RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

SERGIO BRESSAN

Integrazione del problema dell'elastostatica nel caso asimmetrico e con coppie di contatto. Applicazione al problema delle piastre

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 56 (1976), p. 257-264

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1976__56__257_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 56 (1977)

Integrazione del problema dell'elastostatica nel caso asimmetrico e con coppie di contatto. Applicazione al problema delle piastre.

SERGIO BRESSAN (*)

PARTE I

Integrazione del problema dell'elastostatica isotermica nel caso asimmetrico e con coppie di contatto.

1. Introduzione.

G. GRIOLI (1), basandosi sulle proprietà integrali delle equazioni dell'equilibrio di un sistema continuo rispetto alla successione dei monomi formati colle tre coordinate cartesiane, ha costruito un procedimento di integrazione relativo al problema dell'equilibrio di un corpo elastico omogeneo. È altresí noto (2) che il Grioli ha applicato il suddetto procedimento al problema della statica delle piastre omogenee ove, operando in due dimensioni, arriva, tra l'altro, a mostrare che le formule fondamentali della teoria ordinaria (momenti flettenti,

---

(*) Indirizzo dell'A.: Seminario Matematico dell'Università - via Belzoni 7 - 35100 Padova.

Lavoro eseguito nell'ambito del Gruppo Nazionale per la Fisica Matematica del C.N.R.

(1) *Proprietà di media ed integrazione del problema dell'elastostatica isoterma*, Annali di Matematica pura e applicata, (4), **33** (1952).

(2) *Integrazione del problema della statica delle piastre omogenee di spessore qualunque*, Annali della Scuola Normale di Pisa, Serie III, **6**, Fas. I-II (1952).

sforzi di taglio, ecc.) seguono subito dalle proprietà di media e dall'ordine di approssimazione prestabilito.

I suddetti risultati riguardano il caso classico con «stress» simmetrico.

Nel presente lavoro estendo i suddetti risultati al caso asimmetrico e con coppie di contatto. In questa prima parte estendo l'integrazione del problema dell'elastostatica isoterma per un sistema tridimensionale qualunque. Nella seconda parte applicherò i risultati ottenuti sviluppando la teoria ordinaria della piastra sottile.

Inoltre, nel caso della piastra sottile, omogenea e nell'ipotesi di isotropia elastica, farò vedere come le espressioni delle derivate seconde della terza componente dello spostamento (abbassamento), da cui sono state ricavate le suaccennate formule fondamentali della teoria ordinaria, siano profondamente modificate nel caso di un continuo di Cosserat con rotazioni libere.

2. Valori medi dei prodotti delle caratteristiche di tensione e di coppia specifica per i monomi $(x_1x_2x_3)^n$.

Sia C la configurazione di equilibrio di un continuo di Cosserat con rotazioni libere di contorno completo σ. Sia inoltre σ' la porzione di σ ove sono presenti i vincoli. Indico con F_r e M_r $(r = 1, 2, 3)$ le componenti, rispetto ad una prefissata terna cartesiana trirettangola $Ox_1x_2x_3$, della forza e della coppia specifica di massa, e con f_r e m_r la forza e la coppia specifica superficiale. È chiaro che su σ', f_r e m_r hanno il carattere di reazione vincolare.

Se indico con X_{rs} le caratteristiche di tensione e con N_{rs} quelle di coppia specifica (intendo che X_{rs} è la componente r-sima dello sforzo specifico s-simo; e analogamente per N_{rs}) le equazioni di equilibrio si scrivono:

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} \left\{ \begin{aligned} X_{rs,s} &= F_r \\ N_{rs,s} + e_{rpq}X_{qp} &= M_r \end{aligned} \right. & \text{in } C(r = 1, 2, 3) \\ \left\{ \begin{aligned} X_{rs}n_s &= f_r \\ N_{rs}n_s &= m_r \end{aligned} \right. & \text{su } \sigma \end{array} \right.$$

ove n_s sono i coseni direttori della normale interna a σ e e_{rpq} è il tensore di Ricci.

Detti η, τ, λ tre numeri interi positivi o nulli, pongo:

$$(2)\qquad b^{(r)}_{\eta\tau\lambda} = -\frac{1}{C}\left\{\int_C x_1^\eta x_2^\tau x_3^\lambda F_r\, dC + \int_\sigma x_1^\eta x_2^\tau x_3^\lambda f_r\, d\sigma\right\}\qquad (r = 1, 2, 3)$$

$$(3)\qquad d^{(r)}_{\eta\tau\lambda} = -\frac{1}{C}\left\{\int_C x_1^\eta x_2^\tau x_3^\lambda M_r\, dC + \int_\sigma x_1^\eta x_2^\tau x_3^\lambda m_r\, d\sigma\right\}\qquad (r = 1, 2, 3)$$

D'ora innanzi intendo che il soprassegno su una funzione ne indica il valor medio in C.

Moltiplico la $(1)_1$ per $x_1^\eta x_2^\tau x_3^\lambda dC$, integro in C e aggiungo la $(1)_3$ moltiplicata per $x_1^\eta x_2^\tau x_3^\lambda d\sigma$ e integrata su σ. Dopo facili passaggi si ottiene:

$$(4)\qquad \overline{\eta X_{r1} x_1^{\eta-1} x_2^\tau x_3^\lambda} + \overline{\tau X_{r2} x_1^\eta x_2^{\tau-1} x_3^\lambda} + \overline{\lambda X_{r3} x_1^\eta x_2^\tau x_3^{\lambda-1}} = b^{(r)}_{\eta\tau\lambda}\qquad (r = 1, 2, 3)$$

Analogamente, moltiplicando la $(1)_2$ per $x_1^\eta x_2^\tau x_3^\lambda dC$, integrando in C e aggiungendo la $(1)_4$ moltiplicata per $x_1^\eta x_2^\tau x_3^\lambda d\sigma$ e integrata su σ, si ottiene:

$$(5)\qquad \overline{\eta N_{r1} x_1^{\eta-1} x_2^\tau x_3^\lambda} + \overline{\tau N_{r2} x_1^\eta x_2^{\tau-1} x_3^\lambda} + \overline{\lambda N_{r3} x_1^\eta x_2^\tau x_3^{\lambda-1}} - \\ - \overline{e_{rpq} X_{qp} x_1^\eta x_2^\tau x_3^\lambda} = d^{(r)}_{\eta\tau\lambda}\qquad (r = 1, 2, 3)\,.$$

Le (4) e (5) vincolano i valori medi delle caratteristiche di tensione e di coppia specifica moltiplicate per i monomi $x_1^\eta x_2^\tau x_3^\lambda$ mediante espressioni involventi la sola sollecitazione esterna [3].

3. Approssimazioni polinomiali delle caratteristiche di tensione e di coppia specifica.

Chiamo $\{w_t\}$ la successione di tutti i possibili monomi formati con $x_1 x_2 x_3$ e ordinati in modo che il grado non decresca al crescere di t. Indico con m_n' l'intero positivo tale che $m_n' + 1$ rappresenti il numero

[3] Per questo paragrafo e per il successivo vedi: S. Bressan, *Espressioni polinomiali dello « stress » per un continuo di Cosserat*, Rendiconti dell'Accademia Nazionale dei Lincei, Serie VIII, **57**, fasc. 6 (Dicembre 1974).

di monomi in $x_1 x_2 x_3$ di grado minore o uguale a n. Nel seguito userò notazioni ad un solo indice per le X_{rs} e N_{rs} ($X_r = X_{rr}$; $X_{r+3} = X_{r+1,r+2}$; $X_{r+6} = X_{r+2,r+1}$; $r = 1, 2, 3$).

Fissata ad arbitrio una reazione su σ' (ossia fissato su σ' f_r e m_r) costruiamo le $b^{(r)}_{\eta\tau\lambda}$ e $d^{(r)}_{\eta\tau\lambda}$ corrispondenti ai monomi $w_0, \dots, w_{m'}$, secondo (4), (5).

Sia $G^*_{m'}$, un insieme di $2(9 + 9m'_{n-1})$ costanti $\overline{X_r w_0}, \dots, \overline{X_r w_{m'_{n-1}}}$, $\overline{N_r w_0}, \dots, \overline{N_r w_{m'_{n-1}}}$ soddisfacenti le (4), (5). Chiamo $I^*_{m'}$ l'insieme descritto da $G^*_{m'}$, al variare della reazione in σ' e delle suddette costanti verificanti (4), (5).

Sia P_t il polinomio ottenuto aggiungendo a w_t quella combinazione lineare dei monomi $w_0, \dots w_{t-1}$ che rende P_t ortogonale in C a $w_0, \dots, w_{t-1}$ e sia $\{P_t\}$ la successione di tutti i polinomi ortogonali in C e linearmente indipendenti così costruiti.

È evidente che ognuno dei valori medi $\overline{X_r P_t}$, $\overline{N_r P_t}$ risulta combinazione lineare di alcuni degli $\overline{X_{rs} x_1^{\eta'} x_2^{\tau'} x_3^{\lambda'}}$ e di alcuni dei $\overline{N_{rs} x_1^{\eta'} x_2^{\tau'} x_3^{\lambda'}}$ rispettivamente.

Definisco ora le costanti $\overline{X_r^{(m)} P_t}$ e $\overline{N_r^{(m)} P_t}$ ($t = 0, \dots, m$).

Detto $n-1$ il grado di P_m e $m' = m'_n$, P_t si può scrivere:

$$P_m = \sum_{0=i}^{m'} \gamma_i w_i \qquad (\gamma_i = \text{cost}; \ m = 1, 2 \dots) \tag{6}$$

Preso in $I^*_{m'}$ un $G^*_{m'}$ ossia un insieme del tipo:

$\overline{X_r w_0}, \dots, \overline{X_r w_\mu}$, $\overline{N_r w_0}, \dots, \overline{N_r w_\mu}$ (con $\mu = m'_{n-1} \geqslant m$), costruisco l'insieme G_m formato da $\overline{X_r^{(m)} P_t}$, $\overline{N_r^{(m)} P_t}$ ($r = 1 \dots 9$; $t = 0 \dots m$) con:

$$\left\{ \begin{aligned} \overline{X_r^{(m)} P_t} &= \sum_{0=i}^{m} \gamma_i \overline{X_r w_i} \\ \overline{N_r^{(m)} P_t} &= \sum_{0=i}^{m} \gamma_i \overline{N_r w_i} \end{aligned} \right. \qquad (r = 1, \dots, 9)\,. \tag{7}$$

Nel seguito chiamerò I_m l'insieme di tutti i gruppi G_m ottenuti facendo variare $G^*_{m'}$ in $I^*_{m'}$. Posto:

$$\varrho_t^2 = \frac{1}{C} \int_C P_t^2 \, dC \qquad (t = 1, 2, \dots) \tag{8}$$

dirò che le nonuple di funzioni:

$$(9)\qquad \left|\begin{aligned} X_r^{(m)} &= \sum_{0=t}^{m} \frac{\overline{X_r^{(m)} P_t}}{\varrho_t^2} P_t \\ N_r^{(m)} &= \sum_{0=t}^{m} \frac{\overline{X_r^{(m)} P_t}}{\varrho_t^2} P_t \end{aligned}\right. \qquad (r = 1, \dots, 9)$$

rappresentano un'*approssimazione di ordine m di una qualunque soluzione delle equazioni di equilibrio se le costanti* $\overline{X_r^{(m)} P_t}$ e $\overline{N_r^{(m)} P_t}$ $(r = 1 \dots 9;\ t = 0, 1, \dots, m)$ costituiscono un G_m.

Faccio l'ipotesi che il materiale sia iperelastico e, trattandosi di teoria lineare con stato di riferimento esente da stress, suppongo che il doppio dell'energia potenziale elastica specifica sia esprimibile mediante una forma quadratica nelle diciotto X_{rs}, N_{rs}.
Chiamati m_{ij} gli opportuni coefficienti e, per brevità, posto:

$$\left\{\begin{aligned} T_i &= X_i \\ T_{i+9} &= N_i \end{aligned}\right. \qquad \text{per } i = 1, 2, \dots, 9$$

scrivo:

$$(10)\qquad W_m = \frac{1}{2} \sum_{0=t}^{m} \sum_{1=i,j}^{18} m_{ij} \frac{\overline{T_i P_t}\ \overline{T_j P_t}}{\varrho_t^2}$$

Se si identificano gli $\overline{X_r P_t}$ e $\overline{N_r P_t}$ che intervengono in (10) con gli $\overline{X_r^{(m)} P_t}$, $\overline{N_r^{(m)} P_t}$ delle (9), W_m coincide ([4]) coll'energia potenziale elastica $W^{(m)}$ corrispondente all'approssimazione polinomiale rappresentata dale (9). La soluzione del problema elastico soddisfa ad un certo teorema variazionale del tipo di Menabrea ([5]).

Inoltre si può affermare che: « La (9) rappresenta un'approssimazione polinomiale di ordine m della soluzione del problema elastico

---

([4]) Vedi nota ([3]).

([5]) Vedi: *a*) G. Grioli, *Linear micropolar media with constrained rotations*, Micropolar Elasticity, simposium organized by the department of mechanics of solids, Udine, june 1972. *b*) G. Grioli, Nota presentata al simposio tenutosi ad Udine dal 17 al 21 giugno 1974 intitolato *Mixtures and structured continua*.

se e solo se le costanti $\overline{X_r^{(m)}P_t}$, $\overline{N_r^{(m)}P_t}$ $(r = 1, \ldots, 9;\ t = 0, \ldots, m)$ costituiscono il gruppo G_m minimizzante W_m in I_m ».

Infatti è stato dimostrato che le approssimazioni polinomiali così ottenute soddisfano le condizioni di congruenza per ogni m ([6]).

4. Un teorema fondamentale. Procedimento di integrazione.

Vale il seguente:

Teorema. Le funzioni X_r, N_r $(r = 1, \ldots, 9)$ soddisfano quasi ovunque alle equazioni indefinite dell'equilibrio e a quelle al contorno su $\sigma - \sigma'$ se è:

$$\left\{ \begin{aligned} X_r &= \lim_{m \to \infty} X_r^{(m)} \\ N_r &= \lim_{m \to \infty} N_r^{(m)} \end{aligned} \right. \tag{11}$$

ove le $X_r^{(m)}$, $N_r^{(m)}$ sono polinomi della forma (9) colle costanti $\overline{X_r^{(m)}P_t}$, $\overline{N_r^{(m)}P_t}$ $(r = 1, \ldots, 9;\ t = 0, \ldots, m)$ appartenenti allo stesso gruppo G_m.

Infatti, supposto che X_r, N_r $(r = 1, \ldots, 9)$ costituiscano una soluzione a quadrato sommabile delle (1), si ha:

$$X_r = \sum_{0=t}^{\infty} \frac{\overline{X_r P_t}}{\varrho_t^2} P_t; \qquad N_r = \sum_{0=t}^{\infty} \frac{\overline{N_r P_t}}{\varrho_t^2} P_t \qquad (r = 1, \ldots, 9) .$$

Basta allora ricordare [vedi (9)] che le $X_r^{(m)}$, $N_r^{(m)}$ sono combinazioni lineari dei polinomi P_t/ϱ_t^2 i cui coefficienti $\overline{X_r^{(m)}P_t}$ e $\overline{N_r^{(m)}P_t}$ tendono a $\overline{X_r P_t}$ e $\overline{N_r P_t}$ rispettivamente quando $m \to \infty$ per ritenere valide le (11).

Viceversa consideriamo le funzioni X_r, N_r $(r = 1, \ldots, 9)$ soddisfacenti le (11) con $X_r^{(m)}$ e $N_r^{(m)}$ del tipo (9). I coefficienti che compaiono in (9), $\overline{X_r^{(m)}P_t}$ e $\overline{N_r^{(m)}P_t}$, costituendo uno stesso gruppo G_m, sono combinazioni lineari di termini soddisfacenti le (4) e (5) estesi (per $m \to \infty$) a tutti gli elementi della successione $\{w_t\}$. Ma le (4) e (5) estese a tutti gli elementi della successione $\{w_t\}$ equivalgono alle

---

([6]) Vedi nota ([3]).

relazioni:

$$
(12)\quad \left\{\begin{aligned}
&\int_C \left[\sum_{s=1}^{3} \frac{\partial X_{rs}}{\partial x_3} - F_r\right] P_t \, dC + \int_\sigma \left[\sum_{s=1}^{3} X_{rs} n_s - f_r\right] P_t \, d\sigma = 0 \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (r = 1, 2, 3; \quad t = 0, 1, 2 \ldots) \\
&\int_C \left[\sum_{s=1}^{3} \frac{\partial N_{rs}}{\partial x_s} + \sum_{pq} e_{rpq} X_{qp} - M_r\right] P_t \, dC + \\
&\qquad\qquad\qquad \int_\sigma \left[\sum_{s=1}^{3} N_{rs} n_s - m_r\right] P_t \, d\sigma = 0
\end{aligned}\right.
$$

In base ad un noto teorema di Analisi [7] le (12) comportano le (1) (quasi ovunque).

Ricordando che con $W^{(m)}$ ho indicato l'energia potenziale elastica relativa alla diciottupla di funzioni $X_r^{(m)}, N_r^{(m)}$, chiamo W quella relativa alla diciottupla X_r, N_r legata alla precedente delle (11). In base a noti teoremi [8] riguardanti il prodotto integrale di due funzioni rappresentate da serie del tipo di quelle qui considerate, si ha:

$$
(13)\qquad W = \lim_{m \to \infty} W^{(m)} .
$$

Per ogni m considero la diciottupla $X_r^{(m)*}, N_r^{(m)*}$ $(r = 1, \ldots, 9)$ costituente il gruppo G_m minimizzante W_m nell'insieme I_m. Sia $W_*^{(m)}$ la corrispondente energia potenziale. La condizione di minimo impone che sia:

$$
(14)\qquad W_*^{(m)} < W^{(m)}
$$

per ogni diciottupla diversa dalla $X_r^{(m)*} N_r^{(m)*}$.

Le (13) e (14) ci assicurano che converge anche la successione $\{W_*^{(m)}\}$.

Essendo inoltre $W_*^{(m)}$ una forma quadrica definita positiva nelle $X_r^{(m)*}$ e $N_r^{(m)*}$ $(r = 1, \ldots, 9)$, si può affermare che converge, ad una funzione di quadrato sommabile, ognuna delle diciotto $X_r^{(m)*}$ e $N_r^{(m)*}$ $(r = 1, \ldots, 9)$.

Dimostro ora che lo stato tensionale effettivamente presente nel

---

(7) L. Amerio, *Sul calcolo delle soluzioni dei problemi al contorno per le equazioni lineari del secondo ordine di tipo ellittico*, American Journal of Mathematics, **69** (july 1947), No. 3.

(8) M. Picone, *Lezioni di Analisi funzionale*, Anno acc. 1946-147.

corpo è espresso proprio dalle diciotto X_r^*, N_r^* date da:

$$\left\{\begin{aligned} X_r^* &= \lim_{m\to\infty} X_r^{(m)*} \\ N_r^* &= \lim_{m\to\infty} N_r^{(m)*} \end{aligned}\right. \qquad (r = 1, \ldots, 9) \tag{15}$$

Osserviamo infatti che, detta W^* l'energia potenziale corrispondente alla diciottupa X_r^*, N_r^* in base a (13) risulta:

$$W^* = \lim_{m\to\infty} W_*^{(m)}$$

Per (14) è allora:

$$W^* < W \tag{16}$$

ove con W si intende l'energia potenziale relativa ad ogni diciottupla X_r, N_r $(r = 1, \ldots, 9)$ distinta da X_r^*, N_r^* e soddisfacente le (1). La (16) ci dice in sostanza che la diciottupla X_r^*, N_r^* $(r = 1, \ldots, 9)$ soddisfa (oltre le (1)) al suaccennato teorema variazionale del tipo di Menabrea.

Manoscritto pervenuto in Redazione l'1 dicembre 1976.