

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

ATTILIO LE DONNE

Sull'algebra degli endomorfismi di una classe di moduli ridotti e senza torsione sui domini di Dedekind

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 56 (1976), p. 215-226

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1976__56__215_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

**Sull'algebra degli endomorfismi
di una classe di moduli ridotti
e senza torsione sui domini di Dedekind.**

ATTILIO LE DONNE (*)

Introduzione.

Un noto risultato di A. L. S. Corner ([C1], Teorema A) stabilisce che ogni anello numerabile, ridotto e senza torsione è isomorfo all'anello degli endomorfismi $E(G)$ di qualche gruppo G numerabile, ridotto e senza torsione.

Un secondo teorema di Corner [C2] che generalizza il primo, caratterizza gli anelli degli endomorfismi, con la topologia finita, di tali gruppi come quegli anelli topologici completi e di Hausdorff, che hanno come base di intorni di 0 una successione decrescente di ideali sinistri per cui i quozienti sono gruppi numerabili, ridotti e senza torsione.

R. B. Warfield Jr. [W] ha dato un teorema del tutto analogo al Teorema A di Corner per le algebre su un anello di valutazione discreta R il cui completamento abbia grado di trascendenza $> \aleph_0$ su R . Precisamente Warfield ha provato che ogni R -algebra ridotta, senza torsione e numerabilmente generata è isomorfa all'algebra degli R -endomorfismi di un R -modulo ridotto, senza torsione e numerabilmente generato.

Nel presente lavoro, modificando la dimostrazione di Corner [C2]

(*) Indirizzo dell'A.: Istituto di Algebra e Geometria dell'Università di Padova.

Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei gruppi di ricerca matematici del C.N.R.

mediante un metodo usato da A. Orsatti in [O] — e con qualche ulteriore accorgimento — si caratterizza l'algebra degli endomorfismi di una classe di moduli su domini di Dedekind e precisamente si dimostra il seguente

TEOREMA. *Sia R anello di Dedekind tale che per ogni ideale massimale P di R il completamento \hat{R}_P abbia grado di trascendenza $> \aleph_0$ su R_P . Una R -algebra topologica A (R è discreto) è topologicamente isomorfa all'algebra degli R -endomorfismi, dotata della topologia finita, di un R -modulo ridotto, senza torsione e di rango numerabile se e solo se A è completa, di Hausdorff ed ammette come base di intorni di 0 una successione decrescente di ideali sinistri F_k , $k \in \mathbb{N}$ tali che, per ogni k , A/F_k sia un R -modulo ridotto, senza torsione e di rango numerabile.*

Questo teorema generalizza sia i teoremi di Corner ($R = Z$) sia il teorema di Warfield (R di valutazione discreta). Inoltre la dimostrazione di Corner viene semplificata in quanto non si utilizza quel sottoanello dei Z -adici trovato da Corner e usato nella sua dimostrazione.

Infine per gli anelli di Dedekind che soddisfino quelle ipotesi di trascendenza e che abbiano un insieme numerabile di massimali si dimostra che le dette algebre di endomorfismi hanno una unica topologia con le date caratteristiche.

1. Prerequisiti.

R denoti un anello di Dedekind, non corpo. Sia Ω l'insieme degli ideali massimali P di R . Sia L un sottomodulo dell' R -modulo M .

L si dice puro in M se per ogni $a \in R$ si ha $aL = L \cap aM$.

Per ogni R -modulo M si pone $P^\infty M = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} P^n M$. Se M è un modulo senza torsione, allora, per ogni $P \in \Omega$, $M/P^\infty M$ è ridotto e senza torsione.

Se M è un R -modulo, si definisce su M la topologia naturale prendendo come base di intorni di 0 i sottomoduli IM con I ideale non nullo di R . I sottomoduli del tipo rM con $r \in R$, $r \neq 0$ sono una base di intorni di 0 per la topologia naturale di M . Inoltre poichè R è di Dedekind i sottomoduli del tipo $P^n M$, $P \in \Omega$ e $n \in \mathbb{N}$ sono una sottobase di intorni di 0. Chiamiamo

$$M_\infty = \bigcap \{r \cdot M : r \in R, r \neq 0\} = \bigcap_{P \in \Omega} P^\infty M.$$

Quindi M è di Hausdorff (nella topologia naturale) se e solo se $M_\infty = 0$.

Se M è senza torsione, M_∞ coincide con il sottomodulo divisibile massimo di M . Cioè M senza torsione è di Hausdorff nella topologia naturale se e solo se è ridotto.

La topologia P -adica è definita prendendo come base di intorni i sottomoduli $P^n M$ con $n \in \mathbb{N}$.

Il completamento naturale \hat{R} di R coincide con il prodotto diretto dei completamenti P -adici di R al variare di P in Ω (tutti i completamenti si intendono di Hausdorff):

$$R = \prod_{P \in \Omega} \hat{R}_P$$

inoltre il completamento P -adico di R coincide con il completamento naturale (= P -adico) di R_P , il localizzato di R rispetto all'ideale massimale P .

Analogamente per un R -modulo M si ha:

$$\hat{M} = \prod_{P \in \Omega} M_P$$

con M_P il completamento P -adico (di Hausdorff) di M ovvero il completamento naturale (= P -adico) di M_P^* , con $M_P^* = M/P^\infty M \otimes_R R_P$ la P -localizzazione di Hausdorff di M [Cfr. O].

Si può osservare che:

- a) M_P è R_P -modulo;
- b) \hat{M}_P è \hat{R}_P -modulo;
- c) \hat{M} è \hat{R} -modulo e la moltiplicazione è data per componenti.

Si verifica facilmente con le reti di Cauchy che M è puro in \hat{M} .

L'algebra degli R -endomorfismi $\text{End}_R(M)$ di un R -modulo M è un'algebra topologica (R è discreto) completa e di Hausdorff nella topologia finita che si definisce prendendo come base di intorni di 0 in $\text{End}_R(M)$ gli ideali sinistri:

$$F(X) = \{\varphi \in \text{End}_R(M) : \varphi(X) = 0\}$$

al variare di X fra i sottoinsiemi finiti e non vuoti di M .

Un R -modulo M si dice slender se ogni R -endomorfismo α di R^N in M è tale che $\alpha(e_n) = 0$ per quasi tutti gli n , dove e_n è la funzione di N in R definita da $e_n(m) = \delta_{nm}$ (simbolo di Kronecker).

2. Lemmi preliminari.

DEFINIZIONE. Un insieme non vuoto X si dirà numerabile se $|X| \leq \aleph_0$.

LEMMA 1. Siano R un dominio di Dedekind $Q = Q(R)$ il suo corpo dei quozienti e si supponga che Q sia un R -modulo numerabilmente generato. Allora per ogni R -modulo senza torsione M le affermazioni che seguono sono equivalenti:

- (a) M è numerabilmente generato,
- (b) M ha rango numerabile.

DIMOSTRAZIONE (a) \Rightarrow (b) è banale.

(b) \Rightarrow (a) M è sottomodulo di $M \otimes Q \cong Q^{(M)}$ il quale è chiaramente un R -modulo numerabilmente generato. Poichè R è noetheriano, M in quanto sottomodulo di un numerabilmente generato è numerabilmente generato.

LEMMA 2. Siano R un anello di valutazione discreta, \hat{R} il suo completamento naturale e si supponga che il grado di trascendenza di R su \hat{R} sia $> \aleph_0$. Sia M un R -modulo ridotto, senza torsione e di rango numerabile. Allora \hat{R} contiene una sotto- R -algebra S di rango numerabile avente la seguente proprietà:
se in M risulta

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = 0$$

con gli α_i elementi di R linearmente indipendenti sopra S e gli $x_i \in M$ allora tutti gli x_i sono nulli.

Questo lemma dovuto essenzialmente a Corner [C1] è stato provato nel contesto attuale da Warfield [W] (si tenga presente che se R è di valutazione discreta allora $Q(R)$ è numerabilmente generato come R -modulo).

3. Dimostrazione del teorema.

NECESSITÀ. Sia A , con la topologia finita, l'algebra degli R -endomorfismi di un R -modulo M ridotto, senza torsione e di rango numerabile. A è completa e di Hausdorff.

Sia $X = \{x_n: n \in N\}$ un sottoinsieme numerabile R -indipendente massimale di M . Poniamo

$$F_k = \{\varphi \in A: \varphi(x_1) = \varphi(x_2) = \dots = \varphi(x_k) = 0\}.$$

Si verifica facilmente che $(F_k)_{k \in N}$ è una base di intorno di 0 per la topologia finita di A poichè M è senza torsione. Inoltre A/F_k è R -isomorfo ad un sottomodulo di M^k e quindi A/F_k è ridotto, senza torsione e di rango numerabile.

SUFFICIENZA. Poniamo

$$C = \bigoplus_k A/F_k = \bigoplus_k Ae_k$$

dove $e_k = 1 + F_k$. C è un R -modulo ridotto, senza torsione e di rango numerabile ed è un A -modulo sinistro fedele poichè l'annullatore di C è $\bigcap_k F_k = 0$.

Immergiamo C nel proprio completamento naturale \hat{C} . \hat{C} è un R -modulo ridotto e senza torsione che contiene C come sottomodulo puro e denso.

Si ha $\hat{C} = \prod_P \hat{C}_P$ e \hat{C} è un modulo su $\hat{R} = \prod_P \hat{R}_P$. \hat{R} opera su \hat{C} per componenti.

In C la moltiplicazione sinistra per un dato elemento di A è un R -endomorfismo continuo, con riferimento alla topologia naturale di C , e si estende pertanto ad un \hat{R} -endomorfismo continuo di \hat{C} . In tal modo \hat{C} diventa un A -modulo sinistro.

Sia B un sottoinsieme numerabile di A ($1, 0 \in B$) tale che, per ogni k , Ae_k coincida con il sottomodulo puro di Ae_k generato da Be_k :

$$Ae_k = \langle Be_k \rangle_*$$

Ciò è possibile poichè gli Ae_k sono una infinità numerabile e ciascuno di essi è un R -modulo senza torsione e di rango numerabile.

Sia poi X il sottoinsieme di C così definito:

$$X = \{be_k + b'e_{k+1}: b, b' \in B, k \in N\}$$

X è numerabile. Sia $\pi_P: \hat{C} \rightarrow \hat{C}_P$ la proiezione canonica. Per ogni $c \in \hat{C}$ scriveremo c_P in luogo di $\pi_P(c)$. Denotiamo con C_P^* il sottomodulo puro

di \hat{C}_P generato da $\pi_P(C)$. Poichè $\pi_P(C)$ è un R -modulo di rango numerabile, C_P^* è un R_P -modulo di rango numerabile, evidentemente ridotto e senza torsione.

Allora il Lemma 2 è applicabile all' R_P -modulo C_P^* , per ogni $P \in \Omega$.

Sia S_P una sotto- R_P -algebra di rango numerabile avente le proprietà specificate nel Lemma 2 per C_P^* . Notiamo che \hat{R}_P ha grado di trascendenza $> \aleph_0$ su S_P .

Per ogni $P \in \Omega$, scegliamo in \hat{R}_P una famiglia $\{\alpha_P(x): x \in X\}$ algebricamente indipendente su S_P . Ciò è possibile poichè X è numerabile. Per ogni $x \in X$ definiamo l'elemento $\alpha(x) \in \hat{R}$ ponendo:

$$\alpha(x)_P = \alpha_P(x) \quad (P \in \Omega).$$

Denotiamo quindi con M_0 il sotto- R -modulo di \hat{C} generato da C e dagli $\alpha(x) \cdot (Ax)$ al variare di x in X e con M il sottomodulo puro di \hat{C} generato da M_0 :

$$M = \langle C, \alpha(x) \cdot (Ax): x \in X \rangle_*.$$

Si noti che Ax è un sotto- R -modulo di C .

M è di rango numerabile poichè C ed $\alpha(x)(Ax)$ lo sono e X è numerabile. Chiaramente M è ridotto e senza torsione. Si verifica facilmente che M è un sotto- A -modulo di \hat{C} ed M è fedele su A poichè tale è $C \subseteq M$. Esiste pertanto un morfismo iniettivo di R -algebre di A in $\text{End}_R(M)$, che associa ad ogni $a \in A$ la moltiplicazione sinistra per a . Mostriamo che tale morfismo è suriettivo.

Sia φ un R -endomorfismo di M ed osserviamo che φ si estende, in un sol modo, ad un R -endomorfismo di $\hat{M} = \hat{C}$. Si avrà quindi in \hat{C} :

$$(1) \quad \varphi(\alpha(x) \cdot x) = \alpha(x)\varphi(x) \quad \text{per ogni } x \in X$$

Possiamo scrivere

$$(2) \quad \begin{cases} r\varphi(x) = c' + \sum_{i=1}^n \alpha(x_i) \cdot (a'_i x_i) \\ r\varphi(\alpha(x) \cdot x) = c'' + \sum_{i=1}^n \alpha(x_i) \cdot (a''_i x_i) \end{cases}$$

dove $c', c'' \in C$, le a'_i e le a''_i appartengono ad A , $x_i = x$ ed r è un con-

veniente elemento di R . Sostituendo le (2) nella (1) si ottiene

$$c'' + \sum_{i=1}^n \alpha(x_i)(a_i'' x_i) = \alpha(x) \left[c' + \sum_{i=1}^n \alpha(x_i)(a_i' x_i) \right].$$

Passando alle P -componenti risulta:

$$c_P'' + \sum_i \alpha_P(x_i) (a_i'' x_i)_P = \alpha_P(x) \left[c_P' + \sum_i \alpha_P(x_i) (a_i' x_i)_P \right]$$

Ora le α_P sono algebricamente indipendenti su S_P e le c_P'', c_P' , $(a_i'' x_i)_P$, $(a_i' x_i)_P$ sono in C_P^* . Applicando il Lemma 2 si ottiene:

$$\begin{aligned} c_P'' &= 0; & (a_i' x_i)_P &= 0 \text{ per ogni } i; \\ (a_1'' x_1)_P &= (a_1'' x)_P = c_P'; & (a_i'' x_i)_P &= 0 \text{ per } i \neq 1. \end{aligned}$$

Queste uguaglianze valgono per ogni P . Allora:

$$\begin{aligned} c'' &= 0; & a_i' x_i &= 0 \text{ per ogni } i; \\ a_1'' x_1 &= a_1'' x = c'; & a_i'' x_i &= 0 \text{ per } i \neq 1 \end{aligned}$$

Sostituendo in (2) si ha

$$r\varphi(x) = a_1'' x.$$

Dunque per ogni $x \in X$ esistono $r \in R$ ed $a \in A$ tali da aversi

$$(3) \quad r\varphi(x) = ax.$$

Per il momento r ed a dipendono da x

$$r = r(x), \quad a = a(x).$$

Fissiamo $b \in B$ e poniamo nella (3) $x = be_k$: Ciò è lecito poichè $be_k \in X$. Si ottiene

$$(4) \quad r_k \varphi(be_k) = a_k (be_k)$$

dove r_k e a_k dipendono da b . Si vede così che $r_k \varphi(b e_k) \in A e_k$. Ma $A e_k$ è puro in C , quindi in \hat{C} . Poichè \hat{C} è senza torsione ed $A e_k$ è puro in \hat{C} si ha $\varphi(b e_k) \in A e_k$: Possiamo pertanto scrivere la (4) nella forma

$$(5) \quad \varphi(b e_k) = b^{(k)} e_k \quad \text{con } b^{(k)} \in A$$

$b^{(k)}$, oltre che da k , dipende da $b (\in B)$ che si suppone fisso. Poniamo nella (3) $x = b(e_k + e_{k+1})$. Si ottiene:

$$(6) \quad r\varphi(b e_k + b e_{k+1}) = a b e_k + a b e_{k+1}$$

Tenendo conto della (5) possiamo scrivere

$$(7) \quad r\varphi(b e_k + b e_{k+1}) = r b^{(k)} e_k + r b^{(k+1)} e_{k+1}.$$

Sottraendo (6) da (7) si ha

$$r b^{(k)} - a b \in F_k; \quad r b^{(k+1)} - a b \in F_{k+1} \subseteq F_k$$

allora

$$r b^{(k)} - r b^{(k+1)} = r(b^{(k)} - b^{(k+1)}) \in F_k$$

e poichè A/F_k è senza torsione

$$b^{(k)} - b^{(k+1)} \in F_k.$$

Ciò mostra che la successione $(b^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ è di Cauchy in A e pertanto converge verso un elemento $b^* \in A$.

Fissato k per ogni $h > k$ si ha

$$b^{(k)} - b^{(h)} \in F_k$$

e passando al limite per $h \rightarrow \infty$ si ottiene

$$b^{(k)} - b^* \in F_k$$

da cui, per la (5),

$$(8) \quad \varphi(b e_k) = b^* e_k.$$

Dove b^* dipende da b ma non da k .

Tenendo conto del fatto che in A le operazioni di anello sono continue, possiamo affermare che fissato $h \in N$ esiste $k \in N$ tale che

$$(9) \quad F_k b + F_k \subseteq F_h.$$

Ponendo in (3) $x = e_k + b e_{k+1}$ si ha

$$(10) \quad r\varphi(e_k + b e_{k+1}) = a e_k + a b e_{k+1}$$

Per la (8) si ha

$$(11) \quad r\varphi(e_k + b e_{k+1}) = r1^* e_k + r b^* e_{k+1}$$

Sottraendo (11) da (10) si ha

$$(12) \quad a - r1^* \in F_k; \quad ab - r b^* \in F_{k+1} \subseteq F_k$$

e questo per ogni k .

Moltiplicando la prima delle (12) a destra per b si ottiene

$$ab - r1^* b \in F_k b.$$

Sottraendo da quest'ultima relazione la seconda delle (12) si ha:

$$r b^* - r1^* b \in F_k b + F_k \subseteq F_h$$

da cui $b^* - 1^* b \in F_h$. Attesa l'arbitrarietà di h risulta

$$b^* = 1^* b.$$

Allora per ogni $b \in B$ e per ogni $k \in N$ la (8) porge

$$(13) \quad \varphi(b e_k) = 1^*(b e_k).$$

Fissiamo $k \in N$ ed $a \in A$. Esiste $r \in R$ tale che

$$r a e_k = \sum_{i=1}^n r_i b_i e_k \quad \text{con } b_i \in B, r_i \in R.$$

Applicando φ e tenendo conto della (13) otteniamo

$$r\varphi(a e_k) = 1^*\left(\sum_i r_i b_i e_k\right) = 1^* r a e_k = r1^* a e_k.$$

Quindi per ogni $a \in A$ ed ogni k

$$\varphi(ae_k) = 1^*(ae_k).$$

Ciò implica che φ coincide con la moltiplicazione sinistra per 1^* su C . Poichè C è denso in M , coincide su tutto M con la moltiplicazione sinistra per 1^* , poichè in \hat{C} le moltiplicazioni sinistre per gli elementi di A sono endomorfismi continui di \hat{R} -moduli.

In definitiva associando ad ogni elemento $a \in A$ la moltiplicazione sinistra per a si ottiene un isomorfismo algebrico di A su $\text{End}_R(M)$. Mostriamo che tale isomorfismo è topologico.

In effetti, per ogni $k \in N$, F_k è l'annullatore in A di e_k , quindi F_k è aperto nella topologia finita di A .

Sia $y \in M$ e dimostriamo che $\text{Ann}_A(y)$ è aperto nella data topologia di A . Osserviamo che il sottomodulo M_0 di M è contenuto nel sottoinsieme $\hat{R}C$ di \hat{C} , quindi $ry = \beta c$ con $r \in R$, $\beta \in R$, $c \in C$. Da ciò segue che $\text{Ann}_A(y) = \text{Ann}_A(c)$. Infine da $c = \sum_{k=1}^n a_k e_k$ segue $\text{Ann}_A(c) \supseteq F_n$. Quindi $\text{Ann}_A(y)$ è aperto nella topologia data.

4. Alcuni corollari.

Ponendo nel teorema $F_k = 0$ per ogni k si ha il

COROLLARIO. *Sia R un dominio di Dedekind tale che, per ogni P , R_P abbia grado di trascendenza $> \aleph_0$ su R_P .*

Ogni R -algebra A ridotta, senza torsione e di rango numerabile è isomorfa all'algebra degli endomorfismi di un R -modulo ridotto, senza torsione e di rango numerabile.

Poichè per la proposizione 4 di [S], per ogni anello di Dedekind R , $Q = Q(R)$ è numerabilmente generato come R -modulo se e solo se Ω , l'insieme degli ideali massimali di R , è numerabile, nelle dette condizioni si può sostituire nel teorema e nel corollario « numerabilmente generato » a « di rango numerabile », per il lemma 1.

In particolare se R è di valutazione discreta (e quindi ha un solo massimale) si ottiene il teorema dato da Warfield [W].

5. Unicità della topologia.

Sia R un dominio di Dedekind con una infinità numerabile di ideali massimali P . E sia sempre il grado di trascendenza di \hat{R}_P su $R_P > \aleph_0$.

LEMMA 1. *Sia A R -algebra con una topologia lineare metrizzabile completa, F un ideale tale che A/F sia slender. Allora F è aperto in A .*

DIMOSTRAZIONE (Analogia per le Z -algebre). Si consideri una base di intorno di 0 formata da una successione decrescente $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ di ideali sinistri. Se F contiene uno dei V_n , F è aperto. Altrimenti per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste un elemento $a_n \in V_n$, $a_n \notin F$. Sia φ il morfismo di $R^{\mathbb{N}}$ in A così definito:

$$\varphi(f) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)a_n \quad (f \in R^{\mathbb{N}}).$$

Risulta $\varphi(e_n) = a_n \notin F$. Sia π la proiezione canonica di A in A/F . Allora, per ogni n , $(\pi \varphi)e_n \neq 0$. Assurdo poichè A/F è slender.

Ricordiamo la generalizzazione data da L. Salce.

TEOREMA [S]: *Sia R come sopra. Un R -modulo L è slender se e solo se L è ridotto, senza torsione e non contiene sotto- R -moduli isomorfi a $R^{\mathbb{N}}$ oppure ad uno \hat{R}_P .*

LEMMA 2. *Sia L R -modulo numerabilmente generato, ridotto e senza torsione; allora L è slender.*

DIMOSTRAZIONE. Essendo R Noetheriano ogni sottomodulo di L è numerabilmente generato. Quindi per il Teorema [S] basta far vedere che nè $R^{\mathbb{N}}$ nè \hat{R}_P sono numerabilmente generati.

Se $|R| < \aleph_0$ allora $|R^{\mathbb{N}}| = 2^{\aleph_0}$ e $R^{\mathbb{N}}$ non può essere numerabilmente generato.

Se $|R| > \aleph_0$ allora $\{(1, a, a^2, a^3, \dots) \in R^{\mathbb{N}} : a \in R\}$ costituiscono un sistema linearmente indipendente su R essendo il determinante (con termini in R , dominio d'integrità)

$$\begin{vmatrix} 1, a_1, \dots, a_1^{n-1} \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ 1, a_n, \dots, a_n^{n-1} \end{vmatrix},$$

per gli a_i diversi, non nullo per il teorema di Vandermonde.

Inoltre se \hat{R}_P ha grado di trascendenza su $R_P > \aleph_0$ lo ha anche su R e quindi non può essere numerabilmente generato. \neq

Abbiamo quindi il teorema di unicità della topologia:

TEOREMA. *Sia R dominio di Dedekind tale che, per ogni P , \hat{R}_P abbia grado di trascendenza su $R_P > \aleph_0$ e Ω sia numerabile.*

Sia A algebra topologica su R che sia completa, di Hausdorff e che ammetta come base di intorni di 0 una successione decrescente di ideali F_k , $k \in \mathbb{N}$ tali che A/F_k siano numerabilmente generati, ridotti e senza torsione.

Allora la topologia con queste proprietà è unica.

BIBLIOGRAFIA

- [C1] A. L. S. CORNER, *Every countable reduced torsion-free ring is an endomorphism ring*, Proc. London Math. Soc., (3) **13** (1963), pp. 687-710.
- [C2] A. L. S. CORNER, *Endomorphism rings of torsion-free abelian groups*, Proc. Internat. Conf. Theory of Groups, Austral. Nat. Univ. Canberra 1965, (1967), pp. 59-69.
- [O] A. ORSATTI, *A class of rings which are the endomorphism rings of some torsion-free abelian groups*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, **23** (1969), pp. 143-153.
- [S] L. SALCE, *Moduli Slender su anelli di Dedekind*, Ann. Univ. Ferrara, Sez. VII, **20** (1975), pp. 59-63.
- [W] R. B. WARFIELD jr., *Countably generated modules over commutative Artinian rings*, Pac. J. of Math., **60**, No. 2 (1975), pp. 289-302.

Manoscritto pervenuto alla Redazione il 7 luglio 1976.