

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

STEFANO TESTA

Sui sottouniversi normali di un universo di dispositivi lineari su un corpo

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 56 (1976), p. 193-204

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1976__56__193_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

Sui sottouniversi normali di un universo di dispositivi lineari su un corpo.

STEFANO TESTA (*)

SUMMARY - In this note the author defines (§ 3) and deals with the normal subuniverses of a universe of linear networks on a commutative field [1]. Throughout a sequence of partial results, a general property of the networks of a normal subuniverse is given. Applications of the preceding results to important normal universes conclude the work.

1. Richiami e notazioni.

Nel corso del presente lavoro tratteremo dell'universo dei dispositivi lineari su un corpo commutativo K , secondo la definizione data in [1]; indichiamo tale universo con la notazione $\mathbf{D}(K)$.

Richiamiamo ora alcune definizioni e proprietà relative a $\mathbf{D}(K)$ che useremo nel seguito. Sia quindi α un insieme finito, K un corpo commutativo: consideriamo lo spazio vettoriale su K , $\bigoplus_{i \in \alpha} K_i$ ove per ogni $i \in \alpha$, $K_i = K$, tale spazio sarà indicato K^α e chiamato lo spazio delle tensioni sui terminali α , lo stesso spazio, indicato K_α , sarà chiamato lo spazio delle correnti sui terminali α .

L'insieme \mathcal{D}_α dei dispositivi su α di $\mathbf{D}(K)$ è l'insieme delle relazioni lineari di K^α in K_α (cfr. [1], [2] e [3]). Come è noto le relazioni (lineari) di K^α in K_α sono in corrispondenza biunivoca canonica con i sottospazi

(*) Indirizzo dell'A.: Istituto Matematico « L. B. Alberti » dell'Università, Genova.

Lavoro eseguito nell'ambito dei gruppi di ricerca matematica del C.N.R.

vettoriali di $K^\alpha \oplus K_\alpha$. Tale corrispondenza associa ad ogni relazione M il sottospazio $G(M)$ suo grafico.

Dato $M \in \mathcal{D}_\alpha$ diremo dimensione di M la dimensione dello spazio vettoriale $G(M)$. Siano $x \in K^\alpha$ e $y \in K_\alpha$ tali che il vettore $(x, y) \in G(M)$, (x, y) sarà detto allora un funzionamento di M . Indicheremo inoltre rispettivamente x_i e y_i la tensione e la corrente al terminale $i \in \alpha$ del funzionamento (x, y) di M .

Dato il trasduttore $\varphi: \alpha \rightarrow \beta$ (per una particolareggiata trattazione sui trasduttori vedasi [1] e [2]), con α e β insieme finiti, in [1] è assegnato il funtore \mathcal{D} che associa a φ l'applicazione tra insiemi $\mathcal{D}(\varphi): \mathcal{D}_\alpha \rightarrow \mathcal{D}_\beta$. Consideriamo ora un caso particolare di uso frequente in seguito. Sia $i \in \alpha$, si consideri il trasduttore $\hat{i}: \alpha \rightarrow \alpha - \{i\}$ reciproco dell'inclusione canonica $\alpha - \{i\} \hookrightarrow \alpha$. Dato un dispositivo $M \in \mathcal{D}_\alpha$, $\mathcal{D}(\hat{i})M$ verrà scritto $\hat{i}M$ (leggasi i -soppresso M) e sarà definito dalla composizione delle relazioni:

$$K^{\alpha - \{i\}} \xrightarrow{\tilde{\pi}_i} K^\alpha \xrightarrow{M} K_\alpha \xrightarrow{\tilde{\varepsilon}_i} K_{\alpha - \{i\}}$$

con $\tilde{\pi}_i$ e $\tilde{\varepsilon}_i$ relazioni reciproche di π_i e ε_i rispettivamente proiezione ed immersione canoniche.

Il trasduttore \hat{i} definisce l'operazione di soppressione del terminale i .

2. Le operazioni di cosoppressione e dualizzazione di terminali.

Diamo ora la seguente:

DEFINIZIONE 2.1. Sia $M \in \mathcal{D}_\alpha$, $i \in \alpha$, il dispositivo $\check{i}M \in \mathcal{D}_{\alpha - \{i\}}$ (leggasi i -cosoppresso M) dato dalla relazione:

$$K^{\alpha - \{i\}} \xrightarrow{\varepsilon_i} K^\alpha \xrightarrow{M} K_\alpha \xrightarrow{\pi_i} K_{\alpha - \{i\}}.$$

con ε_i e π_i rispettivamente immersione e proiezione canoniche, si dirà ottenuto da M per cosoppressione del terminale i .

Dalle definizioni stesse appare evidente il carattere duale che hanno le operazioni di soppressione e cosoppressione rispetto all'antinvoluzione che ad ogni relazione associa la relazione reciproca. Precisamente sia $M \in \mathcal{D}_\alpha$ si ha: $\hat{i}M = \check{i}\tilde{M}$, ove \tilde{M} è il dispositivo reciproco di M .

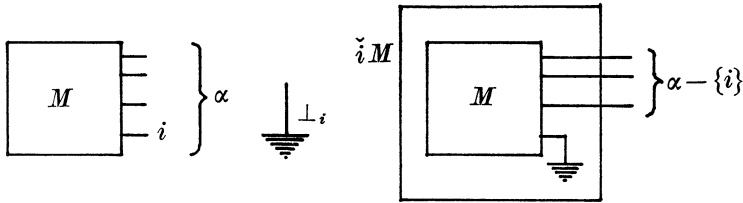
DEFINIZIONE 2.2. Un dispositivo $M \in \mathcal{D}_\alpha$ che sia un morfismo (cioè un'applicazione lineare) di K^α in K_α sarà detto ammettenza, un dispositivo la cui relazione reciproca è un morfismo sarà detto impedenza.

Segue allora subito dalle definizioni:

PROPOSIZIONE 2.3. Se $i \in \alpha$, $M \in \mathcal{D}_\alpha$ è un'ammettenza allora $\check{i}M$ è un'ammettenza; se M è un'impedenza, allora $\hat{i}M$ è una impedenza.

OSSERVAZIONE 1. Mentre l'operazione di soppressione di terminali, discendendo dagli assiomi stessi di universo di dispositivi, è definita in ogni universo, lo stesso non accade per l'operazione di cosoppressione, che discende invece dalla particolare assegnazione del funtore \mathcal{D} per definire $\mathbf{D}(K)$ o più in generale un qualunque universo lineare (è bene osservare che la definizione di cosoppressione è estendibile in modo ovvio, per lo meno a qualunque universo della forma $\mathbf{D}(\mathcal{C}; X, Y)$; X, Y oggetti della categoria abeliana \mathcal{C} (cfr. [1])). Tuttavia l'operazione di cosoppressione potrebbe definirsi anche mediante operazioni definite su ogni universo di dispositivi, precisamente la soppressione di terminali e la composizione di dispositivi (per la definizione di tale operazione vedasi [1]) e un dispositivo particolare di $\mathbf{D}(K)$ (o più in generale di un qualunque universo della forma $\mathbf{D}(\mathcal{C}; X, Y)$): il dispositivo terra, il cui prototipo di terminale $\{1\}$ sarà definito dall'equazione $x_1 = 0$ ed indicato \perp_1 .

Allora si avrà: $\check{i}M = \hat{i} \perp_i M$. In schema:



Facciamo infine osservare che l'uso dell'operazione di cosoppressione per ottenere i risultati dei numeri 3 e 4 non è strettamente necessario; tuttavia essa semplifica gli enunciati e mette in evidenza alcune dualità di $\mathbf{D}(K)$ che ci è parso bene rilevare.

Passiamo ora a definire un'altra operazione sui dispositivi di $\mathbf{D}(K)$.

DEFINIZIONE 2.4. Sia $i \in \alpha$, chiamiamo d_i [risp. r_i] l'automorfismo di $K^\alpha \oplus K_\alpha$ così definito: per ogni $(x, y) \in K^\alpha \oplus K_\alpha$, $d_i(x, y) = (u, v)$ con $u_j = x_j$ e $v_j = y_j$ se $j \in \alpha$, $j \neq i$, $u_i = y_i$, $v_i = x_i$ [risp. $r_i(x, y) = (u, v)$, $u_j = x_j$ e $v_j = y_j$ se $j \neq i$, $u_i = -y_i$, $v_i = x_i$]. L'automorfismo

d_i si dirà l'operatore dualizzatore sul terminale i di α . L'automorfismo r_i si dirà l'operatore rotatore sul terminale i di α .

Si consideri il gruppo \mathfrak{G}_α [risp. $\overline{\mathfrak{G}}_\alpha$] degli automorfismi di $K^\alpha \oplus K_\alpha$ generato dai d_i [risp. dagli r_i] al variare di $i \in \alpha$. Si noti che \mathfrak{G}_α e $\overline{\mathfrak{G}}_\alpha$ sono abeliani (1).

Osservato che per ogni $i \in \alpha$, d_i è di ordine due, potremo istituire un isomorfismo canonico di gruppi tra \mathfrak{G}_α e l'insieme $\mathcal{F}(\alpha)$, parti di α , dotato della seguente operazione \circ che lo rende gruppo commutativo.

$$\alpha', \alpha'' \in \mathcal{F}(\alpha), \quad \alpha' \circ \alpha'' = (\alpha' \cup \alpha'') - (\alpha' \cap \alpha'').$$

Precisamente l'isomorfismo associa ad ogni $\alpha' \subset \alpha$ l'elemento $d_{\alpha'}$ di \mathfrak{G}_α dato da: $d_{\alpha'} = \prod_{i \in \alpha'} d_i$.

Per ciò che concerne $\overline{\mathfrak{G}}_\alpha$ ci limiteremo ad osservare che per ogni $i \in \alpha$, r_i è di ordine quattro (2) e quindi un generico $\bar{g} \in \overline{\mathfrak{G}}_\alpha$ potrà sempre scriversi in uno e un sol modo come prodotto $\prod_{i \in \alpha} r_i^{n_i}$, $n_i = 0, 1, 2, 3$.

Osserviamo anche che r_i^2 non dà luogo a scambio tra la tensione e la corrente al terminale i , ma soltanto cambia di segno tali tensioni e corrente e che r_i^3 è tale che per ogni $(x, y) \in K^\alpha \oplus K_\alpha$, $r_i^3(x, y) = (u, v)$ ove $u_j = x_j$ e $v_j = y_j$ se $j \in \alpha$, $j \neq i$, $u_i = y_i$, $v_i = -x_i$.

I gruppi $\mathfrak{G}_\alpha, \overline{\mathfrak{G}}_\alpha$ operano sui dispositivi di \mathcal{D}_α conservandone la dimensione.

Importante per il presente lavoro sarà la seguente definizione:

DEFINIZIONE 2.5. In $\mathcal{D}(K)$, un dispositivo $M \in \mathcal{D}_\alpha$ si dirà normale se nell'orbita di M , rispetto a \mathfrak{G}_α , esiste un'ammettenza.

Il dispositivo privo di terminali è normale, essendo ammettenza trivialmente. Segue subito dalla definizione che i dispositivi normali hanno dimensione uguale al numero dei terminali; è facile invece verificare che non vale il viceversa, inoltre:

PROPOSIZIONE 2.6. Sono fatti equivalenti per $M \in \mathcal{D}_\alpha$

- a) M è normale;
- b) nell'orbita di M , rispetto a $\overline{\mathfrak{G}}_\alpha$, esiste un'ammettenza;

(1) Si noti che $\forall i \in \alpha$, $r_i = d_i$ (e quindi $\overline{\mathfrak{G}}_\alpha = \mathfrak{G}_\alpha$) se e solo se la caratteristica di K è due.

(2) Naturalmente se la caratteristica di K è diversa da due.

- c) nell'orbita di M rispetto a \mathfrak{G}_α , esiste un'impedenza;
 d) nell'orbita di M rispetto a $\bar{\mathfrak{G}}_\alpha$ esiste un'impedenza.

DIMOSTRAZIONE. Per quanto concerne l'equivalenza di a) e b) verificiamo che se per qualche $\bar{g} \in \bar{\mathfrak{G}}_\alpha$ $\bar{g}M$ è un'ammettenza, allora esiste $\alpha' \subset \alpha$ tale che $d_{\alpha'}M$ è un'ammettenza. Sia $\bar{g} = \prod_{i \in \alpha} r_i^{n_i}$, sia $\alpha' \subset \alpha$ il sottoinsieme degli i per cui $n_i = 1$ oppure $n_i = 3$ allora $d_{\alpha'}M$ è una ammettenza; infatti $d_{\alpha'}M = \psi \cdot (\bar{g}M) \cdot \varphi$ con $\varphi = (\varphi_{ij})$, $\psi = (\psi_{ij})$ $i, j \in \alpha$ automorfismi rispettivamente di K^α e K_α così definiti: $\varphi_{ij} = \psi_{ij} = 0$ se $i \neq j$, $\varphi_{ii} = 1$ se $n_i = 0$ oppure $n_i = 3$, $\varphi_{ii} = -1$ se $n_i = 1$ oppure $n_i = 2$, $\psi_{ii} = 1$ se $n_i = 0$ oppure $n_i = 1$, $\psi_{ii} = -1$ se $n_i = 2$ oppure $n_i = 3$. Viceversa se per qualche $\alpha' \subset \alpha$ $d_{\alpha'}M$ è un'ammettenza allora $\bar{g}M$ è un'ammettenza con $\bar{g} = \prod_{i \in \alpha'} r_i$, come si verifica con dimostrazione analoga al caso precedente.

Per l'equivalenza di a) e c) basta osservare che $d_\alpha M = \tilde{M}$. Per l'equivalenza di c) e d) si procede in modo « duale » ⁽³⁾ alla dimostrazione della equivalenza di a) e b).

OSSEVAZIONE 2. Anche per le operazioni di dualizzazione e rotazione sarà utile osservare che esse possono essere ottenute mediante le operazioni di composizione di dispositivi e di soppressione di terminali, servendosi di due dispositivi di $D(K)$ a due terminali: il dispositivo dualizzatore il cui prototipo di terminali $\{1, 2\}$ sarà indicato Δ_{12} e definito dal sistema di equazioni

$$y_1 = -x_2$$

$$y_2 = x_1$$

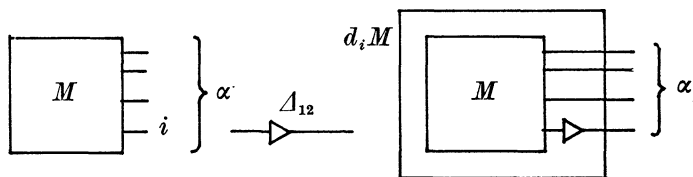
e il dispositivo rotatore il cui prototipo di terminali $\{1, 2\}$ sarà indicato Γ_{12} e definito dal sistema di equazioni:

$$y_1 = x_2,$$

$$y_2 = x_1.$$

⁽³⁾ « duale » rispetto all'antinvoluzione \sim che ad ogni relazione associa la sua reciproca.

Schematicamente il dispositivo $d_i M$ sarà così ottenuto:



Analogamente per il dispositivo $r_i M$, con Γ_{12} al posto di Δ_{12} .

3. Sottouniversi normali di $D(K)$.

Per definizione e proprietà dei sottouniversi di un universo di dispositivi vedasi [1].

DEFINIZIONE 3.1. Un sottouniverso \mathcal{N} di $D(K)$ si dirà normale quando ogni dispositivo di \mathcal{N} ha dimensione uguale al numero dei suoi terminali.

Lo scopo principale del presente paragrafo sarà quello di dimostrare che un sottouniverso normale è costituito da dispositivi normali in $D(K)$ (cfr. Def. 2.5). È bene osservare che i dispositivi normali non costituiscono un sottouniverso di $D(K)$ in quanto è facile trovare ammettenze di $D(K)$ che, per soppressione di terminali, danno luogo a dispositivi la cui dimensione è diversa dal numero di terminali.

Per ottenere il risultato citato in precedenza ci serviremo della seguente caratterizzazione dei dispositivi normali:

TEOREMA 3.2. Un dispositivo M di $D(K)$ è normale se e solo se M è il dispositivo privo di terminali oppure M ha dimensione uguale al numero dei suoi terminali ed esiste inoltre un suo terminale i tale che $\check{i}M$ oppure $\hat{i}M$ è normale.

Per la dimostrazione del teorema 3.2 ci serviremo di alcuni lemmi:

LEMMA 3.3. Sia $M \in \mathcal{D}_\alpha$, $\alpha' \subset \alpha$, $i \in \alpha$, $i \notin \alpha'$ allora:

$$\check{i}(d_\alpha M) = d_{\alpha'}(\check{i}M) \quad \text{e} \quad \hat{i}(d_\alpha M) = d_{\alpha'}(\hat{i}M).$$

DIMOSTRAZIONE. Dimostriamo la prima uguaglianza. Per semplicità di notazione sia $\alpha = \{1, 2, \dots, n\}$. Sia $K^\alpha \xleftarrow{\varphi} A \xrightarrow{\psi} K_\alpha$, una coppia di applicazioni che individua la relazione M . Scriviamo φ e ψ nelle loro

componenti: $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$, $\psi = (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n)$. Il dispositivo $d_{\alpha'} M$ è dato dalla relazione individuata dalla coppia $K^\alpha \xleftarrow{\sigma} A \xrightarrow{\theta} K_\alpha$, ove $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$, $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)$ con $\sigma_j = \varphi_j$, $\theta_j = \psi_j$ se $j \in \alpha$, $j \notin \alpha'$ $\sigma_j = \psi_j$, $\theta_j = \varphi_j$ se $j \in \alpha'$. Il dispositivo $\tilde{i}(d_{\alpha'} M)$ è dato dalla relazione composta

$$(1) \quad K^{\alpha - \{i\}} \xrightarrow{\varepsilon_i} K^\alpha \xrightarrow{d_{\alpha'} M} K_\alpha \xrightarrow{\pi_i} K_{\alpha - \{i\}}$$

con ε_i, π_i immersione e proiezione canoniche. D'altra parte la relazione (1) è individuata dalla coppia

$$(2) \quad K^{\alpha - \{i\}} \xleftarrow{\sigma'} \sigma^{-1}(K^{\alpha - \{i\}}) \xrightarrow{\lambda} A \xrightarrow{\theta} K_\alpha \xrightarrow{\pi_i} K_{\alpha - \{i\}},$$

ove $\sigma' = (\sigma'_1, \dots, \sigma'_{i-1}, \sigma'_{i+1}, \dots, \sigma'_n)$ con $\sigma'_j = \sigma_{j|\sigma^{-1}(K^{\alpha - \{i\}})}$, $j \in \alpha - \{i\}$, in quanto il quadrato di applicazioni

$$\begin{array}{ccc} K^{\alpha - \{i\}} & \xleftarrow{\sigma'} & \sigma^{-1}(K^{\alpha - \{i\}}) \\ \varepsilon_i \downarrow & & \downarrow \lambda \\ K_\alpha & \xleftarrow{\sigma} & A \end{array}$$

è un pull-back. Ora, poichè $i \notin \alpha'$, $\sigma^{-1}(K^{\alpha - \{i\}}) = \varphi^{-1}(K^{\alpha - \{i\}})$ e quindi (2) potrà essere scritta

$$(3) \quad K^{\alpha - \{i\}} \xleftarrow{\sigma'} \varphi^{-1}(K^{\alpha - \{i\}}) \xrightarrow{\theta'} K^{\alpha - \{i\}}$$

ove $\theta' = \pi_i \cdot \theta \cdot \lambda = (\theta'_1, \dots, \theta'_{i-1}, \theta'_{i+1}, \dots, \theta'_n)$ con $\theta'_j = \theta_{j|\varphi^{-1}(K^{\alpha - \{i\}})}$, $j \in \alpha - \{i\}$. Ma la coppia (3) individua proprio $d_{\alpha'}(\tilde{i}M)$.

Dimostriamo $\hat{i}d_{\alpha'} M = d_{\alpha'}(\hat{i}M)$. Tenendo conto dell'uguaglianza appena dimostrata si ha:

$$\begin{aligned} \hat{i}d_{\alpha'} M &= \widetilde{\hat{i}(d_{\alpha'} M)} = \widetilde{\hat{i}d_{\alpha - \alpha'} M} = \widetilde{\hat{i}(d_{\alpha'} \tilde{M})} = \widetilde{d_{\alpha'}(\tilde{i}\tilde{M})} = d_{\alpha - \alpha'}(\tilde{i}\tilde{M}) = \\ &= d_{\alpha'}(\tilde{i}\tilde{M}) = d_{\alpha'}(\hat{i}M) \end{aligned}$$

OSSERVAZIONE 3. La dimostrazione del lemma precedente potrebbe essere fatta anche tenendo conto delle osservazioni 1) e 2) e della seguente regola di calcolo $\hat{i}(NM) = N\hat{i}M$ per i terminale non di N (regola che risulta valida in qualunque universo di dispositivi).

PROPOSIZIONE 3.4. Sia $M \in \mathcal{D}_\alpha$ dispositivo normale, $i \in \alpha$, allora $\check{i}M$ oppure $\hat{i}M$ è normale.

DIMOSTRAZIONE. Sia $\alpha' \subset \alpha$ tale che $d_{\alpha'}M$ è un'ammettenza. Se $i \notin \alpha'$ per il lemma precedente $d_{\alpha'}(\check{i}M) = \check{i}(d_{\alpha'}M)$ e quindi $d_{\alpha'}(\check{i}M)$ è un'ammettenza, cioè $\check{i}M$ è normale.

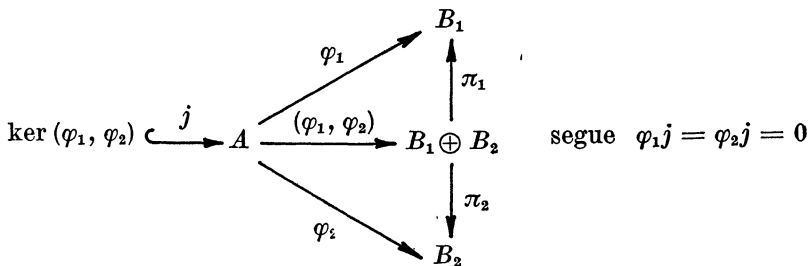
Se $i \in \alpha'$, per il lemma precedente $d_{\alpha'}(\hat{i}M) = \hat{i}d_{\alpha'}M$, ma $d_{\alpha'}M = d_\alpha d_{\alpha'}M = \widetilde{d_{\alpha'}M}$ è un'impedenza, quindi $d_{\alpha'}(\hat{i}M)$ è una impedenza cioè $\hat{i}M$ è normale.

LEMMA 3.5. Sia \mathcal{C} una categoria abeliana, $\varphi_i: A \rightarrow B_i$, con $i \in \alpha$ insieme finito, morfismi di \mathcal{C} ; posto $(\varphi_i)_{i \in \alpha}: A \rightarrow \bigoplus_{i \in \alpha} B_i$ il morfismo di A nel biprodotto $\bigoplus_{i \in \alpha} B_i$ indotto dai φ_i , allora $\ker(\varphi_i)_{i \in \alpha} = \bigcap_{i \in \alpha} \ker \varphi_i$.

DIMOSTRAZIONE. Basterà fare la dimostrazione per $\alpha = \{1, 2\}$; posto $\varepsilon: \ker \varphi_1 \cap \ker \varphi_2 \hookrightarrow A$, poichè $\varphi_1 \cdot \varepsilon = \varphi_2 \cdot \varepsilon = 0$ allora

$$0 = (\varphi_1 \varepsilon, \varphi_2 \varepsilon) = (\varphi_1, \varphi_2) \cdot \varepsilon,$$

per cui: $\ker \varphi_1 \cap \ker \varphi_2 \hookrightarrow \ker(\varphi_1, \varphi_2) \hookrightarrow A$. Viceversa dal diagramma commutativo:



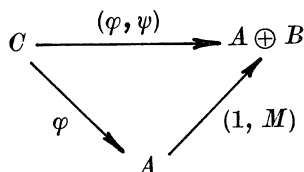
quindi $\ker(\varphi_1, \varphi_2) \hookrightarrow \ker \varphi_1 \cap \ker \varphi_2 \hookrightarrow A$.

LEMMA 3.6. Sia \mathcal{C} una categoria abeliana, sia $M: A \rightarrow B$ una relazione di \mathcal{C} (cioè un morfismo di $\hat{\mathcal{C}}$ simmetrizzata di \mathcal{C} , cfr. [2]); M è un morfismo di \mathcal{C} se e solo se per ogni coppia di morfismi $A \xleftarrow{\varphi} C \xrightarrow{\psi} B$ che individua M si ha:

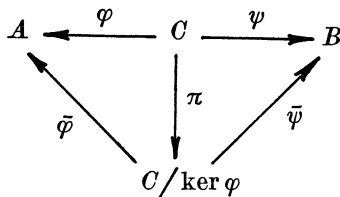
- 1) φ epimorfismo,
- 2) $\ker \varphi \hookrightarrow \ker \psi$.

DIMOSTRAZIONE. Osserviamo innanzitutto che due coppie di morfismi $A \xleftarrow{\varphi} C \xrightarrow{\psi} B$ e $A \xleftarrow{e} C' \xrightarrow{\sigma} B$ individuano la stessa relazione $M: A \rightarrow B$ se e solo se $C \xrightarrow{(\varphi, \psi)} A \oplus B$ e $C' \xrightarrow{(e, \sigma)} A \oplus B$ hanno la stessa immagine.

Sia $M: A \rightarrow B$ un morfismo di \mathcal{C} , allora per ogni coppia di morfismi $A \xleftarrow{\varphi} C \xrightarrow{\psi} B$ che individua M si ha $\text{Im}((\varphi, \psi)) = \text{Im}((1, M))$. Ma $\text{Im}((1, M)) = A$ e quindi dalla fattorizzazione



segue che φ è un epimorfismo e $\psi = M\varphi$ da cui $\ker \varphi \hookrightarrow \ker \psi$. Viceversa se 1) e 2) dell'enunciato sono soddisfatte per una coppia $A \xleftarrow{\varphi} C \xrightarrow{\psi} B$ che individua $M: A \rightarrow B$, allora si ha il diagramma commutativo:



con π epimorfismo e $\bar{\varphi}$ isomorfismo e quindi, essendo $(\bar{\varphi}, \bar{\psi})$ monomorfismo e $C/(\ker \varphi)$ immagine di (φ, ψ) , segue che M è individuata anche da $A \xleftarrow{\bar{\varphi}} C/\ker \varphi \xrightarrow{\bar{\psi}} B$, da cui $M = \bar{\psi} \cdot \bar{\varphi}^{-1}$

LEMMA 3.7. Se $M \in \mathcal{D}_\alpha$ è un dispositivo la cui dimensione è uguale al numero dei suoi terminali, $i \in \alpha$ e iM è un'ammettenza, allora M è normale (precisamente M è un'ammettenza oppure $d_i M$ è una ammettenza).

DIMOSTRAZIONE. Sia, per semplicità di notazione $\alpha = \{1, 2, \dots, n\}$ ($n \geq 1$), M sia rappresentato dalla coppia di applicazioni $K^\alpha \xleftarrow{\varphi} K^\alpha \xrightarrow{\psi} K_\alpha$, con $K^\alpha \xrightarrow{(\varphi, \psi)} K^\alpha \oplus K_\alpha$ monomorfismo, poniamo:

$$\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n), \quad \psi = (\psi_1, \dots, \psi_n).$$

$\checkmark M$ sarà dato dalla relazione $K^{\alpha-\{i\}} \xrightarrow{\varepsilon_i} K^\alpha \xrightarrow{M} K_\alpha \xrightarrow{\pi_i} K_{\alpha-\{i\}}$ che è individuata dalla coppia

$$(1) \quad K^{\alpha-\{i\}} \xleftarrow{\varphi'} \varphi^{-1}(K^{\alpha-\{i\}}) \xrightarrow{\lambda} K^\alpha \xrightarrow{\varphi} K_\alpha \xrightarrow{\pi_i} K_{\alpha-\{i\}}.$$

con $\varphi' = (\varphi'_1, \dots, \varphi'_{i-1}, \varphi'_{i+1}, \dots, \varphi'_n)$ ove

$$\varphi'_j = \varphi_{j|\varphi^{-1}(K^{\alpha-\{i\}})}, \quad j \in \alpha - \{i\},$$

essendo il quadrato

$$(2) \quad \begin{array}{ccc} \varphi^{-1}(K^{\alpha-\{i\}}) & \xrightarrow{\lambda} & K^\alpha \\ \varphi' \downarrow & & \downarrow \varphi \\ K^{\alpha-\{i\}} & \xrightarrow{\varepsilon_i} & K^\alpha \end{array}$$

un pull-back. La coppia (1) potremo anche scriverla

$$K^{\alpha-\{i\}} \xleftarrow{\varphi'} \varphi^{-1}(K^{\alpha-\{i\}}) \xrightarrow{\varphi'} K_{\alpha-\{i\}}$$

con

$$\varphi' = \pi_i \varphi \lambda = (\psi'_1, \dots, \psi'_{i-1}, \psi'_{i+1}, \dots, \psi'_n),$$

$$\psi'_j = \psi_{j|\varphi^{-1}(K^{\alpha-\{i\}})}, \quad j \in \alpha - \{i\}.$$

Poichè $\checkmark M$ è un'ammettenza, φ' è, per il lemma 3.6, epimorfismo ed inoltre $\ker \varphi' \subset \ker \psi'$.

Poichè φ' è epimorfismo, possono aversi due casi: $\varphi^{-1}(K^{\alpha-\{i\}}) = K^\alpha$ oppure $\varphi^{-1}(K^{\alpha-\{i\}}) \xrightarrow{\varphi'} K^{\alpha-\{i\}}$.

Nel primo caso $\varphi'_j = \varphi_j$, $\psi'_j = \psi_j$, $j \in \alpha - \{i\}$ e $\varphi_i = 0$ e quindi, per il lemma 3.5, $\ker \varphi' = \bigcap_{i \in \alpha - \{i\}} \ker \varphi'_j = \bigcap_{i \in \alpha} \ker \varphi_j = \ker \varphi$ inoltre, essendo (φ, ψ) monomorfismo, $0 = \ker(\varphi, \psi) = \ker \varphi \cap \ker \psi = \ker \varphi' \cap \ker \psi$, ma $\ker \psi = \bigcap_{j \in \alpha} \ker \psi_j = \left(\bigcap_{j \in \alpha - \{i\}} \ker \psi_j \right) \cap \ker \psi_i = \ker \psi' \cap \ker \psi_i$, quindi $0 = \ker \varphi' \cap \ker \psi = \ker \varphi' \cap \ker \psi' \cap \ker \psi_i = \ker \varphi' \cap \ker \psi_i$.

Si consideri allora il morfismo $\sigma: K^\alpha \rightarrow K^\alpha$ ove

$$\sigma = (\varphi_1, \dots, \varphi_{i-1}, \psi_i, \varphi_{i+1}, \dots, \varphi_n),$$

si ha $\ker \sigma = 0$, quindi σ è un isomorfismo e ciò basta per affermare che $d_i M$ è una ammettenza.

Se φ' è isomorfismo, dal quadrato (2), si ha subito che:

$$K^{\alpha-\{i\}} = \text{Im}(\varphi \cdot \lambda) \subset \text{Im}(\varphi) \subset K^\alpha$$

da cui $K^\alpha = \text{Im}(\varphi)$, ch  altrimenti $\varphi^{-1}(K^{\alpha-\{i\}}) = K^\alpha$, perci  φ   un isomorfismo ed M un'ammettenza. Con dimostrazione analoga vale anche la proposizione duale della precedente, precisamente:

LEMMA 3.7*. Se $M \in \mathcal{D}_\alpha$   un dispositivo la cui dimensione   uguale al numero dei suoi terminali, $i \in \alpha$ e iM   un'impedenza, allora M   normale.

Possiamo ora dare la

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 3.2. Se M   normale e non   il dispositivo privo di terminali, sia i un suo terminale, allora per la proposizione 3.4 $\check{i}M$ oppure iM   normale.

Viceversa, se M ha dimensione uguale al numero dei suoi terminali; se $\check{i}M$   normale esiste $\alpha' \subset \alpha - \{i\}$ tale che $d_{\alpha'} \check{i}M = \check{i}d_{\alpha'} M$   una ammettenza ed allora, per il lemma 3.7, M   normale, se iM   normale allora esiste $\alpha' \subset \alpha - \{i\}$ tale che $d_{\alpha'} iM = i d_{\alpha'} M$   un'impedenza ed allora, per il lemma 3.7*, M   normale.

Siamo ora in grado di dimostrare il seguente:

TEOREMA 3.8. Un sottouniverso \mathcal{N} normale   tutto costituito da dispositivi normali (come dispositivi di $\mathbf{D}(K)$).

DIMOSTRAZIONE. Poich  il dispositivo privo di terminali   in \mathcal{N} ed   normale, il teorema sar  provato dimostrando che, se i dispositivi di \mathcal{N} a $n - 1$ terminali ($n \geq 1$) sono normali in $\mathbf{D}(K)$ allora anche quelli ad n terminali sono normali in $\mathbf{D}(K)$. Ma ci  ormai   una quasi immediata conseguenza del teorema 3.2.

4. Applicazioni.

a) Seguendo [1] si consideri una famiglia \mathcal{F} non vuota di strutture paracomplesse su K , ed il sottouniverso di $\mathbf{D}(K)$ dei dispositivi passivi massimali rispetto a \mathcal{F} , che sar  indicato $\mathbf{D}(K, \mathcal{F})$. Questo sottouniverso   normale e quindi per il teorema 3.8 tutto costituito da dispositivi normali; non solo, ma osservato che per ogni α insieme finito, il gruppo \mathcal{G}_α opera stabilmente sui dispositivi su α di $\mathbf{D}(K, \mathcal{F})$, ci  trasforma dispositivi di $\mathbf{D}(K, \mathcal{F})$ in dispositivi di $\mathbf{D}(K, \mathcal{F})$, come mostra

un semplice calcolo sui funzionamenti, potremo anche affermare che per ogni dispositivo M di $\mathbf{D}(K, \mathcal{F})$ esiste un insieme di suoi terminali α' ed una ammettenza P di $\mathbf{D}(K, \mathcal{F})$ tali che $M = d_{\alpha'} P$.

Infine, tenendo conto dell'osservazione 2) poichè il dualizzatore $\Delta_{1,2}$, oltre ad essere dispositivo passivo rispetto ad ogni struttura paracomplessa su K , è anche ammettenza, quanto sopra stabilito ci permette di affermare che le ammettenze di $\mathbf{D}(K, \mathcal{F})$ generano il sottouniverso stesso.

b) In [1] partendo da un automorfismo involutorio η del corpo K , si è definito un automorfismo pure involutorio di $\mathbf{D}(K)$, chiamato automorfismo di η -reciprocità. I dispositivi lasciati inalterati da tale automorfismo costituiscono un sottouniverso normale di $\mathbf{D}(K)$ che indicheremo $\mathbf{H}_\eta(K)$ e chiameremo sottouniverso dei dispositivi η -hermitiani ovvero η -reciproci di $\mathbf{D}(K)$. Anche qui, tenuto conto dell'osservazione 2), è facile verificare che per ogni insieme finito α il gruppo $\bar{\mathcal{G}}_\alpha$ opera stabilmente sui dispositivi su α di $\mathbf{H}_\eta(K)$ in quanto il rotatore Γ_{12} è η -reciproco per ogni automorfismo involutorio η di K_η , quindi per ogni dispositivo M di $\mathbf{H}_\eta(K)$ ad α terminali, per la proposizione 2.6, esiste un operatore $\bar{g} \in \bar{\mathcal{G}}_\alpha$ e un'ammettenza P di $\mathbf{H}_\eta(K)$ tali che $M = \bar{g}P$.

Ancora, giacchè il rotatore è un'ammettenza, anche in questo caso si potrà affermare che le ammettenze η -hermitiane generano $\mathbf{H}_\eta(K)$.

BIBLIOGRAFIA

- [1] G. DARBO, *Aspetti algebrico-categoriali della teoria dei dispositivi*, Symposia Mathematica, **4**, pag. 303 e seg.
- [2] F. PARODI, *Simmetrizzazioni di una categoria*, Rend. Sem. Mat. Univ. di Padova, **44**, pag. 185 e seg., **46**, pag. 273 e seg.
- [3] P. HILTON, *Correspondences and exact squares*, Proc. of the Conf. on Categ. Alg., La Jolla (1965).
- [4] B. MITCHELL, *Theory of Categories*, Academic Press (1965).

Manoscritto pervenuto in Redazione il 14 giugno 1976.