il vettore corrente di calore, \mathbf{J} una matrice non singolare che definisce il tensore densità d'inerzia ed $\varepsilon_{(i)}$ è una densità di energia invariante che *non* dipende da \mathbf{v}^* .

Quando non si ricorra alle relazioni (9), dalle (8) mediante il teorema del trasporto, si deduce la seguente forma locale delle equazioni del bilancio:

$$(10) \quad \begin{cases} \rho \ddot{\mathbf{x}} = \text{div } \mathbf{T} + \rho \mathbf{f}, \\ \rho \dot{\mathbf{k}} = \dot{\mathbf{T}}^\lambda + \text{div } \mathbf{M} + \rho \mathbf{L}, \\ \rho \dot{\varepsilon} = \mathbf{T} : \text{grad } \dot{\mathbf{x}} + \text{div}(\mathbf{h} + \mathbf{s}) - \\ \quad - \rho \mathbf{k} \cdot \dot{\mathbf{v}}^* - \dot{\mathbf{T}}^\lambda \cdot \mathbf{v}^* + \mathbf{M} : \text{grad } \dot{\mathbf{v}} + \rho q, \end{cases}$$

⁽⁵⁾ Cfr. [3], [11].

dove $\dot{\mathbf{T}}^A$ è l'aggiunto della parte antisimmetrica di \mathbf{T} e dove si è posto

$$(11) \quad \Phi - \mathbf{M} \cdot \mathbf{v}^* = \mathbf{h} + \mathbf{s},$$

$$(12) \quad \varepsilon = e - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}^*.$$

Nella (11), \mathbf{s} è un « extra-flusso » di energia del quale occorre precisare l'equazione costitutiva ed ε nella (12) può dipendere da \mathbf{v}^* , diversamente da $\varepsilon_{(t)}$ nella (9)₁.

4. Diseguaglianza di dissipazione ridotta.

In questo numero si utilizzerà il 2° principio della termodinamica nella forma della disequaglianza di Clausius-Duhem:

$$(13) \quad \frac{d}{dt} \int_V \varrho \eta \, dV \geq \int_{\partial V} \frac{\mathbf{h} \cdot \mathbf{n}}{\theta} \, d\sigma + \int_V \varrho \frac{q}{\theta} \, dV,$$

dove $\theta > 0$ è la temperatura assoluta ed η l'entropia specifica. Localmente la (13) si scrive

$$(14) \quad \varrho \dot{\eta} \geq \operatorname{div} \left(\frac{\mathbf{h}}{\theta} \right) + \varrho \frac{q}{\theta}.$$

Da (11)_s e (14) si ottiene la seguente *disequaglianza di dissipazione ridotta*:

$$(15) \quad \begin{cases} -\varrho(\dot{\psi} + \eta\dot{\theta}) + \mathbf{T} : \operatorname{grad} \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{M} : \operatorname{grad} \dot{\mathbf{v}} + \operatorname{div} \mathbf{s} \\ -\dot{\mathbf{T}}^A \cdot \dot{\mathbf{v}} - \varrho \mathbf{k} \cdot \dot{\mathbf{v}}^* + \frac{\mathbf{h} \cdot \mathbf{g}}{\theta} \geq 0, \end{cases}$$

con $\mathbf{g} = \operatorname{grad} \theta$ e

$$(16) \quad \psi = \varepsilon - \theta \eta.$$

Per le considerazioni che seguiranno sarà utile ricavare la (15)

in termini di variabili materiali, cioè relative alla configurazione di riferimento. In proposito è facile verificare che la (15) può scriversi:

$$(17) \quad \left\{ \begin{array}{l} -(\dot{\psi} + \eta\dot{\theta}) + \frac{\mathbf{S}}{\varrho_*} : \dot{\mathbf{F}} + \frac{\mathcal{M}}{\varrho_*} : \text{Grad } \mathbf{v}^* + \frac{1}{\varrho_*} \text{Div } \boldsymbol{\Sigma} \\ -\frac{J}{\varrho_*} \mathbf{T}^A \cdot \dot{\mathbf{v}} - \mathbf{k} \cdot \dot{\mathbf{v}}^* + \frac{\mathbf{H} \cdot \text{Grad } \theta}{\varrho^* \theta} \geq 0 \end{array} \right.$$

essendo $\mathbf{F} \equiv (\partial x^i / \partial X^L)$ il gradiente di deformazione,

$$(18) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{S} = J(\mathbf{F}^{-1}) \mathbf{T}, \\ \boldsymbol{\Sigma} = J(\mathbf{F}^{-1}) \mathbf{s}, \\ \mathcal{M} = J(\mathbf{F}^{-1}) \mathbf{M}, \\ \mathbf{H} = J(\mathbf{F}^{-1}) \mathbf{h}, \end{array} \right.$$

ed inoltre gli operatori Div e Grad comportano derivazioni rispetto alle variabili materiali. Per ottenere la (17) si è fatto uso dell'identità:

$$\text{div} \left(\frac{1}{J} \mathbf{F} \right) = 0$$

e dell'equazione di continuità:

$$\varrho J = \varrho_* .$$

5. Equazioni costitutive e restrizioni ad esse imposte dal principio di dissipazione e da quello di oggettività.

Sinora nulla si è detto sulla natura del continuo polare, per precisare la quale occorre assegnare le equazioni costitutive. A tal fine, chiamato *processo termocinetico* l'insieme dei campi

$$\{\mathbf{x}(\mathbf{X}, t), \theta(\mathbf{X}, t), \underset{(a)}{\mathbf{d}}(\mathbf{X}, t)\}$$

Inoltre da (7) segue:

$$(23) \quad \begin{cases} \text{Grad } \mathbf{v}^* = \text{Grad } \mathbf{\Lambda} \cdot \dot{\boldsymbol{\varphi}} + \mathbf{\Lambda} \cdot \text{Grad } \dot{\boldsymbol{\varphi}}, \\ \mathbf{v}^* = \dot{\mathbf{\Lambda}} \cdot \dot{\boldsymbol{\varphi}} + \mathbf{\Lambda} \cdot \ddot{\boldsymbol{\varphi}}. \end{cases}$$

Sostituendo (21), (22) e (23) in (17) ed osservando che, per l'indipendenza delle variabili \mathbf{X} e t , risulta $\text{Grad } \dot{\boldsymbol{\varphi}} = \overline{\text{Grad } \boldsymbol{\varphi}}$, si perviene alla seguente diseguaglianza:

$$(24) \quad \left\{ \begin{aligned} & - \left[\eta + \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right] \dot{\theta} + \left[\frac{1}{\varrho_*} \mathbf{S} - \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{F}} \right] \dot{\mathbf{F}} - \\ & \qquad \qquad \qquad - \frac{\partial \psi}{\partial (\text{Grad } \theta)} \text{Grad } \dot{\theta} - \left[\mathbf{k} \cdot \mathbf{\Lambda} + \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\varphi}} \right] \dot{\boldsymbol{\varphi}} \\ & + \left[\frac{\mathcal{M}}{\varrho_*} \cdot \text{Grad } \mathbf{\Lambda} - \mathbf{k} \cdot \dot{\mathbf{\Lambda}} - \frac{\mathbf{J}}{\varrho_*} \dot{\mathbf{T}}^{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{\Lambda} - \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\varphi}} \right] \dot{\boldsymbol{\varphi}} \\ & + \left[\frac{\mathcal{M}}{\varrho_*} \cdot \mathbf{\Lambda} + \frac{1}{\varrho_*} \frac{\partial \Sigma}{\partial \dot{\boldsymbol{\varphi}}} - \frac{\partial \psi}{\partial (\text{Grad } \boldsymbol{\varphi})} \right] \text{Grad } \dot{\boldsymbol{\varphi}} + \frac{1}{\varrho_*} \frac{\partial \Sigma}{\partial \mathbf{F}} \text{Grad Grad } \mathbf{x} \\ & + \frac{1}{\varrho_*} \frac{\partial \Sigma}{\partial (\text{Grad } \theta)} \text{Grad Grad } \theta + \frac{1}{\varrho_*} \frac{\partial \Sigma}{\partial (\text{Grad } \boldsymbol{\varphi})} \text{Grad Grad } \boldsymbol{\varphi} \\ & + \frac{1}{\varrho_*} \frac{\partial \Sigma}{\partial \boldsymbol{\varphi}} \text{Grad } \boldsymbol{\varphi} + \frac{1}{\varrho_*} \left[\frac{\partial \Sigma}{\partial \theta} + \frac{\mathbf{H}}{\theta} \right] \text{Grad } \theta \geq 0. \end{aligned} \right.$$

È evidente che, assegnato un processo termodinamico (19), risultano altresì determinate le quantità θ , $\dot{\theta}$, $\text{Grad } \theta$, $\text{Grad Grad } \theta$, \mathbf{F} , $\dot{\mathbf{F}}$, $\text{Grad } \mathbf{F}$, $\boldsymbol{\varphi}$, $\dot{\boldsymbol{\varphi}}$, $\ddot{\boldsymbol{\varphi}}$, $\text{Grad } \boldsymbol{\varphi}$, $\text{Grad Grad } \boldsymbol{\varphi}$ nella particella \mathbf{X} all'istante t . È poi facile controllare che, per ogni determinazione di queste grandezze in \mathbf{X} , t è sempre possibile trovare un processo (19) tale che in \mathbf{X} , t le suddette grandezze abbiano tali determinazioni e, tenuto conto delle (20), sia soluzione delle (11) per opportune sorgenti esterne \mathbf{f} , \mathbf{L} e q .

Pertanto dal *principio di dissipazione*, che richiede la validità della (24) per ogni processo termocinetico (19) soluzione delle (11), e dalle osservazioni precedenti segue l'equivalenza tra la (24) e le rela-

zioni seguenti:

$$(25) \quad \left\{ \begin{array}{l} \psi = \psi(\mathbf{F}, \theta, \boldsymbol{\varphi}, \dot{\boldsymbol{\varphi}}, \text{Grad } \boldsymbol{\varphi}), \\ \eta = -\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \eta(\mathbf{F}, \theta, \boldsymbol{\varphi}, \dot{\boldsymbol{\varphi}}, \text{Grad } \boldsymbol{\varphi}), \\ \mathbf{k} = -\frac{\partial \psi}{\partial \dot{\boldsymbol{\varphi}}} \boldsymbol{\Lambda}^{-1} = \mathbf{k}(\mathbf{F}, \theta, \boldsymbol{\varphi}, \dot{\boldsymbol{\varphi}}, \text{Grad } \boldsymbol{\varphi}), \\ \mathbf{S} = \varrho_* \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{F}} = \mathbf{S}(\mathbf{F}, \theta, \boldsymbol{\varphi}, \dot{\boldsymbol{\varphi}}, \text{Grad } \boldsymbol{\varphi}), \\ \mathcal{M} = \varrho_* \frac{\partial \psi}{\partial (\text{Grad } \boldsymbol{\varphi})} \boldsymbol{\Lambda}^{-1} - \frac{\partial \boldsymbol{\Sigma}}{\partial \dot{\boldsymbol{\varphi}}} \boldsymbol{\Lambda}^{-1}, \\ \frac{\partial \Sigma^{(L)}}{\partial \mathbf{F}^i_M} = \frac{\partial \Sigma^{(L)}}{\partial (\partial_M \theta)} = \frac{\partial \Sigma^{(L)}}{\partial (\partial_M \varphi^i)} = 0, \\ \left[\frac{\mathcal{M}}{\varrho_*} \cdot \text{Grad } \boldsymbol{\Lambda} - \mathbf{k} \cdot \dot{\boldsymbol{\Lambda}} - \frac{J}{\varrho_*} \dot{\mathbf{T}}^A \cdot \boldsymbol{\Lambda} - \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\varphi}} \right] \dot{\boldsymbol{\varphi}} \\ + \frac{1}{\varrho_*} \frac{\partial \boldsymbol{\Sigma}}{\partial \boldsymbol{\varphi}} \text{Grad } \boldsymbol{\varphi} + \frac{1}{\varrho_*} \left[\frac{\partial \boldsymbol{\Sigma}}{\partial \theta} + \frac{\mathbf{H}}{\theta} \right] \cdot \text{Grad } \theta \geq 0. \end{array} \right.$$

Si osservi che ψ , oltre che potenziale termodinamico per η ed \mathbf{S} , è tale anche per il momento specifico di spin \mathbf{k} , cosicchè è $\mathbf{k} = 0$ se e solo se ψ è indipendente da $\dot{\boldsymbol{\varphi}}$. In genere invece le quantità \mathbf{k} , η , \mathbf{S} dipendono da $\dot{\boldsymbol{\varphi}}$ e quindi dalla velocità angolare microscopica $\boldsymbol{\nu}^*$.

È interessante notare che, se seguendo gli altri Autori (cfr. [3], [11]), si assume nullo l'extrafflusso di energia \mathbf{s} e quindi $\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{0}$, si ottiene da (25)₅:

$$(25')_5 \quad \mathcal{M} = \varrho_* \frac{\partial \psi}{\partial (\text{Grad } \boldsymbol{\varphi})} \boldsymbol{\Lambda}^{-1},$$

la quale mostra che nella suddetta ipotesi, anche il *tensore coppie di contatto* ammette ψ come *potenziale termodinamico*. Questo risultato ovviamente sussiste anche nella sola ipotesi che $\boldsymbol{\Sigma}$ non dipenda da $\dot{\boldsymbol{\varphi}}$.

Per quanto concerne le proprietà di trasformazione delle quantità ψ , η , \mathbf{k} , \mathbf{T} , \mathbf{M} , \mathbf{s} , \mathbf{h} (e conseguentemente delle (20)) nel passaggio da un riferimento rigido ad un altro, si osservi che: ψ non è invariante in quanto include l'energia associata alla rotazione del triedro $\{\mathbf{d}_{(a)}\}$; \mathbf{k} certamente non è oggettivo; \mathbf{s} , stante (11), « a priori » può non essere

oggettivo; infine, η , \mathbf{T} , \mathbf{M} ed \mathbf{h} si intenderanno oggettive (?). Ricordando poi che queste ultime grandezze, in conseguenza delle (20), possono ritenersi funzioni di \mathbf{F} , θ , \mathbf{d} , $\text{Grad } \mathbf{d}$, $\overset{\circ}{\mathbf{d}}$, con procedure ben note (cfr. [17]), si conclude che: η , \mathbf{T} , \mathbf{M} ed \mathbf{h} sono oggettive se e solo se

$$(26) \quad \left\{ \begin{array}{l} \eta = \tilde{\eta}(\mathbf{C}, \theta, \mathbf{F}^T \mathbf{d}, \overset{\circ}{\mathbf{d}}, \mathbf{F}^T \text{Grad } \mathbf{d}), \\ \mathbf{S} = \mathbf{F} \tilde{\mathbf{S}}(\mathbf{C}, \theta, \mathbf{F}^T \mathbf{d}, \overset{\circ}{\mathbf{d}}, \mathbf{F}^T \text{Grad } \mathbf{d}), \\ \mathcal{M} = \mathbf{F} \tilde{\mathcal{M}}(\mathbf{C}, \theta, \mathbf{F}^T \mathbf{d}, \overset{\circ}{\mathbf{d}}, \mathbf{F}^T \text{Grad } \mathbf{d}), \\ \mathbf{H} = \tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{C}, \theta, \mathbf{F}^T \mathbf{d}, \overset{\circ}{\mathbf{d}}, \mathbf{F}^T \text{Grad } \mathbf{d}, \text{Grad } \theta) \end{array} \right.$$

dove $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}$ è il tensore di Cauchy-Green e $\overset{\circ}{\mathbf{d}}(\mathbf{X}, t)$ è la derivata temporale del vettore $\mathbf{d}(\mathbf{X}, t)$ nel riferimento rigido solidale alla particella \mathbf{X} all'istante t . Si osservi che le (26) comportano una dipendenza di η , \mathbf{S} , \mathcal{M} , \mathbf{H} dalla rotazione locale del triedro di Cosserat rispetto alla particella del continuo \mathcal{S} e costituiscono una generalizzazione dell'equazione proposta da Ericksen in [20] per i fluidi anisotropi. Più in particolare, se i vettori $\overset{\circ}{\mathbf{d}}$ sono assenti nelle (26), non vi è dipendenza di η , \mathbf{S} , \mathcal{M} e \mathbf{H} dalla rotazione della terna $\{\mathbf{d}\}$ rispetto alla particella di \mathcal{S} .

6. Applicazione ad una particolare classe di materiali.

I risultati del n. precedente sono del tutto generali. Nel presente numero ci si propone di specializzare la classe di materiali, cioè le equazioni costitutive, sia per ottenere ulteriori conseguenze delle (25) e sia per ritrovare i risultati di [11].

Poichè ψ è potenziale per η , \mathbf{k} , \mathbf{S} e ψ e Σ sono potenziali per \mathcal{M} , in una teoria dei continui polari occorre precisare le equazioni costitutive soltanto per ψ , Σ , \mathbf{H} . Inoltre queste ultime funzioni devono soddisfare (25)_{6,7}.

(?) In [18] e [19] si provano interessanti conseguenze della non oggettività del tensore degli sforzi \mathbf{T} e del vettore corrente di calore \mathbf{h} nel caso di un continuo semplice.

Sviluppando ψ e Σ in serie di McLaurin rispetto a $\dot{\varphi}$ ed arrestando lo sviluppo al 2° termine, si ottiene ⁽⁸⁾:

$$(27) \quad \begin{cases} \psi = \frac{1}{2} \dot{\varphi} \cdot \mathbf{a} \cdot \dot{\varphi} + \psi'(F, \theta, \varphi, \text{Grad } \varphi) \equiv \psi_1 + \psi' , \\ \Sigma = \frac{1}{2} \dot{\varphi} \cdot \mathbf{A} \cdot \dot{\varphi} + \mathbf{B} \cdot \dot{\varphi} + \Sigma'(F, \theta, \varphi, \text{Grad } \varphi, \text{Grad } \theta) \end{cases}$$

dove \mathbf{a} e \mathbf{B} sono tensori a due indici, con \mathbf{a} simmetrico, \mathbf{A} è un tensore a tre indici, anch'esso simmetrico rispetto agli indici saturati con $\dot{\varphi}$, e ψ' e Σ' sono oggettive. Supponendo per semplicità che \mathbf{a} , \mathbf{A} e \mathbf{B} siano funzioni soltanto di φ , la (25)_{2,3,4,5} si scrivono rispettivamente:

$$(28) \quad \begin{cases} \eta = -\frac{\partial \psi'}{\partial \theta} = \eta(F, \theta, \varphi, \text{Grad } \varphi) , \\ \mathbf{k} = -\dot{\varphi} \mathbf{a} \Lambda^{-1} , \\ \mathbf{S} = \varrho_* \frac{\partial \psi'}{\partial \mathbf{F}} = \mathbf{S}(F, \theta, \varphi, \text{Grad } \varphi) , \\ \mathcal{M} = \varrho_* \frac{\partial \psi'}{\partial (\text{Grad } \varphi)} \Lambda^{-1} - \mathbf{B} \cdot \Lambda^{-1} , \end{cases}$$

dove per ottenere la (28)₄ si è tenuto conto dell'oggettività di \mathcal{M} che comporta $\mathbf{A} = \mathbf{0}$. Ulteriori restrizioni per ψ e Σ' si ottengono dalle (25)_{6,7}. Una notevole restrizione per \mathbf{a} è ottenuta da (25)₇, nel modo seguente. Sostituendo (28)_{2,4} e (27)_{1,2} nella (25)₇ e ponendo $\text{Grad } \theta = \mathbf{0}$, si perviene alla seguente disuguaglianza:

$$(29) \quad \left[\dot{\varphi} \left(\mathbf{a} \Lambda^{-1} \frac{\partial \Lambda}{\partial \varphi} - \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \varphi} \right) \dot{\varphi} \cdot \dot{\varphi} \right] + \dot{\varphi} \cdot \mathbf{C} \cdot \dot{\varphi} + \mathbf{D} \cdot \dot{\varphi} + E \geq 0$$

dove \mathbf{C} , \mathbf{D} ed E sono indipendenti da φ ed inoltre \mathbf{D} ed E hanno le seguenti espressioni:

$$(30) \quad \begin{cases} E = \frac{\partial \Sigma'}{\partial \varphi} \cdot \text{Grad } \varphi , \quad (\text{con } \Sigma' \text{ valutato per Grad } \theta = \mathbf{0}) . \\ \mathbf{D} = \frac{\partial \psi'}{\partial (\text{Grad } \varphi)} \cdot \Lambda^{-1} \cdot \text{Grad } \Lambda - \frac{J}{\varrho_*} \dot{\mathbf{T}}^A \cdot \Lambda - \frac{\partial \psi'}{\partial \varphi} + \frac{1}{\varrho_*} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \varphi} \cdot \text{Grad } \varphi . \end{cases}$$

⁽⁸⁾ L'assenza del termine lineare in $\dot{\varphi}$ nello sviluppo di ψ è equivalente, come prova la (28)₂ alla richiesta $\mathbf{k} = \mathbf{0}$ per $\dot{\varphi} = \mathbf{0}$.

Valutando la (29) nel processo in cui $\dot{\boldsymbol{\varphi}}$ assume la determinazione $\alpha\dot{\boldsymbol{\varphi}}$, dividendo per α^3 e passando al limite per $\alpha \rightarrow \infty$, si ottiene la condizione:

$$(31) \quad \mathbf{a}\Lambda^{-1} \frac{\partial \Lambda}{\partial \boldsymbol{\varphi}} - \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \boldsymbol{\varphi}} = \mathbf{0}.$$

Dalla (31), moltiplicando a sinistra e a destra per $\dot{\boldsymbol{\varphi}}$ si ottiene, per (28)₂ e (27)₁,

$$\mathbf{k} \cdot \dot{\mathbf{A}} + \frac{\partial \psi_1}{\partial \boldsymbol{\varphi}} = \mathbf{0}$$

sicchè, per successiva moltiplicazione a sinistra per $\dot{\boldsymbol{\varphi}}$, stante (23)₂, si deduce l'equazione

$$(32) \quad \mathbf{k} \cdot \dot{\mathbf{v}}^* + \dot{\psi}_1 = 0.$$

Allo scopo di determinare una più significativa espressione per la (32), è opportuno riscrivere, utilizzando la (7), ψ_1 in funzione di $\boldsymbol{\varphi}$ e \mathbf{v}^* . Si ottiene in tal modo

$$(33) \quad \psi_1 = \frac{1}{2} \mathbf{v}^* \cdot \mathbf{J} \cdot \mathbf{v}^*$$

con

$$(34) \quad \mathbf{J} = (\Lambda^{-1})^T \mathbf{a} \Lambda^{-1}$$

per cui, tenendo conto di (28)₂, la (33) diventa:

$$(35) \quad \mathbf{v}^* \cdot \dot{\mathbf{J}} \cdot \mathbf{v}^* = 0$$

che equivale alla restrizione per \mathbf{J} (e quindi per \mathbf{a}) che sarà ulteriormente discussa tra breve.

Nella teoria esposta in [11], si assume la (27)₁ e, in luogo della (27)₂, si pone $\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{0}$; inoltre, \mathbf{k} viene *a priori* fissato con l'espressione (28)₂ e, sempre *a priori*, si assume che $\dot{\boldsymbol{\varphi}}$ non figuri in nessuna equazione costitutiva. Nella teoria precedentemente sviluppata, si prova che se si ammette valida la (27)₁ e $\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{0}$ si ottiene di conseguenza per \mathbf{k} l'espressione (28)₂ e $\dot{\boldsymbol{\varphi}}$ non figura in nessuna equazione costitutiva eccezion fatta per \mathbf{H} .

Inoltre, sempre nell'ipotesi $\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{0}$, risultando $E = 0$, la (29), che

per (31) già si riduce a

$$\dot{\boldsymbol{\varphi}} \cdot \mathbf{C} \cdot \dot{\boldsymbol{\varphi}} + \mathbf{D} \cdot \dot{\boldsymbol{\varphi}} \geq 0,$$

comporta

$$\mathbf{D} = \mathbf{0}$$

che, come si prova in [11], traduce il principio di oggettività.

Infine, Kafadar e Eringen provano con considerazioni cinematiche che per \mathbf{J} sussiste l'equazione

$$\frac{dJ^{kl}}{dt} = 2\nu^{(k} J^{l)m}$$

che equivale alla restrizione (35) qui ottenuta a partire dal principio di dissipazione.

7. Una conseguenza del principio di oggettività per la classe di materiali del n. precedente.

Si comincerà col supporre che la parte ψ' del potenziale termodinamico (27)₁ in quanto indipendente da $\boldsymbol{\nu}^*$ sia invariante rispetto ai cambiamenti di riferimenti rigidi. Per applicare il principio di oggettività a ψ' occorre che le variabili da cui dipende siano oggettive, il che non si verifica per $\boldsymbol{\varphi}$, Grad $\boldsymbol{\varphi}$. Pertanto, in luogo di queste variabili si utilizzeranno $\underset{(a)}{\mathbf{d}}$, Grad $\underset{(a)}{\mathbf{d}}$ e cioè si porrà:

$$(36) \quad \psi' = \psi'(\mathbf{F}, \theta, \boldsymbol{\varphi}, \text{Grad } \boldsymbol{\varphi}) = \tilde{\psi}(\mathbf{F}, \theta, \underset{(a)}{\mathbf{d}}, \text{Grad } \underset{(a)}{\mathbf{d}}) = \hat{\psi}(\mathbf{F}, \theta, \underset{(a)}{\mathbf{d}}, \text{grad } \underset{(a)}{\mathbf{d}}),$$

Com'è ben noto la richiesta di invarianza della (36) è equivalente alla condizione:

$$\varrho \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \mathbf{F}_L^{[i}} \mathbf{F}_L^{j]} + \varrho \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \underset{(a)}{\mathbf{d}}^{[i}} \underset{(a)}{\mathbf{d}}^{j]} + \varrho \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial (\partial_i \underset{(a)}{\mathbf{d}}^{[j})} \partial_i \underset{(a)}{\mathbf{d}}^{j]} = 0 \quad (*)$$

(*) È sottintesa la somma sugli indici ripetuti ed inoltre gl'indici maiuscoli sono riferiti alle coordinate materiali (X^L).

che può anche scriversi:

$$(38) \quad \left\{ \begin{aligned} \varrho \varepsilon^{\lambda i} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial F^i L} F^i L + \varrho \varepsilon^{\lambda i} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \bar{d}^i (a)} \bar{d}^i + \partial_i \left(\varrho \varepsilon^{\lambda i} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial (\partial_i \bar{d}^i (a))} \bar{d}^i \right) + \\ + \partial_i \left(\varrho \varepsilon^{\lambda i} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial (\partial_i \bar{d}^i (a))} \bar{d}^i \right) \bar{d}^i = 0 \end{aligned} \right.$$

È facile provare che:

$$(39) \quad \varrho \varepsilon^{\lambda i} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial (\partial_i \bar{d}^i (a))} \bar{d}^i = - \varrho (\Lambda^{-1})^{m\lambda} \frac{\partial \psi'}{\partial (\partial_L \varphi^m)}.$$

Infatti, risulta da (36)

$$(40) \quad (\Lambda^{-1})^m_r \frac{\partial \psi'}{\partial (\partial_L \varphi^m)} = \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial (\partial_M \bar{d}^n)} \frac{\partial (\partial_M \bar{d}^n)}{\partial (\partial_Q \chi^i_P)} \frac{\partial (\partial_Q \chi^i_P)}{\partial (\partial_L \varphi^m)} (\Lambda^{-1})^m_r$$

e si ha inoltre da (4)

$$(41) \quad \frac{\partial (\partial_M \bar{d}^n)}{\partial (\partial_Q \chi^i_P)} = \delta^i_n \delta^e_M \delta^{0P};$$

d'altra parte, posto

$$\Omega_M^{ki} = \chi^{iL} \partial_M \chi^k_L,$$

si ha, in analogia con la (7),

$$-\frac{1}{2} \varepsilon_{ki}{}^t \Omega_M^{ki} = \Lambda_n^t \partial_M \varphi^n$$

donde, tenendo conto della condizione $\chi \chi^T = I$, traesi poi

$$\partial_M \chi^k_Q = - \varepsilon^{ki}{}^t \Lambda_n^t \partial_M \varphi^n \chi_{iQ}$$

e pertanto

$$(42) \quad \frac{\partial (\partial_Q \chi^i_P)}{\partial (\partial_L \varphi^m)} = - \varepsilon^i_{kt} \Lambda_m^t \chi^k_P \delta^L_Q$$

che, sostituita assieme a (41) in (40), dà appunto la (39).

Se $\Sigma = 0$ e quindi $A = 0$, in base a (28)_{3,4}, (36), (39) e (18)₃, la (38)

può scriversi

$$\varepsilon^{\lambda i} T_{[i}{}^{j]} + \rho \varepsilon^{\lambda i} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \bar{d}^{[i}{}^{j]}(a)} \bar{d}^{j]} - \partial_i M^{\lambda i} - \partial_i \left(\rho \varepsilon^{\lambda i} \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial (\partial_i \bar{d}^{[i}{}^{j]}(a))} \bar{d}^{j]} = 0$$

e l'equazione (11)₂ del bilancio del momento angolare diviene in corrispondenza:

$$(43) \quad \dot{k}^{\lambda} = L^{\lambda} + \varepsilon^{\lambda i} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \bar{d}^{[i}{}^{j]}(a)} \bar{d}^{j]} - \frac{1}{\rho} \varepsilon^{\lambda i} \partial_i \left(\rho \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial (\partial_i \bar{d}^{[i}{}^{j]}(a))} \bar{d}^{j]} .$$

Se in particolare è (cfr. [3])

$$\mathbf{L} = \mathbf{d} \wedge \mathbf{H}^{(a)}$$

la (43) assume la forma seguente:

$$(44) \quad \dot{k} = \mathbf{d} \wedge \mathbf{H}_{\text{eff}}^{(a)}$$

dove

$$(\mathbf{H}_{\text{eff}}^{(a)})_i = \mathbf{H}_i - \left[\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \bar{d}^i} - \frac{1}{\rho} \partial_i \left(\rho \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial (\partial_i \bar{d}^i)} \right) \right] .$$

La (44) è una generalizzazione al caso di un continuo alla Cosserat dell'equazione

$$\mathbf{k} = \mathbf{m} \wedge \mathbf{H}_{\text{eff}},$$

con \mathbf{m} magnetizzazione specifica di intensità costante nel tempo, proposta a partire da un modello strutturale di Schlomann [13] e Tiersten [14] per un materiale ferromagnetico saturato che è un esempio di un continuo con un solo direttore di lunghezza costante nel tempo [3].

BIBLIOGRAFIA

- [1] E. e F. COSSERAT, *Théorie des corps déformables*, Paris, Hermann et Fils (1909).
- [2] J. ERICKSEN - C. TRUESDELL, *Exact theory of stress and strain in rods and shells*, Arch. Rat. Mech. An., **1** (1958), p. 295.

- [3] R. TOUPIN, *Couple stresses in Elasticity*, Arch. Rat. Mech. An., **17** (1964), p. 85.
- [4] G. GRIOLI, *Elasticità asimmetrica*, Ann. di Mat. pura ed appl., serie IV, **50** (1960), p. 389.
- [5] G. GRIOLI, *Sulla meccanica dei sistemi continui a trasformazioni reversibili con caratteristiche di tensione asimmetriche*, Semin. I.N.A.M. 1962-63, vol. 2, Roma, Cremonese (1965).
- [6] G. GRIOLI, *Questioni di compatibilità per i continui di Cosserat*, Symposia Mathematica I.N.A.M. (1968).
- [7] G. GRIOLI, *Sui continui di Cosserat con rotazioni libere*, Rend. Sem. mat. di Padova, **47** (1972).
- [8] A. BRESSAN, *Sui sistemi continui nel caso asimmetrico*, Ann. Mat. pura ed appl. (IV), **62** (1963), p. 169.
- [9] D. GALLETTO, *Contributo allo studio dei sistemi continui a trasformazioni reversibili con caratteristiche di tensione asimmetriche*, Rend. Sem. Mat. Padova, **35** (1965), p. 299.
- [10] G. FERRARESE, *Sull'incompatibilità dei continui alla Cosserat*, Rend. Mat. di Roma, serie VI, **4** (1971).
- [11] C. KAFADAR - C. ERINGEN, *Micropolar media, I: The classical theory*, Int. J. Engng. Sci., **9** (1971), p. 271.
- [12] C. TRUESDELL, *Rational Thermodynamics*, McGraw - Hill (1969).
- [13] SCHLÖMANN, J. Appl. Phys., **35** (1964), p. 159.
- [14] H. TIERSTEN, *Coupled magnetomechanical equations for magnetically saturated insulators*, J. Math. Phys., **5**, no. 9 (1964).
- [15] G. MAUGIN - C. ERINGEN, *Deformable magnetically saturated media, I: Field equations*, J. Math. Phys., **13**, no. 2 (1972).
- [16] G. MAUGIN - C. ERINGEN, *Deformable magnetically saturated media, II: Constitutive theory*, J. Math. Phys., **13**, no. 9 (1972).
- [17] C. ERINGEN, *Nonlinear theory of continuous media*, McGraw - Hill (1962).
- [18] I. MÜLLER, *On frame dependence of stress and heat flux*, Arch. Rat. Mech. An., vol. 45 (1972).
- [19] D. EDELEN - J. LENNAN, *Material indifference: a principle or a convenience*, Int. J. Engng. Sci., **11** (1973).
- [20] J. ERICKSEN, *Conservation laws for liquid crystals*, Trans. Soc. Rheol., **5** (1961).

Manoscritto pervenuto in Redazione il 19 novembre 1975.