

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

DIEGO PIGOZZI

Sulla struttura analitica dell'energia libera e sulle equazioni costitutive nel caso di trasformazioni reversibili per un continuo di Cosserat

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 56 (1976), p. 227-234

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1976__56__227_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Sulla struttura analitica dell'energia libera e sulle equazioni costitutive nel caso di trasformazioni reversibili per un continuo di Cosserat.

DIEGO PIGOZZI (*)

1. Introduzione.

Riesce sotto molti aspetti conveniente analizzare come intervengono nelle equazioni costitutive e in quelle indefinite di un continuo di Cosserat con deformazioni finite, la rotazione locale relativa al campo di spostamenti e quella accessoria libera con la quale si realizza una rotazione globale libera dell'elemento. Tale scopo è stato raggiunto in [1] supponendo ivi decomposta la rotazione globale \mathcal{R} nel prodotto della rotazione locale η e di una ausiliaria ρ' , eseguito nell'ordine $\mathcal{R} = \eta\rho'$.

In tal caso tuttavia si trova che nelle equazioni generali interviene esplicitamente la deformazione pura e ciò — se da un lato illustra certi aspetti del problema — rappresenta dall'altro un grosso inconveniente in quanto essa non è esplicitamente esprimibile mediante le componenti degli spostamenti.

In questo lavoro si dimostra come si può ovviare a tale inconveniente supponendo invece la decomposizione in prodotto del tipo $\mathcal{R} = \rho\eta$. Infatti in tal caso si trova che al posto della deformazione pura interviene direttamente lo strain.

In conseguenza si stabilisce la struttura analitica dell'energia

(*) Indirizzo dell'A: Seminario Matematico, - Via Belzoni, 7 - 35100 Padova.
Lavoro eseguito nell'ambito dei gruppi di ricerca matematica del C.N.R.

libera e le equazioni costitutive della parte reversibile dello stress (cioè le equazioni costitutive complete nel caso di trasformazioni reversibili).

2. Premesse.

È noto che un continuo di Cosserat si può pensare come un insieme continuo di punti a ciascuno dei quali viene associato un triedro rigido. Una variazione della configurazione del continuo è caratterizzata dal campo degli spostamenti che competono a ciascun punto, e dal campo delle rotazioni che competono a ciascun triedro. Nel caso qui considerato di un continuo di Cosserat con rotazioni libere, la rotazione globale di un triedro si può pensare espressa dal prodotto della rotazione locale η subordinata dal campo degli spostamenti, per una rotazione ausiliaria ϱ . Fissato il campo degli spostamenti u e delle rotazioni globali \mathcal{R} la relazione

$$(1) \quad \mathcal{R} = \varrho\eta$$

precisa il significato di ϱ ⁽¹⁾.

Le matrici di rotazione col significato sopra precisato siano relative al passaggio del continuo dalla configurazione di riferimento C^* a quella attuale C ; detta C' una configurazione vicinissima a C siano invece $R^\delta, \varrho^\delta, \eta^\delta$, le rotazioni che caratterizzano la trasformazione infinitesima del continuo da C a C' .

Tenuto conto di (1) sussiste la

$$(2) \quad \mathcal{R}^\delta = \varrho^\delta \varrho \eta^\delta \bar{\varrho}$$

ove con $\bar{\varrho}$ s'intende la matrice coniugata di ϱ e coincide con ϱ^{-1} in quanto si tratta di matrice di rotazione.

Dalle relazioni

$$(3) \quad \mathcal{R}^\delta = I + \delta \mathcal{R} \bar{\mathcal{R}}, \quad \varrho^\delta = I + \delta \varrho \bar{\varrho}, \quad \eta^\delta = I + \delta \eta \bar{\eta}$$

e dalla (2), trascurando i termini infinitesimi a partire dal secondo

⁽¹⁾ Vedi introduzione.

ordine si ricava

$$(4) \quad \delta \overline{\mathcal{R}\mathcal{R}} = \varrho \delta \eta \bar{\eta} \bar{\varrho} + \delta \varrho \bar{\varrho}$$

Poichè le rotazioni \mathcal{R}^δ e η^δ sono infinitesime è noto che è possibile rappresentarle tramite due vettori infinitesimi $\delta\omega^{\mathcal{R}}$, $\delta\omega^\eta$ nella seguente maniera:

$$(5) \quad R^\delta = I + \delta\omega^{\mathcal{R}} \times, \quad \eta^\delta = I + \delta\omega^\eta \times.$$

Tenuto conto di (3), (5) la (4) diventa:

$$(6) \quad \delta\omega^{\mathcal{R}} \times = \varrho(\delta\omega^\eta \times) \bar{\varrho} + \delta\varrho \bar{\varrho}$$

e ricordando l'espressione del vettore rotazione locale infinitesima:

$$(7) \quad (\delta\omega^\eta)_s = \frac{1}{2} \varepsilon_{rst} (\delta u_r)_{,t}$$

dalla (6) si ottiene

$$(8) \quad (\delta\omega^{\mathcal{R}})_r = \frac{1}{2} \varepsilon_{irs} \varrho_{,s} \delta \varrho_{,t} + \frac{1}{2} \varepsilon_{its} \varrho_{,r} (\delta u_i)_{,s}.$$

Dove ε_{ijk} è l'indicatore di Ricci, x_i sono le coordinate del generico punto P nella configurazione attuale rispetto ad una terna trirettangola di riferimento T e la sbarretta indica derivazione rispetto alle x_i . Analogamente con y_i si denoteranno le coordinate, sempre rispetto a T , del corrispondente di P in C^* , e la virgola indicherà derivazione rispetto alle y_i .

Nel seguito indicherò con a , D , $A_{,r}$ rispettivamente la matrice $(x_{r,s})$, il suo determinante ed il complemento algebrico di $x_{r,s}$ in a .

3. Espressione del lavoro delle forze interne.

Nella trasformazione infinitesima da C a C' , le forze interne di contatto danno come è noto, una densità di lavoro che, nella forma euleriana, è espressa da

$$(9) \quad \delta l^{(i)} = X_{rs} (\delta u_r)_{,s} + \psi_{rs} (\delta \omega_r^{\mathcal{R}})_{,s} + \varepsilon_{rim} X_{im} \delta \omega_r^{\mathcal{R}}$$

Le matrici (X_{rs}) e (ψ_{rs}) rappresentano rispettivamente gli sforzi e le coppie interne di contatto nello stato attuale C .

Utilizzando per la rappresentazione degli sforzi la matrice di Piola-Kirchoff Y e una analoga λ per le coppie di contatto, definite da

$$(10) \quad X_{rs} = \frac{1}{D} Y_{im} x_{r,i} x_{s,m}; \quad \psi_{rs} = \frac{1}{D} \lambda_{ri} x_{s,i}$$

e ricordando la relazione

$$(11) \quad f_{is} = f_{s^n} \frac{A_{s^n}}{D}$$

è possibile esprimere in forma lagrangiana, come conviene, il lavoro delle forze interne.

Da (9) tenuto conto di (8), (10), (11) si giunge con qualche sviluppo alla

$$(12) \quad \delta^* l^{(t)} = \left(Y_{in} x_{r,i} + \frac{1}{2} \varepsilon_{ris} \lambda_{im} \varrho_{il,m} \frac{A_{s^n}}{D} + \frac{1}{2} \lambda_{im} \varrho_{il} B_{imrn} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \varepsilon_{iap} \varepsilon_{ris} Y_{im} \varrho_{il} x_{a,i} x_{p,m} \frac{A_{s^n}}{D} \right) \delta u_{r,n} + \\ + \left(\frac{1}{2} \varepsilon_{rip} \lambda_{rn} \varrho_{il,n} + \frac{1}{2} \varepsilon_{raq} \varepsilon_{rip} \varrho_{il} Y_{im} x_{a,i} x_{s,m} \right) \delta \varrho_{pt} + \\ + \frac{1}{2} \lambda_{rn} \varepsilon_{rip} \varrho_{il} \delta \varrho_{pt,n} + \frac{1}{2} \lambda_{rm} \varrho_{ri} \delta \mu_{im}$$

espressione lagrangiana della densità di lavoro delle forze interne di contatto. Le B_{imrn} , μ_{ri} sono definite dalle relazioni

$$(13) \quad \mu_{ri} = \frac{1}{2D} \varepsilon_{rim} A_{ip} u_{m,pt}, \\ B_{imrn} = \frac{u_{v,\sigma m}}{2D^2} (\varepsilon_{litv} A_{in} A_{r\sigma} - \varepsilon_{litr} A_{iv} A_{vn}).$$

4. Equazioni costitutive nel caso di trasformazioni reversibili.

Per una trasformazione infinitesima reversibile del continuo, detta J l'energia libera, E l'entropia e ϑ la temperatura assoluta, sussiste la

relazione:

$$(14) \quad \delta^* l^{(i)} = -\delta J - E\delta\vartheta.$$

Interessando qui la dipendenza di J delle variabili $x_{r,i}$, $q_{i,j}$ e dalle loro derivate rispetto alle y_i , è possibile considerare isoterliche le trasformazioni del continuo eliminando in tal modo la dipendenza di J dalla temperatura.

In tali circostanze la (14) diventa

$$(15) \quad \delta^* l^{(i)} = -\delta J - \tau A_{r,i}(\delta\mu_{r,i} - A_{m,p}\mu_{r,p}\delta u_{m,i})$$

ove τ è un parametro e il secondo termine del secondo membro è dovuto al fatto che le $\mu_{r,i}$ soddisfano l'uguaglianza

$$(16) \quad A_{r,i}\mu_{r,i} = 0.$$

La (15) permette di scrivere le equazioni costitutive nella forma:

$$(17) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\frac{\partial J}{\partial x_{r,n}} = Y_{in}x_{r,i} + \frac{1}{2}\varepsilon_{r,i,s}\lambda_{im}q_{ii,m}\frac{A_{sn}}{D} + \frac{1}{2}\lambda_{im}q_{ii}B_{imrn} + \\ \qquad \qquad \qquad + \frac{1}{2}\varepsilon_{i,q,p}\varepsilon_{r,i,s}q_{ii}Y_{im}x_{a,i}x_{p,m}\frac{A_{sn}}{D} - \tau\frac{A_{mn}A_{rp}}{D}\mu_{mp} \\ -\frac{\partial J}{\partial q_{p,i}} = \frac{1}{2}\varepsilon_{r,i,p}\lambda_{rn}q_{ii,n} + \frac{1}{2}\varepsilon_{r,q,s}\varepsilon_{r,i,p}q_{ii}Y_{im}x_{a,i}x_{s,m} \\ -\frac{\partial J}{\partial \mu_{im}} = \frac{1}{2}\lambda_{rm}q_{ri} + \tau A_{im} \\ -\frac{\partial J}{\partial q_{p,i,m}} = \frac{1}{2}\lambda_{rm}\varepsilon_{r,i,p}q_{ii}. \end{array} \right.$$

Utilizzando la relazione (36) [2] da (17)₃ si ricava

$$(18) \quad \frac{1}{2}B_{imrn}\lambda_{im}q_{ii} - \tau\frac{A_{mn}A_{rp}}{D}\mu_{mp} = -B_{imrn}\frac{\partial J}{\partial \mu_{im}}$$

la (17)₁ assume allora la forma (2):

$$(19) \quad -\frac{\partial J}{\partial x_{r,n}} = \underbrace{Y_{in}}_{(2)}x_{r,i} + \underbrace{Y_{in}}_{(2)}x_{r,i} + \frac{1}{2}\varepsilon_{r,i,s}\lambda_{im}q_{ii,m}\frac{A_{sn}}{D} + \\ + \frac{1}{2}\varepsilon_{i,q,p}\varepsilon_{r,i,s}Y_{im}x_{a,i}x_{p,m}q_{ii}\frac{A_{sn}}{D} - B_{imrn}\frac{\partial J}{\partial \mu_{im}}$$

(2) (Y_{in}) e (Y_{in}) indicano rispettivamente la parte simmetrica ed anti-simmetrica della matrice Y .

e vale la pena di osservare che nella (17)₂ a Y_{im} può sostituirsi \underline{Y}_{im} dato che la parte simmetrica di Y_{im} non dà contributo.

Dalle (17)₄ si ricavano le λ_{rm} , dalle (17)₂ le \underline{Y}_{in} ed infine le (19) danno le Y_{in} .

Imponendo che l'espressione così ottenuta delle Y_{in} sia effettivamente simmetrica si ottiene la seguente condizione di compatibilità per l'energia libera:

$$(20) \quad \varepsilon_{irm} \left(x_{r,i} \frac{\partial \mathfrak{J}}{\partial x_{m,i}} + \mu_{ri} \frac{\partial \mathfrak{J}}{\partial \mu_{mi}} \right) - \varepsilon_{iap} \varrho_{pi} + \varepsilon_{iip} \varrho_{ap} \frac{\partial \mathfrak{J}}{\partial \varrho_{ai}} - \\ - \frac{\partial \mathfrak{J}}{\partial \varrho_{ai,m}} (\varepsilon_{iap} \varrho_{pi,m} + \varepsilon_{iip} \varrho_{ap,m}) = 0.$$

Le (17)₃, (17)₄ con la posizione

$$(21) \quad \mathfrak{J}' = \mathfrak{J} - \tau A_{ri} \mu_{ri}$$

diventano

$$(22) \quad - \frac{\partial \mathfrak{J}'}{\partial \mu_{im}} = \frac{1}{2} \lambda_{rm} \varrho_{ri}, \quad - \frac{\partial \mathfrak{J}'}{\partial \varrho_{pi,m}} = \frac{1}{2} \lambda_{rm} \varrho_{ii} \varepsilon_{rip}.$$

Eliminando λ tra le (22) si ottiene l'ulteriore condizione di compatibilità

$$(23) \quad \frac{\partial \mathfrak{J}'}{\partial \varrho_{pi,m}} - \varepsilon_{sir} \frac{\partial \mathfrak{J}'}{\partial \mu_{sm}} \varrho_{pr} = 0.$$

Si può verificare con semplici calcoli che la funzione $\tau A_{ri} \mu_{ri}$ soddisfa le (20), le quali pertanto si possono pensare come condizioni di compatibilità anche per \mathfrak{J}' ; infatti \mathfrak{J} è soluzione delle (20) se e solo se lo è \mathfrak{J}' .

5. Struttura analitica dell'energia libera.

Per la ricerca della più generale funzione \mathfrak{J}' compatibile con le (20), (23) conviene premettere alcune considerazioni.

Per il loro significato, le ϱ_{rs} , $\varrho_{rs,t}$ sono legate dalle relazioni

$$(24) \quad \varrho_{ir} \varrho_{is} = \delta_{rs}, \quad \varrho_{ir,t} \varrho_{is} + \varrho_{ir} \varrho_{is,t} = 0.$$

Dalla (24)₁ scende

$$(25) \quad \varrho_{ir}\varrho_{is} + \varrho_{is}\varrho_{ir} = 0$$

che permettono di dimostrare che, limitatamente a rotazioni caratterizzate da un angolo φ soddisfacente

$$(26) \quad -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{oppure} \quad \frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{3}{2}\pi$$

la matrice ϱ è univocamente determinata dalla sua parte antisimmetrica. Esiste quindi corrispondenza biunivoca tra i punti della varietà di ϱ_{rs} , $\varrho_{rs,t}$ definita dalle (24) e le variabili indipendenti

$$(27) \quad \nu'_r = \varepsilon_{ijr}\varrho_{ij}, \quad \sigma'_{rs} = \varepsilon_{ijr}\varrho_{ti,s}\varrho_{tj}$$

basta osservare, oltre a quanto detto, che da (27) (24) scende

$$(28) \quad \varrho_{ir,t} = \frac{1}{2}\varepsilon_{ris}\sigma'_{st}\varrho_{it}.$$

La corrispondenza stabilita dalle (27) consente di ritenere \mathcal{J}' dipendente dalle $\varrho_{ti,s}$ tramite le σ'_{rs} e di scrivere quindi le (23) nella forma

$$(29) \quad \varepsilon_{tjr}\varrho_{vj} \left(\frac{\partial \mathcal{J}'}{\partial \sigma'_{rs}} - \frac{\partial \mathcal{J}'}{\partial \mu_{rs}} \right) = 0.$$

Fatte le posizioni

$$(30) \quad \xi_{ri} = \mu_{ri}, \quad \beta'_{im} = \mu_{im} + \sigma'_{im}$$

ed osservando che le (30) definiscono una trasformazione invertibile, le (29) danno:

$$(31) \quad \frac{\partial \mathcal{J}'}{\partial \xi_{rs}} = 0.$$

La dipendenza di \mathcal{J}' dalle μ_{ri} , σ'_{im} ha luogo dunque solo attraverso le β'_{im} .
Con l'ulteriore trasformazione di variabili definita dalle

$$(32) \quad \begin{cases} \alpha_{rs} = x_{r,s}, & \nu_r = x_{i,r}\nu'_i = x_{i,r}\varepsilon_{ijl}\varrho_{lj} \\ \beta_{rm} = x_{i,r}\beta'_{im} = x_{i,r}\mu_{im} + x_{i,r}\varepsilon_{ijl}\varrho_{li,m}\varrho_{lj} \end{cases}$$

le (20) diventano:

$$(33) \quad \varepsilon_{rjm} \alpha_{ri} \frac{\partial J'}{\partial \alpha_{mi}} = 0$$

la cui più generale soluzione è una funzione J' delle $b_{ij} = \alpha_{i1} \alpha_{1j}$. In definitiva la più generale soluzione J' del sistema (20), (23), è una funzione arbitraria delle variabili v_r , b_{ij} , e delle β_{rm} . Tale fatto determina la struttura analitica dell'energia libera. Si può osservare inoltre che le variabili $b_{rs} - \delta_{rs}$ (δ_{rs} sono i simboli di Kronecker), v_r , β_{rm} si annullano allora e solo allora che lo spostamento sia rigido e ciò permette di soddisfare al principio di indifferenza materiale (v. [4]). Infatti in tal caso le ρ_{rs} si identificano con i simboli di Kronecker e inoltre le μ_{im} risultano nulle.

BIBLIOGRAFIA

- [1] G. GRIOLI, *Sui continui di Cosserat con rotazioni libere*, Rend. Sem. Mat. dell'Univ. di Padova, **47** (1972).
- [2] G. GRIOLI, *Questioni di compatibilità per i continui di Cosserat*, Ist. Naz. di Alta Matematica, Symposia Mathematica, **1** (1968).
- [3] A. BRESSAN, *Sui sistemi continui nel caso asimmetrico*, Ann. di Mat. Pura e App., (4) **62** (1963).
- [4] G. GRIOLI, *Energia libera e stato tensionale dei continui*, Ann. di Mat. Pura e Appl., (4) **87** (1970).

Manoscritto pervenuto in Redazione l'8 Luglio 1976.