

# RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

WALTER STREB

## **Über die Äquivalenz von Polynomidentitäten in Ringen**

*Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova*,  
tome 56 (1976), p. 33-48

[http://www.numdam.org/item?id=RSMUP\\_1976\\_\\_56\\_\\_33\\_0](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1976__56__33_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## Über die Äquivalenz von Polynomidentitäten in Ringen.

WALTER STREB (\*)

### Einleitung.

Der nachfolgenden Untersuchung liegen Polynomringe in *nicht vertauschbaren* Unbestimmten  $x_1, x_2, x_3, \dots$  zugrunde: Sei  $Z_p$  für  $p = 0$  der Ring der ganzen Zahlen, für  $p = 1$  der Körper der rationalen Zahlen und für Primzahlen  $p$  der Primkörper der Charakteristik  $p$ . Mit der Menge  $Q$  der formalen *Unbestimmtenprodukte*  $q = x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_n}$  beliebiger *Dimension*  $d(q) = n$  bildet man die assoziative Algebra  ${}_p F$  über  $Z_p$  mit der Basis  $Q$ . Die Elemente von  ${}_p F$  heißen *Formen*.

${}_0 F$  bzw.  ${}_p F$  mit  $p \neq 0$  ist in kanonischer Weise die Klasse der Ringe  $R$  der Charakteristik 0 (aus  $mr = 0$ ,  $m \in Z_0$ ,  $r \in R$  folgt stets  $m = 0$  oder  $r = 0$ ) bzw. Algebren über  $Z_p$  zugeordnet. Zu  ${}_p F$  und  $R$  bildet man die Menge  ${}_p F_R$  aller Formen  $f \in {}_p F$ , für welche die Gleichung  $f = 0$  in  $R$  identisch erfüllt ist.

Zwei nicht nur die Nullform enthaltende Teilmengen  $A$  und  $B$  von  ${}_p F$  heißen *äquivalent* bzw. *\*-äquivalent*, wenn folgendes gilt:  $A \subseteq {}_p F_R$  genau dann, wenn  $B \subseteq {}_p F_R$  für alle  ${}_p F$  zugeordneten Ringe  $R$  bzw. alle  ${}_p F$  zugeordneten Ringe  $R$  mit Einselement.

In dieser Note werden *Algorithmen* für *Äquivalenzuntersuchungen* entwickelt, welche ich zunächst an einigen Anwendungen illustrieren möchte:

**BIESPIEL 1.** *Bestimmung von Äquivalenzklassen.* Für  $1 < n \in Z_0$  sei  ${}_p F_n$  bzw.  ${}_p F_n^*$  die Menge aller Elemente von  ${}_p F$  bzw.  ${}_p F_{Z_p}$  deren

---

(\*) Indirizzo dell'A.: Universität Essen, Universitäts - Str. 3 D-43 Essen, Rep. Fed. Tedesca.

aufbauende Unbestimmtenprodukte allesamt höchstens die Dimension  $n$ , wenigstens die Dimension 2 besitzen. Hierbei ist obige Einschränkung von  ${}_pF$  auf  ${}_pF_{Z_p}$  für die folgenden Anwendungen auf Ringe  $R$  mit Einselement unwesentlich, da für diese Ringe jeweils  ${}_pF_R \subseteq {}_pF_{Z_p}$  gilt. Wir zeigen durch Angabe von Repräsentanten für  $*$ -Äquivalenzklassen:

Mit  $n_2 = 1$ ,  $n_3 = 2$ ,  $n_4 = 18$  zerfällt  ${}_pF_i^*$  für  $p \in (0, 1)$  und  $p > i$  in  $n_i$  Klassen,  $2 < i < 4$ . Während für  $p > 1$  die Mengen  ${}_pF_i^*$  allesamt in endlich viele Klassen zerfallen, zerfällt für  $p \in (0, 1)$  schon  ${}_pF_5^*$  in unendlich viele Klassen.

**BEISPIEL 2. Minimalidentitäten.** Sei  $R$  ein Ring,  $R'$  das von den Kommutatoren  $r \circ s := rs - sr$ ,  $r, s \in R$  erzeugte Ideal von  $R$ ,  $P_n$  die Menge aller Permutationen von  $(1, 2, \dots, n)$  und  $\text{sign}(\pi)$  das Vorzeichen von  $\pi \in P_n$ .

Die Abschwächung der Eigenschaften eines Ringes  $R$ , nilpotent zu sein, ein nilpotentes Kommutatorideal  $R'$  bzw. einen nilpotenten assoziierten Lie-Ring zu besitzen, führt auf die Forderung der Identitäten  $h_{1,n} := (x_1)^n = 0$ ,  $h_{2,n} := \sum_{\pi \in P_n} \text{sign}(\pi) x_{\pi(1)} \dots x_{\pi(n)} = 0$  (Standardidentität [2, P. 154]) bzw.  $h_{3,n} := (((x_2 \circ x_1) \circ x_1) \dots) \circ x_1 = 0$ , deren aufbauende Unbestimmtenprodukte allesamt die Dimension  $n$  besitzen,  $1 < n \in Z_0$ . Wir zeigen die Minimalität dieser Identitäten unter folgender Begriffsbildung:

Eine Form  $0 \neq g \in {}_pF_n$  heißt *Folgeform* von  $0 \neq f \in {}_pF_n$ , wenn aus  $f \in {}_pF_R$  stets  $g \in {}_pF_R$  folgt für alle  ${}_pF$  zugeordneten Ringe  $R$ . Für  $p \in (0, 1)$  und  $p > n$  gilt:

Jede Folgeform  $g \in {}_pF_n$  von  $h_{i,n}$  ist zu  $h_{i,n}$  äquivalent  $1 < i < 3$ .

Zu jedem Element  $f \in {}_pF_n$  bzw.  $f \in {}_pF_n^*$  mit  $p \in (0, 1)$  oder  $p > n$  liefern die Algorithmen eine äquivalente bzw.  $*$ -äquivalente Menge von im obigen Sinne minimalen Formen.

**BEISPIEL 3. Kommutativitätskriterien.** Die Frage nach der Kommutativität von Ringen  $R$  wurde mehrfach behandelt [2; p. 87-88, References]. Die Kriterien sind meist stark eingeschränkte Polynombedingungen der Art  $f_r(r) = 0$  bzw.  $f_r(r) \circ s = 0$  für  $r, s \in R$  mit von  $r$  abhängigen Formen  $f_r(x_i) \in {}_0F$ .

Die Kommutativitätssätze dieser Note stützen sich auf folgende Begriffe:  $Z_{p,2}$  sei der Ring der 2-zeiligen, 2-spaltigen Matrizen über  $Z_p$ ,  $Z_{p,n}$  für  $n > 2$  der Ring der  $n$ -zeiligen,  $n$ -spaltigen Matrizen  $(a_{i,j})$  über  $Z_p$  mit  $a_{i,i} = a_{i,j}$ ,  $a_{i,i} = 0$  für  $1 < j < i < n$ . Eine Form  $f \in {}_pF$  heißt *Hauptform*, falls  $f$  in die Nullform übergeht, wenn man in den  $f$

aufbauenden Unbestimmtenprodukten die Unbestimmten nach wachsenden Indizes ordnet. Ein  ${}_pF$  zugeordneter Ring  $R$  mit Einselement heißt  $Z_{p,n}$ -Ring bzw. starker  $Z_{p,n}$ -Ring, wenn es eine Form bzw. Hauptform  $f \in {}_pF$  gibt, so daß  $f \in {}_pF_R$ ,  $f \notin {}_pF_{Z_{p,n}}$ .

Da die Klasse der Ringe der Charakteristik 0 die Klasse der Algebren über  $Z_1$  umfaßt, sei in den folgenden Aussagen (I)-(IV)  $p \neq 1$ . Nach [9; Korollar 1, p. 136] ist jeder  $Z_{0,3}$ -Ring kommutativ. Deshalb sei in den Aussagen (I).(2)-(IV)  $0 \neq p \neq 1$ . Wir zeigen:

- (I) (1) Ist  $R$  ein  $Z_{0,4}$ -Ring oder  $h_{2,4} \notin {}_0F_R$  und  $R$  ein  $Z_{0,5}$ -Ring, so ist  $R'$  nil.  
 (2) Ist  $R$  ein  $Z_{p,2}$ - und  $Z_{p,4}$ -Ring, so ist  $R'$  nil.

(II) Ist  $R$  starker  $Z_{p,3}$ -Ring und  $R'$  nil, so ist  $R'$  kommutativ.

(III) Ist  $R$  ein  $Z_{p,2}$ -Ring und starker  $Z_{p,3}$ -Ring, so ist  $R'$  kommutativ.

(IV) Sei  $f(x_1, x_2) \in {}_pF$  Hauptform. In jedem  $f$  aufbauenden Unbestimmtenprodukt komme  $x_2$  genau 1-mal vor. Ist  $R$  ein  ${}_pF$  zugeordneter Ring mit Einselement und  $f \in {}_pF_R$ ,  $f \notin {}_pF_{Z_{p,1}}$ , so ist  $R$  kommutativ.

BEISPIEL 4. Die in [8; p. 137] angegebenen  ${}_pF$  zugeordneten Ringe können in kanonischer Weise zu Ringen  $S_p$  mit Einselementen erweitert werden. Wir zeigen über Ringe  $R$  der Charakteristik 0 mit Einselement:

Es gibt  $1 < n \in Z_0$ , so daß  $h_{2,n} \in {}_0F_R$  genau dann, wenn  $R$  ein  $S_0$  Ring ist. Entsprechende Aussagen [9; Lemma 5, Korollar 2, pp. 134, 138] gelten für  $h_{1,n}$  und  $h_{3,n}$ .

ANMERKUNG. Die in dieser Note entwickelten Methoden für Äquivalenzuntersuchungen übertragen sich bei passender Wahl der Formenringe ausnahmslos und unmittelbar auf alle möglichen Klassen von *nichtassoziativen* Ringen.

Nach dieser Auswahl von Beispielen sollen nun die grundlegenden Äquivalenzsätze bewiesen werden.

BEWEISTEIL. Überträgt man die für  ${}_0F$  definierten Begriffe [6; pp. 563, 565, 568, 571, 576, 584] auf  ${}_pF$  für  $p \neq 0$ , wobei man lediglich bei der Definition eines  $T^*$ -Ideals die Forderung der Abgeschlossenheit bezüglich der Bildung partieller Ableitungen der Elemente durch die Bedingung der Abgeschlossenheit bezüglich der Sub-

stitutionen  $x_i \rightarrow n_i + x_i$ ,  $n_i \in Z_p$  in Elementen des  $T^*$ -Ideals ersetzt, so bleiben [6; Sätze 1, 2, 4, 15, pp. 565, 573, 584] gültig. Ist  ${}_pL_n$  bzw.  ${}_pL_n^*$  der symmetrische Modul aller  $n$ -fach bzw. *eigentlich  $n$ -fach linearen Formen* aus  ${}_pF$  und  $T(M)$  bzw.  $T^*(M)$  das von  $M \subseteq {}_pF$  erzeugte  $T$ -bzw.  $T^*$ -Ideal, so folgert man leicht

**BEMERKUNG 1.** Symmetrische Moduln  $M_i \subseteq {}_pL_n$  bzw.  ${}_pL_n^*$ ,  $1 \leq i \leq 2$  sind wegen  $T(M_i) \cap {}_pL_n = M_i$  bzw.  $T^*(M_i) \cap {}_pL_n^* = M_i$  genau dann äquivalent bzw.  $*$ -äquivalent, wenn  $M_1 = M_2$ .

[6; Sätze 3, 9, pp. 568, 576] gelten für  $p = 1$  uneingeschränkt und für  $0 \neq p \neq 1$  geändert gemäß

**BEMERKUNG 2.** Für  $p > n$  ist jede Teilmenge von  ${}_pF_n$  bzw.  ${}_pF_n^*$  äquivalent bzw.  $*$ -äquivalent zu einer Teilmenge von  $\bigcup_{i=2}^n {}_pL_i$  bzw.  $\bigcup_{i=2}^n {}_pL_i^*$ .

Für  $f \in {}_pF$  notieren wir genauer  $f(x_1, \dots, x_n)$ , wenn in den  $f$  aufbauenden Unbestimmtenprodukten höchstens die Unbestimmten  $x_i$ ,  $1 \leq i \leq n$  auftreten. Für  $f \in {}_pL_n$  bzw.  $M \subseteq {}_pF$  sei  $S(f)$  bzw.  $|M|$  der von  $f$  bzw.  $M$  erzeugte symmetrische Modul bzw.  $Z_p$ -Modul.

Für eine Folge  $a = x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n}$  von Unbestimmten sei  $k(a)$  die Mächtigkeit der Menge  $a(k) := \{j | i_j = k\}$ . Sei  $X_n$  die *lexikographisch geordnete* Menge aller Unbestimmtenfolgen  $a = x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n}$  mit  $i_1 = 1$ ,  $i_k \leq i_{k+1}$ ,  $k(a) \geq k + 1(a)$ ,  $1 \leq k < n$ .

**BEISPIEL 5.** Die Elemente von  $X_i$ ,  $2 \leq i \leq 5$  in geordneter Reihenfolge:

$$X_2: x_1, x_1 < x_1, x_2 .$$

$$X_3: x_1, x_1, x_1 < x_1, x_1, x_2 < x_1, x_2, x_3 .$$

$$X_4: x_1, x_1, x_1, x_1 < x_1, x_1, x_1, x_2 < x_1, x_1, x_2, x_2 < x_1, x_1, x_2, x_3 < \\ < x_1, x_2, x_3, x_4 .$$

$$X_5: x_1, x_1, x_1, x_1, x_1 < x_1, x_1, x_1, x_1, x_2 < x_1, x_1, x_1, x_2, x_2 < \\ < x_1, x_1, x_1, x_2, x_3 < x_1, x_1, x_2, x_2, x_3 < x_1, x_1, x_2, x_3, x_4 < \\ < x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 .$$

Sei  $M \subseteq {}_pL_n$  symmetrischer Modul. Für alle  $a \in X_n$  ist die Menge  ${}_aM \subseteq M$  aller Elemente  $f \in M$  mit nachstehenden Eigenschaften ein

symmetrischer Modul: Für alle  $b = x_{i_1}, \dots, x_{i_n} \in X_n$  mit  $b < a$  und alle  $\pi \in P_n$  geht  $f$  bei den Substitutionen  $x_{\pi(j)} \rightarrow x_j$ ,  $1 \leq j \leq n$  in die Nullform über.

Für  $a = x_{i_1}, \dots, x_{i_n} \in X_n$  sei  $P_{n,a} \subseteq P_n$  die Teilmenge derjenigen Permutationen, welche die Mengen  $a(k)$ ,  $1 \leq k \leq n$  auf sich abbilden. Aus  $f \in {}_a M$  erhält man bei den Substitutionen  $x_j \rightarrow x_{\pi(j)}$ ,  $\pi \in P_{n,a}$  bzw.  $x_j \rightarrow x_i$ , bzw.  $x_j \rightarrow \sum_{k \in a(i_j)} x_k =: y_j$ ,  $1 \leq j \leq n$  der Reihe nach die Elemente

$${}_a f := \sum_{\pi \in P_{n,a}} f(x_{\pi(1)}, \dots, x_{\pi(n)}) \in {}_a M \quad \text{bzw.} \quad {}^a f := f(x_{i_1}, \dots, x_{i_n}) \in {}_p F$$

$$\text{bzw.} \quad f^a := f(y_1, \dots, y_n) \in {}_p F.$$

(A) Es gilt  $f^a = {}_a f + g$ ,  $g \in {}_p F$ , wobei in jedem  $g$  aufbauenden Unbestimmtenprodukt wenigstens eine der Unbestimmten  $x_i$ ,  $1 \leq i \leq n$  nicht auftritt.

(B) Sei  ${}^a M := ({}^a f | f \in {}_a M)$  für alle  $a \in X_n$ . Für  $f, g \in {}_a M$  folgt aus  ${}^a f = {}^a g$  stets  ${}_a f = {}_a g$  und  $f^a = g^a$ . Für  $h \in {}^a M$  mit  $h = {}^a f$ ,  $f \in {}_a M$  ist deshalb  ${}_a h := {}_a f$  und  $h^a := f^a$  wohl definiert.

$M$  heißt  $b$ -Modul,  $b \in X_n$ , wenn  $M = {}_b M$ ,  ${}^a M = 0$  für alle  $b \neq a \in X_n$ ,  ${}_a M = 0$  für alle  $b < a \in X_n$ .

BEISPIEL 6. Für  $a \in X_n$  erhält man zunächst die Elemente  $f$  von  ${}_a({}_p L_n)$  bzw.  ${}_a({}_p L_n^*)$ , indem man die Definitionseigenschaften an den Koeffizienten  $n_\pi \in Z_p$  der Basisdarstellung  $f = \sum_{\pi \in P_n} n_\pi x_{\pi(1)} \dots x_{\pi(n)}$  bzw. gemäß [6; Satz 15, p. 584] verifiziert und dann weiter:

$${}_{x_1, \dots, x_1}({}_p L_n) = |h_{1,n}|, \quad {}_{x_1, \dots, x_n}({}_p L_n) = |h_{2,n}|, \quad {}_{x_1, \dots, x_1}({}_p L_n^*) = 0,$$

$${}_{x_1, \dots, x_1, x_2}({}_p L_n^*) = |h_{3,n}|, \quad {}_{x_1, \dots, x_n}({}_p L_n^*) = |h_{2,n}|$$

bzw. 0 für gerade bzw. ungerade  $n$ ,

$${}_{x_1, x_1, x_2, x_2}({}_p L_4^*) = |(x_1 \circ x_2)^2|, \quad {}_{x_1, x_1, x_2, x_3}({}_p L_4^*) = |(x_1 \circ x_2) \circ (x_1 \circ x_3)|,$$

$${}_{x_1, x_1, x_1, x_2, x_3}({}_p L_5^*) = |(x_1 \circ x_2) \bar{h}_{3,3}, \bar{h}_{3,3}(x_1 \circ x_2)|.$$

LEMMA 1. Sei  $0 \neq M \subseteq {}_p L_n$  symmetrischer Modul und  $R$  ein  ${}_p F$

zugeordneter Ring.

(1) Es gibt  $b \in X_n$ , so daß  ${}^b M \neq 0$ , wie man unmittelbar einsieht.

(2) Nach (B) gilt  $S(af) \subseteq {}_a M$  für alle  $a \in X_n$ ,  $f \in {}^a M$ .

(3) Aus  $f \in {}_p F_R$  folgt  $S(af) \subseteq {}_p F_R$  für alle  $a \in X_n$ ,  $f \in {}^a M$ .

(4) Ist  $M$  minimaler symmetrischer Modul, so gibt es  $b \in X_n$ , so daß  $M$  ein  $b$ -Modul ist. Für alle  $0 \neq f \in {}^b M$  gilt  $S(bf) = M$ . Weiterhin ist  $M \subseteq {}_p F_R$  genau dann, wenn  ${}^b M \subseteq {}_p F_R$ .

BEWEIS. (3) Aus  $f \in {}_p F_R$  folgt  $f_0 := f^a \in {}_p F_R$ , also der Reihe nach

$$f_{i+1} := f_i(x_1, \dots, x_n) - f_i(x_1, \dots, x_i, 0, x_{i+2}, \dots, x_n) \in {}_p F_R, \quad 0 \leq i < n.$$

Wegen (A) gilt  $af = f_n \in {}_p F_R$ , also  $S(af) \subseteq {}_p F_R$ .

(4) Nach (1) gibt es  $b \in X_n$ , so daß  ${}^b M \neq 0$ , also  $0 \neq {}^b M = M$ . Für  $b > a \in X_n$  ist  ${}^a M = {}^a({}^b M) = 0$ . Für  $b < a \in X_n$  gilt wegen  ${}^b M \neq 0$ , daß  $0 = {}_a M \subseteq {}_b M = M$ , also auch  ${}^a M = 0$ . Für  $0 \neq f \in {}^b M$  gilt nach (2)  $0 \neq S(bf) = {}^b M = M$ . Aus  $M \subseteq {}_p F_R$  folgt  ${}^b M \subseteq {}_p F_R$ . Mit (3) folgt aus  $0 \neq f \in {}^b M \subseteq {}_p F_R$ , daß  $M = S(bf) \subseteq {}_p F_R$ .

Sei  $p \neq 0$ ,  $M \subseteq {}_p L_n$  symmetrischer Modul,  $f \in M$ ,  $\pi \in P_n$ . Mit der Verknüpfung  $(\pi, f) \rightarrow f(x_{\pi(1)}, \dots, x_{\pi(n)})$  sind die symmetrischen Moduln genau die  $P_n$ -Untermodule von  ${}_p L_n$ .

(a) Jedem symmetrischen Modul  $M \subseteq {}_0 L_n$  ist wegen  ${}_0 L_n \subseteq {}_1 L_n$  der von  $M$  erzeugte symmetrische Modul  $N \subseteq {}_1 L_n$  zugeordnet. Es gilt  $N \cap {}_0 L_n = M$ .

Ein Modul  $M \subseteq {}_0 F$  heißt *linearer Modul*, wenn aus  $mf \in M$ ,  $0 \neq m \in Z_0$ ,  $f \in {}_0 F$  stets  $f \in M$  folgt. Für einen Modul  $M \subseteq {}_0 F$  ist  $L(M) := (f \in {}_0 F \mid \text{Es gibt } 0 \neq m \in Z_0, \text{ so daß } mf \in M)$  der von  $M$  erzeugte lineare Modul. Es gilt unter Berücksichtigung von (a) der

SATZ VON MASCHKE. Sei  $p = 1$  oder  $p > n$ . Zu jedem symmetrischen Modul  $M \subseteq {}_p L_n$  bzw.  $M \subseteq {}_0 L_n$  gibt es minimale symmetrische Moduln  $M_i$ ,  $1 \leq i \leq m$ , so daß die Summe  $\bar{M} := \sum_{i=1}^m M_i$  direkt und  $M = \bar{M}$  bzw.  $M = L(\bar{M})$ . Zu je zwei symmetrischen Moduln  $N \subseteq M \subseteq {}_p L_n$  bzw.  $N \subseteq M \subseteq {}_0 L_n$  gibt es einen symmetrischen Modul  $K$ , so daß die Summe  $N + K$  direkt und  $M = N + K$  bzw.  $M = L(N + K)$ .

SATZ 1. Sei  $p = 1$  oder  $p > n$ ,  $M \subseteq {}_p L_n$  bzw.  $M \subseteq {}_0 L_n$  symmetrischer Modul,  $R$  ein  ${}_p F$  bzw.  ${}_0 F$  zugeordneter Ring und  $a_i, 1 \leq i \leq m$  eine geordnete Abzählung der Elemente von  $X_n$ :

(1)  $M \subseteq {}_p F_R$  bzw.  $M \subseteq {}_0 F_R$  genau dann, wenn  ${}^a M \subseteq {}_p F_R$  bzw.

$$L({}^a M) \subseteq {}_0 F_R \text{ für alle } a \in X_n.$$

(2) Es gibt  $a_i$ -Moduln  $M_i, 1 \leq i \leq m$ , so daß  $M = \sum_{i=1}^m M_i$  bzw.

$M = L\left(\sum_{i=1}^m M_i\right)$ . Es gilt  ${}_{a_i} M = \sum_{j=1}^m M_j$  bzw.  ${}_{a_i} M = L\left(\sum_{j=i}^m M_j\right)$  und  ${}^{a_i} M = {}^{a_i} M_i$  bzw.  $L({}^{a_i} M) = L({}^{a_i} M_i)$  für  $1 \leq i \leq m$ . Die Darstellung ist eindeutig und  $\sum_{i=1}^m M_i$  direkt.

BEWEIS für  $p \neq 0$ .  $p = 0$  erledigt man entsprechend.

(1) Die rechtsseitige Implikation folgt unmittelbar. Linksseitige Implikation:  $M$  ist direkte Summe minimaler symmetrischer Moduln  $M_i, 1 \leq i \leq k$ . Aus  ${}^a M_i \subseteq {}^a M \subseteq {}_p F_R$  für alle  $a \in X_n$  folgt mit Lemma 1.(4)  $M_i \subseteq {}_p F_R, 1 \leq i \leq k$ , also  $M \subseteq {}_p F_R$ .

(2) Existenz: Sei  $N_i$  direkter Summand in der Summe  ${}_{a_i} M = {}_{a_{i+1}} M + N_i, 1 \leq i < m$  und  $N_m := {}_{a_m} M$ . Dann gilt  $M = \sum_{i=1}^m N_i, {}_{a_i} N_i = N_i, {}_{a_j} N_i \subseteq {}_{a_j}({}^{a_i} M) = 0$  für  $1 \leq j < i$  und  ${}_{a_j} M \supseteq {}_{a_j} N_i \subseteq N_i$ , also  ${}_{a_j} N_i = 0$  für  $i < j \leq m$ . Folglich ist  $N_i$  ein  $a_i$ -Modul,  $1 \leq i \leq m$ .

Sei nun  $M = \sum_{i=1}^m M_i$  eine beliebige Darstellung von  $M$  als Summe von  $a_i$ -Moduln  $M_i, 1 \leq i \leq m$ . Wir zeigen  ${}_{a_i} M = \sum_{j=i}^m M_j$ . Wegen  $\sum_{j=i}^m M_j \subseteq {}_{a_i} M$  bleibt zu zeigen, daß  ${}_{a_i} M \subseteq \sum_{j=i}^m M_j$ . Für  $\sum_{j=1}^m f_j \in {}_{a_i} M$  mit  $f_j \in M_j$  gilt

$${}^{a_1} f_1(x_{\pi(1)}, \dots, x_{\pi(n)}) = \sum_{j=1}^m {}^{a_1} f_j(x_{\pi(1)}, \dots, x_{\pi(n)}) = {}^{a_1} \left( \sum_{j=1}^m f_j(x_{\pi(1)}, \dots, x_{\pi(n)}) \right) = 0$$

für alle  $\pi \in P_n$ , also  $f_1 \in {}_{a_1} M_1 = 0$ . Dieses Verfahren liefert der Reihe nach  $f_j = 0$  für  $1 \leq j < i$ . Aus  $\sum_{j=1}^m f_j = 0$  folgt entsprechend  $f_j = 0$  für  $1 \leq j < m$ . Also ist  $\sum_{i=1}^m M_i$  direkt. Mit  ${}_{a_i} M = \sum_{j=i}^m M_j$  gilt auch  ${}^{a_i} M = {}^{a_i}({}_{a_i} M) = {}^{a_i} \left( \sum_{j=i}^m M_j \right) = {}^{a_i} M_i$  für  $1 \leq i \leq m$ .

EINDEUTIGKEIT. Wegen  ${}^a N_i = {}^a M = {}^a M_i$  und  ${}^a N_i = 0 = {}^a M_i$  für  $1 \leq j \neq i \leq m$  sind nach (1) und Bemerkung 1  $M_i$  und  $N_i$  äquivalent, also gleich für  $1 \leq i \leq m$ .

SATZ 2. Sei  $p = 1$  oder  $p > n$  und  $b \in X_n$ . Ein Modul  $N \subseteq {}^b({}_p L_n)$  bzw. linearer Modul  $N \subseteq L({}^b({}_0 L_n))$  heißt *b-induziert* genau dann, wenn  ${}^b S(bf) \subseteq N$  für alle  $f \in N$ . Die Abbildungen  $M \rightarrow {}^b M$  und  $N \rightarrow \sum_{f \in N} S(bf)$  bzw.  $M \rightarrow L({}^b M)$  und  $N \rightarrow L\left(\sum_{f \in N} S(bf)\right)$  sind inklusionserhaltende Bijektionen zwischen dem Verband bzw. der Menge der *b*-Moduln  $M \subseteq {}_p L_n$  ( $M \subseteq {}_p L_n^*$ ) bzw.  $M \subseteq {}_0 L_n$  ( $M \subseteq {}_0 L_n^*$ ) und dem Verband bzw. der Menge der *b*-induzierten Moduln  $N \subseteq {}^b({}_p L_n)$  ( $N \subseteq {}^b({}_p L_n^*)$ ) bzw.  $N \subseteq L({}^b({}_0 L_n))$  ( $N \subseteq L({}^b({}_0 L_n^*))$ ).

BEWEIS für  $p \neq 0$ .  $p = 0$  erledigt man entsprechend. Nach Lemma 1. (2) ist  ${}^b M$  ein *b*-induzierter Modul.

Die Abbildung  $M \rightarrow {}^b M$  ist *injektiv*: Für *b*-Moduln  $M_1$  and  $M_2$  folgt mit Satz 1. (1) und Bemerkung 1 aus  ${}^b M_1 = {}^b M_2$ , daß  $M_1$  und  $M_2$  äquivalent, also gleich sind.

Die Abbildung  $M \rightarrow {}^b M$  ist *surjektiv*: Sei  $N \subseteq {}^b({}_p L_n)$  bzw.  $N \subseteq {}^b({}_p L_n^*)$  ein *b*-induzierter Modul. Nach Lemma 1. (2) gilt  $A := \sum_{f \in N} S(bf) \subseteq {}_p L_n$  bzw.  $A \subseteq {}_p L_n^*$ . Sei *c* der Nachfolger von *b* in der geordneten Menge  $X_n$  und *M* direkter Summand in  $A = {}_c A + M$ . Dann gilt  ${}^b M = {}^b({}_c A) + {}^b M = {}^b({}_c A + M) = {}^b A = {}^b\left(\sum_{f \in N} S(bf)\right) = \sum_{f \in N} {}^b S(bf) = N$ ,  ${}^b M = M$ ,  ${}^a M \subseteq {}_c A = 0$  für  $b > a \in X_n$  und  ${}_c A \supseteq {}_a M \subseteq M$ , also  ${}_a M = 0$  für  $b < a \in X_n$ . Aus  ${}^b M = N$  folgt mit Lemma 1 (2)  $A \subseteq M$ , also  $A = M$ . Insbesondere sind die Abbildungen inverse Bijektionen. Die Verbandseigenschaften und die Inklusionstreue der Bijektionen sind leicht zu zeigen.

Mit den Sätzen 1, 2 und Bemerkungen 1, 2 folgt

BEMERKUNG 3. Für  $p = 1$  und  $p > n$  gilt.

(1) Jede Teilmenge *A* von  ${}_p F_n$  ( ${}_p F_n^*$ ) bzw.  ${}_0 F_n$  ( ${}_0 F_n^*$ ) ist äquivalent (\*-äquivalent) zu einer Vereinigung von *a*-induzierten Untermoduln von  ${}^a({}_p L_i)$  ( ${}^a({}_p L_i^*)$ ) bzw.  $L({}^a({}_0 L_i))$  ( $L({}^a({}_0 L_i^*))$ ),  $a \in X_i$ ,  $2 \leq i \leq n$ .

(2) Sei  $a_i$ ,  $1 \leq i \leq m$  eine geordnete Abzählung der Elemente von  $X_n$ ,  $M_i$ ,  $1 \leq i \leq m$  und  $N_i$ ,  $1 \leq i \leq m$  zwei Folgen von  $a_i$ -induzierten Untermoduln von  ${}^{a_i}({}_p L_n)$  ( ${}^{a_i}({}_p L_n^*)$ ) bzw.  $L({}^{a_i}({}_0 L_n))$  ( $L({}^{a_i}({}_0 L_n^*))$ ).

Dann sind  $\bigcup_{i=1}^m M_i$  und  $\bigcup_{i=1}^m N_i$  äquivalent ( $*$ -äquivalent) genau dann, wenn  $M_i = N_i$  für  $1 \leq i \leq m$ .

ZU BEISPIEL 1. Sei

$$\begin{aligned} M_1 &:= |x_1 \circ x_2|, & M_2 &:= |h_{3,3}|, & M_3 &:= |h_{3,4}|, \\ M_4 &:= |(x_1 \circ x_2)^2|, & M_5 &:= |(x_1 \circ x_2) \circ (x_1 \circ x_3)|, & M_6 &:= |h_{2,4}|, \\ M_I &:= \bigcup_{i \in I} M_i \text{ für } I \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}. \text{ Es gilt:} \end{aligned}$$

(a)  $M_1 \not\subseteq {}_pF_{Z_{p,3}}$ ,  $M_2 \subseteq {}_pF_{Z_{p,3}}$ ,  $M_2 \not\subseteq {}_pF_{Z_{p,4}}$ ,  $M_I \subseteq {}_pF_{Z_{p,4}}$  für  $I \subseteq \{3, 4, 5, 6\}$ ,  $M_2 \subseteq {}_pF_{S_p}$ ,  $M_6 \not\subseteq {}_pF_{S_p}$  (vgl. Beispiel 4).

(b)  $M_2$  ist  $*$ -äquivalent zu  $M_{\{2,3,4,5\}}$  für  $p \neq 3$ .

BEWEIS. Sei  $R$  ein  ${}_pF$  zugeordneter Ring. Aus  $f(x_1, x_2) := h_{3,3} \in {}_pF_R$  folgt

$$g(x_1, x_2, x_3) = f(x_1 + x_3, x_2) - f(x_1, x_2) - f(x_3, x_2) \in {}_pF_R,$$

also

$$3((x_1 \circ x_2) \circ x_3) = g(x_2, x_1, x_3) - g(x_1, x_2, x_3) \in {}_pF_R,$$

folglich  $(x_1 \circ x_2) \circ x_3 \in {}_pF_R$ , schließlich

$$M_3, M_5, M_4 = |(x_1 \circ x_1 x_2) \circ x_2 - x_1((x_1 \circ x_2) \circ x_2)| \subseteq {}_pF_R.$$

Mit Bemerkung 3 und (a)-(b) prüft man Vollständigkeit und paarweise  $*$ -Inäquivalenz der Repräsentanten.  ${}_pF_2^*$ :  $M_1 \cdot {}_pF_3^*$ :  $M_1, M_2 \cdot {}_pF_4^*$ :  $M_1, M_2, M_{\{2,6\}}, M_I$  mit  $I \subseteq \{3, 4, 5, 6\}$ .

Zu  ${}_pF_5^*$ ,  $p \in (0, 1)$ : Folgende paarweise  $*$ -inäquivalenten Repräsentanten garantieren schon unendlich viele Klassen:

$$|i(x_1 \circ x_2)h_{3,3} + h_{3,3}(x_1 \circ x_2)| \subseteq {}_{x_1, x_1, x_1, x_2, x_2}({}_pL_i), \quad i \in \mathbb{Z}_0.$$

ZU BEISPIEL 2. Sei  $b_1 := x_1, \dots, x_1$ ,  $b_2 := x_1, \dots, x_n$ ,  $b_3 := x_1, \dots, x_1$ ,  $x_2 \in X_n$ . Nach Voraussetzung gilt  $g \in T(h_{i,n})$ . Nach [2; Lemma 6.2.4, p. 156] besitzt  $g$  eine Folgeform aus  ${}_pL_n$ : Ohne Einschränkung sei deshalb  $g \in T(h_{i,n}) \cap {}_pL_n$ . Da  $|h_{i,n}|$  minimaler  $b_i$ -induzierter Modul ist, ist  $S_i := S(b_i(h_{i,n}))$  nach Satz 2 minimaler  $b_i$ -Modul. Nach Satz 1.(1)

und [6; Sätze 1,2, p. 565] sind  $|h_{i,n}|$  und  $S_i$  äquivalent, also  $T(h_{i,n}) = T(S_i)$ . Nach Bemerkung 1 gilt  $g \in T(h_{i,n}) \cap {}_p L_n = T(S_i) \cap {}_p L_n = S_i$ , also  $S(g) = S_i$ . Folglich ist  $g$  äquivalent zu  $S_i$ , also  $h_{i,n}$ .

ZU BEISPIEL 4. Die linksseitige Implikation ist trivial. Rechtsseitige Implikation: Es gilt

$$(a) (r \circ s) \circ t = 0 = (r \circ s)(r \circ t) \text{ für alle } r, s, t \in S_0.$$

Nach Bemerkung 3.(1) gibt es  $1 < n \in Z_0$ ,  $b \in X_n$  und  $0 \neq f \in {}_b({}_0 L_n^*)$ , so daß  $f \in {}_0 F_R$  und  $f \notin {}_0 F_{S_0}$ : Indem man wie in Beispiel 6 vorgeht, erhält man wegen (a), daß  ${}_a({}_0 L_n^*) \subseteq {}_0 F_{S_0}$  für ungerade  $n$  oder  $a \neq x_1, x_2, \dots, x_n$ . Also gilt  $0 \neq f \in |h_{2,n}|$  mit geradem  $n$ , folglich  $h_{2,n} \in {}_0 F_R$ .

$h(x_1, \dots, x_n) \in {}_p F$  heißt *homogen*, wenn es  $0 < j_i \in Z_0$  gibt, so daß in jedem  $h$  aufbauenden Unbestimmtenprodukt  $q$  die Unbestimmte  $x_i$  genau  $j_i$ -mal vorkommt,  $1 < i \leq n$ . Insbesondere ist dann  $d(h) := d(q)$  wohl definiert. Jedes  $f \in {}_p F$  besitzt eine eindeutige Darstellung

$$(C) f = \sum_{i=1}^m h_i, \quad h_i \text{ homogen, } h_j + h_k \text{ nicht homogen für } 1 < i, j \neq k \leq m.$$

LEMMA 2.  $R$  ist  $Z_{p,n}$ -Ring,  $n > 2$  genau dann, wenn es  $0 \neq g \in {}_p F_R$  gibt, so daß die Darstellung (C) von  $g$  wenigstens einen Summanden  $h$  mit  $d(h) < n$  besitzt. Jeder  $Z_{p,n}$ -Ring ist also  $Z_{p,i}$ -Ring für alle  $i > n$ .

BEWEIS. Rechtsseitige Implikation. Sei  $Y_{p,n} \subseteq Z_{p,n}$  Unterring der Matrizen  $(a_{i,j})$  mit  $a_{i,j} = 0$  für  $1 < j < i \leq n$ . Sei weiter  $f(x_1, \dots, x_m) \in \in {}_p F_R$ ,  $f \notin {}_p F_{Z_{p,n}}$ . Wegen  $Z_{p,n} = Z_p + Y_{p,n}$  gibt es  $n_i \in Z_p$ ,  $1 < i \leq m$ , so daß aus  $f$  bei den Substitutionen  $x_i \rightarrow n_i + x_i$  ein  $g \in {}_p F_R$ ,  $g \notin {}_p F_{Y_{p,n}}$  entsteht. Mit  $(Y_{p,n})^n = 0$  folgt die Behauptung.

Linksseitige Implikation: Es reicht, die Annahme  $g \in {}_p F_{Y_{p,n}} \supseteq {}_p F_{Z_{p,n}}$  zum Widerspruch zu führen: Aus  $g$  entsteht durch Streichung aller Unbestimmtenprodukte einer Dimension größer als  $n - 1$  wegen  $(Y_{p,n})^n = 0$  ein Element  $0 \neq h_1 \in {}_p F_{Y_{p,n}}$ . Nach [2; Lemma 6.2.4, p. 156] gibt es  $0 \neq h_2(x_1, \dots, x_k) \in {}_p F_{Y_{p,n}} \cap {}_p L_k$  mit  $k < n$ . Ohne Einschränkung komme evtl. nach Permutation der Unbestimmten der Summand  $m_1 x_1 x_2 \dots x_k$ ,  $0 \neq m_1 \in Z_p$  in  $h_2$  vor. Für die Matrizen  $E_j = (a_{i,j})$  mit  $a_{i,i+1} = 1$ ,  $a_{i,j} = 0$  sonst,  $1 \leq l < n$  gilt dann  $h_2(E_1, \dots, E_k) = m_1 E_1 \dots E_k \neq 0$  im Widerspruch zu  $h_2 \in {}_p F_{Y_{p,n}}$ .

LEMMA 3. Sei  $R$  ein  ${}_p F$  zugeordneter Ring mit Zentrum  $Z_R := (r \in R | r \circ R = 0)$ . Eine Form  $f(x_1, \dots, x_n) \in {}_p F$  heißt  $Z_R$ -Form genau dann, wenn es  $0 \neq g(x_{n+1}) \in {}_p F$  gibt, so daß  $g(s)f(r_1, \dots, r_n) = 0$  für

alle  $s \in Z_R$  und  $r_i \in R$ ,  $1 \leq i \leq n$ . Für  $f \in {}_pF_R$  ist jeder Summand der Darstellung (C) von  $f$  eine  $Z_R$ -Form.

BEWEIS. Es reicht durch Induktion über  $m$  zu zeigen: Für homogene Formen  $h_i(x_1, \dots, x_n) \in {}_pF$  und Formen  $0 \neq g_i(x_{n+1}) \in {}_pF$  folgt aus  $\sum_{i=1}^m g_i(s)h_i(r_1, \dots, r_n) = 0$  für alle  $s \in Z_R$  und  $r_j \in R$ ,  $1 \leq j \leq n$ , daß  $h_i$  eine  $Z_R$ -Form ist für  $1 \leq i \leq m$ . Für  $m = 1$  ist die Aussage trivial. Sei  $m > 1$  und die Behauptung für alle Summen mit weniger als  $m$  Summanden bewiesen. Es gibt wenigstens eine Unbestimmte  $x_{i_0}$ , die nicht in den aufbauenden Unbestimmtenprodukten aller  $h_i$  mit derselben Anzahl auftritt.  $x_{i_0}$  komme in den Unbestimmtenprodukten von  $h_i$  genau  $k_i$ -mal vor für  $1 \leq i \leq m$ . Sei  $l := \text{Maximum}(k_1, \dots, k_m)$ . Nach evtl. Umordnung der Summanden  $g_i h_i$  ist  $k_i < j$  für  $1 \leq i \leq k$ ,  $k_i = j$  für  $k < i \leq m$ . Für alle  $s \in Z_R$ ,  $r_j \in R$ ,  $1 \leq j \leq n$  gilt: Aus

$$\sum_{i=1}^m s^j g_i(s) h_i(r_1, \dots, r_n) = 0,$$

$$\sum_{i=1}^m s^{k_i} g_i(s) h_i(r_1, \dots, r_n) = \sum_{i=1}^m g_i(s) h_i(r_1, \dots, s r_{i_0}, \dots, r_n) = 0$$

folgt  $\sum_{i=1}^k (s^j - s^{k_i}) g_i(s) h_i(r_1, \dots, r_n) = 0$ . Wegen  $k < m$  gibt es  $0 \neq g(x_{n+1}) \in {}_pF$ , so daß  $g(s) h_i(r_1, \dots, r_n) = 0$  für  $1 \leq i \leq k$ , also  $\sum_{i=k+1}^m g(s) \cdot g_i(s) h_i(r_1, \dots, r_n) = 0$ . Wegen  $m - k < m$  sind auch die Formen  $h_i$ ,  $k < i \leq m$   $Z_R$ -Formen.

LEMMA 4. Ist  $R$  ein  $Z_{p,n}$ -Ring,  $n > 2$ , so besitzt  $R$  eine  $Z_R$ -Form  $f \in {}_pL_m^*$  mit  $m < n$ . Enthält  $Z_R$  einen unendlichen Unterring  $S$ , dessen Elemente allesamt Nichtnullteiler von  $R$  sind, so gilt  $f \in {}_pF_R$ .

BEWEIS. 1. *Behauptung.* Nach den Lemmata 2 und 3 gibt es eine homogene  $Z_R$ -Form  $0 \neq g_0$  mit  $d(g_0) < n$ . Evtl. nach Umbenennung kommen in  $g_0$  genau die Unbestimmten  $x_i$ ,  $1 \leq i \leq k \leq d(g_0)$  vor, wobei entweder  $f_0 := g_0 \in {}_pL_k$  oder  $x_1$  wenigstens 2-mal erscheint. Die Darstellung (C) der  $Z_R$ -Form  $g_0(x_1 + x_{k+1}, x_2, \dots, x_k)$  besitzt nach dem Beweis von Lemma 3 einen Summanden  $0 \neq g_1$ , welcher  $Z_R$ -Form ist und in dem  $x_{k+1}$  genau 1-mal vorkommt. Dieses Verfahren liefert schließlich eine  $Z_R$ -Form  $f_0 \in {}_pL_j$ , mit  $j < n$ . Durch partielle Ableitung von  $f_0$  erhält man nach evtl. Umbenennung der Unbestimmten  $0 \neq f \in {}_pL_m^*$  mit  $m < n$  oder  $0 \neq f \in Z_p$ . Im letzteren Falle setzt man

$f := j(x_1 \circ x_2)$ . Da  $R$  ein Einselement besitzt, ist mit  $f_0$  auch  $f$  eine  $Z_R$ -Form.

2. *Behauptung.* Es gibt  $0 \neq g(x_{m+1}) \in {}_pF$ , so daß  $g(s)f(r_1, \dots, r_m) = 0$  für alle  $s \in Z_R$  und  $r_i \in R$ ,  $1 \leq i \leq m$ . Aus  $f \notin {}_pF_R$  würde  $g \in {}_pF_s$  folgen im Widerspruch dazu, daß  $S$  ein unendlicher Integritätsbereich ist.

LEMMA 5. Sei  $J_R$  das *Jacobsonradikal* von  $R$ . Für alle  $r \in R$ ,  $s \in J_R$  folgt aus  $r = sr$  stets  $r = 0$ , da es bekanntlich  $t \in J_R$  gibt, so daß  $ts - s - t = 0$ , also  $r = t(sr - r) - (sr - r) = 0$ .

LEMMA 6. Sei  $R$  ein  $Z_{p,4}$ -Ring oder  $h_{2,4} \notin {}_pF_R$  und  $R$  ein  $Z_{p,5}$ -Ring.  $Z_R$  enthalte einen unendlichen Unterring  $S$ , dessen Elemente allesamt Nichtnullteiler von  $R$  sind. Dann ist  $R'$  nil. Insbesondere gilt I (1) mit  $S := Z_0$ .

BEWEIS. Nach Lemma 4 gibt es  $0 \neq f \in {}_pF_R \cap {}_pL_m^*$  mit  $m < 4$  bzw.  $m < 5$ . Nach Lemma 1 (1) gibt es  $b \in X_m$ , so daß  $0 \neq {}^bS(f) \cap \cap {}^b({}_pL_m^*) \subseteq {}_pF_R$ . Gemäß Beispiel 6 gilt mit den Notationen des Beweises zu Beispiel 1 für  $m < 4$  bzw.  $m < 5$  wegen  $h_{2,4} \notin {}_pF_R$ , daß  ${}^bS(f) = M_i$  mit  $1 \leq i \leq 2$  bzw.  $1 \leq i \leq 5$ . Aus  $M_i \subseteq {}_pF_R$  mit  $1 \leq i \leq 3$  folgt nach [3; Application 2, p. 271] daß  $R'$  nil ist. Für  $M_4 \subseteq {}_pF_R$  bzw.  $M_5 \subseteq {}_pF_R$  schließt man analog.

ZU I. (2): Da es zu jedem  $r \in R'$  einen endlich erzeugten Unterring  $T$  von  $R$  mit denselben Voraussetzungen und  $r \in T'$  gibt und nach [1]  $J_T$  nil ist, sei ohne Einschränkung  $R$  endlich erzeugt und  $J_R = 0$ . Nach [2; Theorem 2.2.1, p. 54] reicht es jetzt zu zeigen, daß jeder primitive Ring  $R$  kommutativ ist. Als  $Z_{p,2}$ -Ring ist  $R$  nach [2; Theorem 6.3.1, p. 157] endlich dimensionale Divisionsalgebra über  $Z_R$ . Ist  $R$  endlich, so ist  $R$  nach [2; Theorem 3.1.1, p. 70] kommutativ. Anderenfalls ist  $Z_R$  unendlicher Körper. Mit Lemma 6 folgt für  $S := Z_R$ , daß  $R'$  nil, also  $R$  kommutativ ist.

LEMMA 7. Sei  $A$  Ideal von  $R$  und es gelte:

(\*) Zu jedem Paar  $r, s \in R$  gibt es eine Hauptform  $f_{r,s}(x_1, x_2) \in {}_0F$ , so daß die  $f_{r,s}$  aufbauenden Unbestimmtenprodukte allesamt Dimensionen größer als 2 besitzen und  $\text{ros} = f_{r,s}(r, s)$ .

(1) Ist  $A$  hypernilpotent [7; p. 401], so gilt  $A \circ A = 0$ .

(2) Ist  $A$  hyperkommutativ [7; p. 401], so gilt  $\{A \circ A\} \circ \{A \circ A\} = 0$ . Hierbei sei  $\{C\}$  das von  $C \subseteq R$  erzeugte Ideal von  $R$ .

BEWEIS. Da die Hauptformen  $f_{r,s}$  Darstellungen als Summen mit Summanden der Gestalt  $q_x(x_1 \circ x_2)q_y$ ,  $q_x, q_y \in Q \cup (1)$ ,  $q_x q_y \in Q$  besitzen, gilt  $J \circ J \subseteq J\{J \circ J\} + \{J \circ J\}J$ , also

(a)  $J \circ J \subseteq J^n\{J \circ J\} + \{J \circ J\}J^n$  für alle Ideale  $J$  von  $R$  und  $1 \leq n \in \mathbb{Z}_0$ :

Für alle  $c, d \in J$ ,  $r, s \in R$  gilt

$$cd(r \circ s) = cr \circ ds - (c \circ ds)r - (cr \circ d)s + (c \circ d)rs,$$

$$(r \circ s)cd = rc \circ sd - s(rc \circ d) - r(c \circ sd) + rs(c \circ d),$$

$$(c \circ r)d = c \circ rd - r(c \circ d), \quad c(d \circ r) = d \circ cr - (c \circ d)r \in \{J \circ J\},$$

also

(b)  $J^2 R' + R' J^2 + \{J \circ R\}J + J\{J \circ R\} \subseteq \{J \circ J\}$  für alle Ideale  $J$  von  $R$ .

(1) Sei  $B$  maximales Element der Menge aller Ideale  $J$  von  $R$  mit  $J \subseteq A$  und  $J \circ J = 0$ . Wir führen die Annahme  $B \subsetneq A$  zum Widerspruch: Es gibt ein Ideal  $C$  von  $R$  mit  $B \subsetneq C \subseteq A$  und  $C^2 \subseteq B$ . Mit

(a) und (b) folgt

$$\{C \circ C\} \subseteq C^4\{C \circ C\} + \{C \circ C\}C^4 \subseteq B^2 R' + R' B^2 \subseteq \{B \circ B\} = 0.$$

(2) Sei  $B$  maximales Element der Menge aller Ideale  $J$  von  $R$  mit  $J \subseteq A$  und  $\{J \circ J\} \circ \{J \circ J\} = 0$ . Wir führen die Annahme  $B \subsetneq A$  zum Widerspruch: Es gibt ein Ideal  $C$  von  $R$  mit  $B \subsetneq C \subseteq A$  und  $C \circ C \subseteq B$ . Mit (b) und (1) folgt  $\{C \circ C\}^3 \subseteq (\{C \circ C\}^2 R')^3 \subseteq (B^2 R')^3 \subseteq \{B \circ B\}^3 \subseteq \{B \circ B\}^2 R' = 0$ , also  $\{C \circ C\} \circ \{C \circ C\} = 0$  im Widerspruch zur Maximaleigenschaft von  $B$ .

ZU (II): Berücksichtigt man im Beweis von Lemma 2, daß  $R$  starker  $Z_{p,3}$ -Ring ist, so erhält man, daß es eine Hauptform  $0 \neq g \in {}_p F_R$  gibt, so daß in der Darstellung (C) von  $g$  wenigstens ein Summand  $h$  mit  $d(h) < 3$  vorkommt. Nach evtl. Umordnung der Unbestimmten gilt  $h = m(x_1 \circ x_2)$ ,  $0 \neq m \in Z_p$ . Für  $f_{r,s}(x_1, x_2) := x_1 \circ x_2 - m^{-1}g(x_1, x_2, 0, \dots, 0)$  gilt Lemma 7 (\*). Nach [5; Theorem 4, p. 339], [4; Theorem 5.5, p. 349] und Lemma 7 ist  $R'$  ein  $L$ -Ring, also das von  $R' \circ R'$  erzeugte Ideal von  $R'$  kommutativ, folglich  $R'$  nilpotent, schließlich  $R' \circ R' = 0$ .

LEMMA 8. Erfüllt ein Ring  $R$  die schwache Minimalbedingung für Linksideale, so ist  $J_R$  hyper- $J_R$ -annullierendes Ideal von  $R$ .

BEWEIS analog [10; Lemma 1, p. 350]. Anstelle der Nilpotenz der Elemente verwendet man Lemma 5.

ZU (III). Nach Lemma 1 ist  $R$  ein  $Z_{p,4}$ -Ring, also nach I.(2)  $R'$  nil schließlich nach (II)  $R' \circ R' = 0$ .

LEMMA 9. Ist  $R$  hyperkommutativ und gilt Lemma 7 (\*) mit der Zusatzbedingung, daß in jedem Unbestimmtenprodukt  $x_1$  wenigstens 2-mal,  $x_2$  wenigstens 1-mal vorkommt, so ist  $R$  kommutativ.

BEWEIS. Ohne Einschränkung sei  $R$  endlich erzeugt und nach [2; Lemma 2.2.2, p. 52] subdirekt irreduzibel, besitze also ein kleinstes Ideal  $D \neq 0$ . Nach Lemma 7 ist  $R' \circ R' = 0$ , also nach Lemma 7.(b)  $a \circ r = f_{a,r}(a, r) \in R' \{R' \circ R\} + \{R' \circ R\} R' = 0$  für alle  $a \in R'$ ,  $r \in R$ , folglich  $R' \circ R = 0$ , schließlich  $(R')^2 = 0$ . Für  $E := \{r \mid r \in R, rD = 0\}$  gilt  $E \circ R = 0$ , da aus  $e \circ s \neq 0$ ,  $e \in E$ ,  $s \in R$  wegen  $(E \circ R) \circ R = 0$  folgen würde, daß  $e \circ s = f_{e,s}(e, s) = t(e \circ s)$  mit  $t \in E$ , also  $d = td$  für alle  $d \in D \subseteq \{e \circ s\}$  im Widerspruch zu  $ED = 0$ . Wir nehmen  $E \neq R$  und  $D \subseteq R' \neq 0$  an, da anderenfalls nichts zu zeigen ist. Wegen  $R'D = 0$  ist  $R' \subseteq E$ , also  $R/E$  kommutativ.

$R/E$  ist ein Körper: Zu  $r, s \in R$ ,  $r, s \notin E$  gibt es  $d \in D$ , so daß  $rd \neq 0$ . Wegen  $D \circ R = 0$ ,  $RD \neq 0$  und der Minimaleigenschaft von  $D$  gilt  $D = RD = R\{rd\} = Rrd$ , also  $trd = d$  mit  $t \in R$ , folglich  $(str - s)d = 0$ , demnach  $(str - s)D = 0$ , schließlich  $(st)r \equiv s$  modulo  $E$ .

Bekanntlich ist  $R/E$  endlich, da  $R/E$  ein als Ring endlich erzeugter Körper ist. Gemäß [2; p. 86] folgt hieraus wegen  $E \circ R = 0$ , daß  $R' = 0$ .

LEMMA 10. Besitzt jedes epimorphe Bild  $S \neq 0$  von  $R$  ein nils Element  $a \neq 0$  oder ein kommutatives Ideal  $J \neq 0$  und gilt Lemma 7.(\*) mit der Zusatzbedingung, daß in jedem Unbestimmtenprodukt  $x_1$  wenigstens 2-mal und  $x_2$  genau 1-mal vorkommt, so ist  $R$  kommutativ.

BEWEIS. Nach Lemma 9 reicht es zu zeigen, daß  $R$  hyperkommutativ ist. Sei  $S \neq 0$  epimorphes Bild von  $R$ . Besitzt  $S$  ein kommutatives Ideal  $J \neq 0$ , so ist nichts zu zeigen. Anderenfalls gibt es  $0 \neq a \in S$  mit  $a^2 = 0$ , also  $a \circ s = f_{a,s}(a, s) \in |asa| = |(a \circ s)a|$  für alle  $s \in S$ , folglich  $a \circ S = 0$ , schließlich  $\{a\}^2 = 0$ .

ZU (IV). Geht man vor wie beim Beweis von (II), so erhält man eine Form  $f_{r,s}(x_1, x_2) = g$ , welche die 2. Voraussetzung von Lemma 10

erfüllt. Da der einfache nichtkommutative Ring  $Z_{p,2}$  die 1. Voraussetzung von Lemma 10 erfüllt, ist  $g - x_1 \circ x_2 \notin {}_pF_{Z_{p,1}}$ , also  $R$  ein  $Z_{p,2}$ -Ring. Nach Lemma 2 ist  $R$  ein  $Z_{p,4}$ -Ring, also nach I.(2)  $R'$  nil, Schließlich nach Lemma 10  $R$  kommutativ.

**BEMERKUNG 4.** Sei  $p > 1$ ,  $R$  endlich erzeugter starker  $Z_{p,3}$ -Ring endlicher Klasse (es gibt eine Folge  $J_i$ ,  $0 \leq i < n$  von Idealen von  $R$ , so daß  $J_0 = R$ ,  $J_n = 0$ ,  $J_{i+1} \subseteq J_i$ ,  $J_i \circ R \subseteq J_{i+1}$ ,  $0 \leq i < n$ ) und  ${}_R Z$  das größte Ideal  $A$  von  $R$  mit  $A \subseteq Z_R$ . Dann ist  $S := R/{}_R Z$  endlich.

**BEWEIS.** Man zeigt durch vollständige Induktion

$$(a) \ r^{p^n} \circ R = 0 \text{ für alle } r \in R.$$

Geht man vor wie beim Beweis von (II), so erhält man eine Hauptform  $0 \neq g_0 \in {}_pF_R$ , deren Darstellung (C) den Summanden  $x_1 \circ x_2$  besitzt.

Nach Lemma 3 gibt es  $0 \neq g(x_3) \in {}_pF$ , so daß  $g(s)(R \circ R) = 0$  für alle  $s \in Z_R$ , also wegen (a)  $g(r^{p^n})(R \circ R) = 0$ ,  $g(r^{p^n}) \circ R = 0$  für alle  $r \in R$ , folglich  $g(r^{p^n}) \in {}_R Z$  für alle  $r \in R$ . Da  $S/S'$  endlich erzeugt ist und die Charakteristik  $p$  besitzt, ist  $S/S'$  endlich, also nach [10; III]  $S$  endlich.

#### LITERATUR

- [1] S. A. AMITSUR, *A generalization of Hilbert's Nullstellensatz*, Proc. Amer. Math. Soc., **8** (1957), pp. 649-656.
- [2] I. N. HERSTEIN, *Noncommutative Rings*, The Mathematical Association of America (1973).
- [3] I. N. HERSTEIN, *A remark on rings and algebras*, Michigan Math. J., **10** (1963), pp. 269-272.
- [4] S. A. JENNINGS, *Central chains of ideals in an assoziative ring*, Duke Math. J., **9** (1942), pp. 341-355.
- [5] J. LEVITZKI, *A theorem on polynomial identities*, Proc. Amer. Math. Soc., **1** (1950), pp. 334-341.
- [6] W. SPECHT, *Gesetze in Ringen I*, Mathematische Zeitschrift, Band 52, Heft 5 (1949), pp. 557-589.
- [7] W. STREB, *Über schwach hyperzentrale Ringe*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **44** (1970), pp. 399-409.

- [8] W. STREB, *Über Algebren mit nilpotenten assoziierten Lie-Ringen*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **46** (1971), pp. 137-139.
- [9] W. STREB, *Über Ringe mit auflösbaren assoziierten Lie-Ringen*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **50** (1973), pp. 127-142.
- [10] W. STREB, *Endlichkeitssätze über Ringe*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **52** (1974), pp. 185-192.

Manoscritto pervenuto in Redazione il 10 novembre 1975.