Rendiconti
del
Seminario Matematico
della
Università di Padova

Sauro Tulipani

Forcing infinito generalizzato in teoria dei modelli

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 56 (1976), p. 125-138

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1976__56__125_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 56 (1977)

Forcing infinito generalizzato in teoria dei modelli.

SAURO TULIPANI (*)

SUMMARY - A generalization of A. Robinson's infinite-forcing, F-forcing, is studied.

0. Introduzione.

La tecnica del forcing, originariamente introdotta da P. Cohen in teoria degli insiemi, è stata ripresa e adattata da A. Robinson [11] in teoria dei modelli. Successivamente, sempre dallo stesso A. Robinson [12], è stato introdotto il forcing infinito. Tale tecnica conduce alla caratterizzazione della classe delle strutture infinito-generiche per una teoria T. Quest'ultimo concetto è una buona generalizzazione del concetto di « chiusura algebrica »: nella teoria dei campi conduce alla classe dei campi algebricamente chiusi, nella teoria dei campi reali conduce alla classe dei campi reali chiusi, nella teoria dei campi con valutazione discreta non archimedea alla classe dei campi di Hensel. Il model-completamento di una teoria T non è così generale perchè non sempre esiste, e d'altronde, quando esiste, i suoi modelli sono tutte e sole le strutture infinito-generiche. C'è una vasta produzione sull'argomento; si veda [6] e relativa bibliografia.

In questo lavoro si introduce la nozione di F-forcing-infinito, relativo ad una teoria T, dove F è un insieme generalizzato di formule atomiche

(*) Indirizzo dell'A.: Istituto Matematico « U. Dini », viale Morgagni 67/A, 50134 Firenze.

Lavoro eseguito nell'ambito del programma di ricerca del gruppo G.N.S.A.G.A. del Comitato per la Matematica del C.N.R.

di un certo linguaggio connesso con il linguaggio di T. Si ottiene la classe delle strutture F-generiche, caratterizzata da certe proprietà sui morfismi. La chiave di tutto questo sta nell'aver definito, mediante F-morfismi tra strutture, una categoria che possiede limiti diretti.

Nel paragrafo 1 si stabilisce la notazione, si richiamano e si danno definizioni utili in seguito.

Nel paragrafo 2 si definisce la categoria $\mathcal{K}(T)$, associata ad una teoria T, mediante la quale si definisce l'F-forcing; si costruiscono poi in tale categoria i limiti diretti.

Nel paragrafo 3 si dà la definizione di F-forcing e si caratterizza la sottoclasse di $\mathcal{K}(T)$ delle strutture F-generiche.

Infine nel paragrafo 4 si osserva che si possono trattare anche i concetti di struttura F-esistenzialmente chiusa, F-model-companion e F-forcing-finito. Si confronta poi, in casi particolari, l'F-forcing con il coforcing di G. S. Sacerdote [13], [14] e si danno esempi e controesempi.

Non si danno dimostrazioni di risultati che si ottengono per facile generalizzazione da risultati classici e si presuppone che il lettore abbia una certa familiarità con i concetti di forcing e con i risultati di [1], [6], [7], [12], [14].

Si ringraziano A. Marcja e P. Mangani per le utili discussioni avute durante la preparazione di tale articolo.

1. Notazioni e preliminari.

Sia L un linguaggio del primo ordine con variabili individuali $\{v_0, v_1, \ldots\}$, costanti $\{c_0, c_1, \ldots\}$, simboli per operazioni finitarie $\{f_0, f_1, \ldots\}$, simboli per relazioni finitarie $\{R_0, R_1, \ldots\}$, R_0 a due posti, e infine simboli logici $\wedge, \vee, \neg, \exists$. La formula $\forall v\alpha$ sarà abbreviazione per $\neg\exists v \neg\alpha$. Una L-struttura M è una interpretazione per L, data al solito modo, dove R_0 è interpretata nell'uguaglianza. L'insieme base della struttura M si denoterà sempre con M. Se $A \subseteq M$, $L(\boldsymbol{A})$ sarà il linguaggio L con l'aggiunta di un insieme di costanti $\boldsymbol{A} = \{\boldsymbol{a}: a \in A\}$; (M, A) indicherà una interpretazione di $L(\boldsymbol{A})$ tale che $\boldsymbol{a}$ sia interpretata in a. Un enunciato di $L(\boldsymbol{A})$ sarà detto anche enunciato di L *definito* in (M, A).

Dato il linguaggio L, si definisca il linguaggio duale L^0 come quello ottenuto da L rimpiazzando ogni simbolo relazionale R_i con un simbolo R_i^0 della stessa arietà. Sia poi $\mathbf{L} = L \cup L^0$. Le formule di $\mathbf{L}$ possono essere interpretate in una L-struttura M convenendo di interpretare i simboli relazionali R_i^0 nella relazione complementare di quella che interpreta R_i. Due formule $\alpha(v_1, \ldots, v_n)$, $\beta(v_1, \ldots, v_n)$ di $\mathbb{L}$ si dicono L-equivalenti, e si scrive $\alpha \equiv \beta$, se per ogni L-struttura M e ogni $a_1, \ldots, a_n \in M$ $M \models \alpha(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$ se e solo se $M \models \beta(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$.

È ovvio che:

i) Per ogni formula α di $\mathbb{L}$ esiste una formula β di L, con le stesse variabili libere, tale che $\alpha \equiv \beta$.

ii) Per ogni formula α di L esiste una formula β positiva (che non contiene negazione ma che può contenere $\forall$) di $\mathbb{L}$ tale che $\alpha \equiv \beta$.

La verifica di ii) è via il teorema di forma normale prenessa.

Sia $\mathbb{F}$ un sottoinsieme di formule di $\mathbb{L}$, M una L-struttura, A un sottoinsieme di M, $L(A)$ il linguaggio con costanti per elementi di A. Si definisca $\mathbb{F}$-diagramma di (M, A) l'insieme degli enunciati $\alpha(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$ tali che:

$$(M, A) \models \alpha(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n) \quad \text{con } \alpha(v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{F} .$$

L'$\mathbb{F}$-diagramma di (M, A) si indicherà con $\mathbb{F} - \mathrm{Dg}(M, A)$.

Un insieme $\mathbb{F}$ di formula di $\mathbb{L}$ è detto insieme generalizzato di formule atomiche (g.a.) se:

(i) $v_1 = v_1 \in F$.

(ii) Se $\alpha(v_i) \in \mathbb{F}$, con v_i variabile libera in α, allora $\alpha(t) \in \mathbb{F}$, con t termine del linguaggio L.

(iii) $\mathbb{F}$ è chiuso rispetto alle sottoformule.

(Cfr. una definizione simile data in [7]).

L'intersezione di g.a. è ancora un g.a., cosicchè, dato un insieme X di formule di L, possiamo considerare il g.a. generato da X. Se $H \subseteq \{\neg, \wedge, \vee, \forall, \exists\}$ e X è un insieme di formule di $\mathbb{L}$, HX sia il g.a. generato dall'insieme di formule di $\mathbb{L}$ che si ottengono da formule di X mediante l'applicazione di un numero finito di connettivi e quantificatori di H. HX si può descrivere ovviamente nella seguente maniera: $HX = \bigcup_{n \in \omega} X_n$, dove $X_0 \subseteq X_1 \subseteq \ldots$ è una catena definita per induzione da:

$X_0 =$ g.a. generato da X

$$X_{n+1} = X_n \cup \{\neg\, \alpha, \alpha \wedge \beta, \alpha \vee \beta, \exists v\alpha, \forall v\alpha \quad \text{per } \alpha, \beta \in X_n \text{ e } \neg, \wedge, \vee, \exists, \forall \in H\} .$$

Se $\alpha \in HX$ allora esiste un n minimo tale che $\alpha \in X_n$: tale numero si chiami rango di α su X e si indichi con $\mathrm{rg}(\alpha)$.

Data un L-struttura M, sarà conveniente considerare la struttura (M, A) per $L(A)$, con A insieme di generatori di M. (Se in L non ci sono simboli funzionali risulta ovviamente $A = M$). Sia $\mathbb{F}$ un insieme generalizzato di formule atomiche di $\mathbb{L}$ e (M, A) e (N, B) due strutture per $L(A)$ e $L(B)$ rispettivamente; una funzione *iniettiva* $g\colon A \to B$ è detta un $\mathbb{F}$-*morfismo* di (M, A) in (N, B) se:

$$\text{per ogni} \quad \alpha(v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{F} \quad \text{e} \quad a_1, \ldots, a_n \in A$$

$$(M, A) \models \alpha(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n) \quad \textit{implica} \quad (N, B) \models \alpha(\boldsymbol{ga}_1, \ldots, \boldsymbol{ga}_n)\,.$$

Proposizione 1.1. Date le strutture (M, A) e (N, B), una funzione iniettiva $g\colon A \to B$ è un $\mathbb{F}$-morfismo se e solo se:

$$(N, B) \models \mathbb{F} - \mathrm{Dg}(M, A)\,, \quad \boldsymbol{ga} = \boldsymbol{a}\colon a \in A\,. \quad \square$$

2. $\mathbb{F}$-morfismi e limiti diretti.

Da ora in poi $\mathbb{F}$ è un fissato insieme generalizzato di formule atomiche di $\mathbb{L}$.

Si consideri la categoria $\mathcal{K}$ che ha per oggetti le strutture (M, A) per il linguaggio $L(A)$, con A insieme di generatori di M. Come morfismi tra oggetti si prendano gli $\mathbb{F}$-morfismi definiti prima. La composizione di $\mathbb{F}$-morfismi è ancora un $\mathbb{F}$-morfismo, l'identità $1_A\colon A \to A$ è ovviamente un $\mathbb{F}$-morfismo di $(M, A) \to (M, A)$ ed è l'identità della composizione.

Sia $\{(M_i, A_i)\colon i \in I\}$, una famiglia diretta nella categoria $\mathcal{K}$, con I insieme ordinato filtrante, per $i \leqslant j$ $g_{ji}\colon (M_i, A_i) \to (M_j, A_j)$. Definiamo un limite diretto (a meno di isomorfismi) nella categoria $\mathcal{K}$. Si consideri $M' = \bigcup\limits_{n \in I} \prod\limits_{i \geqslant n} M_i$; se $p \in M'$ si indichi con $n(p)$ l'unico indice di I per cui $p \in \prod\limits_{i \geqslant n(p)} M_i$. Si definisca quindi una relazione di equivalenza su M': $p \sim q$ se e solo se esiste un r, $r \geqslant n(p)$, $r \geqslant n(q)$, tale che $p(i) = q(i)$ per ogni $i \geqslant r$. Sia $M'' = M'/\!\sim$; denotiamo con $[p]$ la classe di equivalenza di p. Definiamo su M'' una L-struttura. Se f è un simbolo di operazione k-ario di L e $[p_1], \ldots, [p_k] \in M''$ sia:

$$f^{M''}([p_1], \ldots, [p_k]) = [p]\,,$$

$$\text{con } n(p) \geqslant n(p_1), \ldots, n(p) \geqslant n(p_k) \quad \text{e} \quad p(i) = f^{M_i}(p_1(i), \ldots, p_k(i))\,,$$

per ogni $i \geqslant n(p)$. Si controlla facilmente che tale operazione è ben definita. Se c è un simbolo di costante di L, sia: $c^{M''} = [p]$, con $n(p)$ arbitrario e $p(i) = c^{M_i}$ per ogni $i \geqslant n(p)$. Infine se R è un simbolo di relazione k-ario, sia: $R^{M''}([p_1], \ldots, [p_k])$ se e solo se esiste un r, $r \geqslant n(p_1), \ldots, r \geqslant n(p_k)$ con $R^{M_i}(p_1(i), \ldots, p_k(i))$ per ogni $i \geqslant r$. Si controlla che anche queste sono definizioni ben date. M'' diventa così una L-struttura (R_0 viene ad essere interpretata nell'uguaglianza).

Ogni g_{ji}: $(M_i, A_i) \to (M_j, A_j)$, $i \leqslant j$, è un $\mathbb{F}$-morfismo; si può supporre ovviamente $\boldsymbol{A}_i \subseteq \boldsymbol{A}_j$ e $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{g}_{ji}\boldsymbol{a}$ per ogni $a \in A_i$. Sia $\boldsymbol{A}_\infty = \bigcup_{i\in I} \boldsymbol{A}_i$. Per ogni $a \in \bigcup_{i\in I} A_i$ (si suppongano, come è lecito, gli A_i disgiunti) si consideri $p_a \in M'$ così definito: $n(p_a) = i$ se $a \in A_i$ e $p_a(j) = g_{ji}(a)$ per ogni $j \geqslant i$. Se $a \in A_i$, $a' \in A_j$ allora $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}'$ se e solo se $p_a \sim p_{a'}$. Dunque la corrispondenza tra $\boldsymbol{A}_\infty$ e $A_\infty = \{[p_a]: a \in \bigcup_{i\in I} A_i\}$ definita da $\boldsymbol{a} \mapsto p_a$ è biunivoca. Sia (M, A_∞) la struttura per $L(\boldsymbol{A}_\infty)$, dove M è la sottostruttura di M'' genèrata da A_∞.

Sia ora g_i: $A_i \to A_\infty$ definita da $g_i(a) = [p_a]$; g_i è una funzione iniettiva ed inoltre $g_i = g_j g_{ji}$ per ogni $i \leqslant j$. Resta da verificare che ogni g_i è un $\mathbb{F}$-morfismo e la proprietà universale; per questo necessita il seguente lemma. □

LEMMA 2.1. $\mathbb{F}-\mathrm{Dg}(M, A_\infty) = \bigcup_{i\in I} \mathbb{F}-\mathrm{Dg}(M_i, A_i)$.

DIMOSTRAZIONE. È sufficiente provare che se $\alpha(v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{F}$, $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n \in \boldsymbol{A}_\infty$ allora $(M, A_i) \models \alpha(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$ per ogni $i \geqslant k$. La dimostrazione è per induzione sulla costruzione di α. Se α è della forma $R(t_1, \ldots, t_r)$ con $t_1, \ldots, t_r$ termini del linguaggio $L(\boldsymbol{A}_\infty)$ e R è un simbolo relazionale di L, allora l'asserto è vero per definizione. Sia α della forma $R^0(t_1, \ldots, t_r)$, con R^0 simbolo di L^0. Se $(M, A_\infty) \models R^0(t_1, \ldots, t_r)$ allora $(M, A_\infty) \models \neg R(t_1, \ldots, t_r)$, perciò non esiste k tale che $(M_i, A_i) \models$ $\models R(t_1, \ldots, t_r)$ per tutti gli $i \geqslant k$. Sia k tale che $R(t_1, \ldots, t_r)$ sia definita in (M_k, A_k); allora esiste un $h \geqslant k$ tale che $(M_h, A_h) \models R^0(t_1, \ldots, t_r)$. Per il fatto che g_{ih} è un $\mathbb{F}$-morfismo $(M_i, A_i) \models R^0(t_1, \ldots, t_r)$ per ogni $i \geqslant h$. Viceversa, se $(M_i, A_i) \models R^0(t_1, \ldots, t_r)$ per $i \geqslant k$, allora non è $(M, A) \models R(t_1, \ldots, t_r)$. Infatti, altrimenti, esisterebbe per definizione un h tale che $(M_i, A_i) \models R(t_1, \ldots, t_r)$ per ogni $i \geqslant h$ e ciò è assurdo per $i \geqslant h$, $i \geqslant k$; dunque $(M, A_\infty) \models R^0(t_1, \ldots, t_r)$.

Un ragionamento simile al precedente mostra l'asserto quando α è della forma $\neg\beta$ oppure della forma $\beta \wedge \gamma$, $\beta \vee \gamma$. Sia α della forma $\exists v\beta$. Da $(M, A_\infty) \models \exists v\beta$ segue $(M, A_\infty) \models \beta(t)$ per qualche termine t

con costanti in A_∞. Sia r tale che $\beta(t)$ sia definita in (M_r, A_r). Per ipotesi di induzione esiste un k, $k \geqslant r$, tale che $(M_k, A_k) \models \beta(t)$; dunque $(M_k, A_k) \models \exists v\beta$. Dal fatto che $\exists v\beta(v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{F}$ segue $(M_i, A_i) \models \exists v\beta$ per ogni $i \geqslant k$. Viceversa se $(M_k, A_k) \models \exists v\beta$ segue $(M_k, A_k) \models \beta(t)$ con t termine con costanti in A_k. Essendo $\mathbb{F}$ chiuso rispetto alle sottoformule si ha che $(M_i, A_i) \models \beta(t)$ per ogni $i \geqslant k$. Per ipotesi di induzione allora $(M, A_\infty) \models \beta(t)$ da cui $(M, A_\infty) \models \exists v\beta(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$.

Corollario 2.1. Ogni g_i: $(M_i, A_i) \to (M, A_\infty)$ è un $\mathbb{F}$-morfismo.

Corollario 2.2. Se h_i: $(M_i, A_i) \to (N, B)$ è una famiglia di $\mathbb{F}$-morfismi compatibile con la famiglia g_{ji}: $i, j \in I$, $i \leqslant j$ allora esiste un $\mathbb{F}$-morpfismo h: $(M, A_\infty) \to (N, B)$ tale che $h_i = g_i h$ per ogni $i \in I$. □

Dimostrazione. L'applicazione h: $A_\infty \to B$ data da $h([p_a]) = h_i a$ per i tale che $a \in A_i$ è ben definita, inoltre per il lemma precedente è un $\mathbb{F}$-morfismo.

Definizione 2.1 (cfr. H. J. Keisler [7]). Un $\mathbb{F}$-morfismo g: $(M, A) \to (N, B)$ si dice una $\mathbb{F}$-*immersione* se e solo se per ogni $\alpha(v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{F}$ e $a_1, \ldots, a_n \in A$ $(M, A) \models \alpha(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$ se e solo se $(N, B) \models \alpha(\boldsymbol{ga}_1, \ldots, \boldsymbol{ga}_n)$. Quando g è una inclusione (M, A) si dirà $\mathbb{F}$-sottostruttura di (N, B).

Sia T una teoria in L e sia $\mathcal{K}(T)$ la sottocategoria di $\mathcal{K}$ delle $\mathbb{F}$-sottostrutture di modelli di T. Un enunciato di L si dirà *universale sopra* $\mathbb{F}$ se è L-equivalente ad un enunciato della forma $\forall v_1 \ldots \forall v_n \beta$ con β combinazione booleana di formule di $\mathbb{F}$.

Ricordiamo un risultato di [7] pp. 11.

Teorema 2.1. Una teoria T ha per assiomi un insieme di enunciati universali sopra $\mathbb{F}$ se e solo se ogni $\mathbb{F}$-sottostruttura di un modello di T è un modello di T. □

Di qui discende il teorema fondamentale per la definizione di $\mathbb{F}$-forcing.

Teorema 2.2. $\mathcal{K}(T)$ è chiusa rispetto ai limiti diretti di $\mathcal{K}$. □

Dimostrazione. Sia $(M_i, A_i) \in \mathcal{K}(T)$, $i \in I$ e $(M, A_\infty) = \varinjlim_{i \in I} (M_i, A_i)$. È sufficiente dimostrare che $T \cup S$ è consistente, dove S è l'insieme degli enunciati di $L(A_\infty)$ L-equivalenti ad enunciati di $\mathbb{F} - \mathrm{Dg}(M, A_\infty)$ o a negazioni di essi. Dal fatto che $\mathbb{F} - \mathrm{Dg}(M, A_\infty) = \bigcup_{i \in I} \mathbb{F} - \mathrm{Dg}(M_i, A_i)$ per il teorema di compattezza si ha l'asserto.

3. F-forcing infinito.

Sia T una teoria nel linguaggio L. Si definirà una relazione, detta di F-forcing, tra strutture $(\boldsymbol{M}, A)$ di $\mathcal{K}(T)$ ed enunciati di $\mathbb{F}^*$ definiti in $(\boldsymbol{M}, A)$, dove $\mathbb{F}^*$ è l'insieme generalizzato di formule atomiche $\{\exists, \wedge, \vee, \neg\}\mathbb{F}$. La definizione di « $(\boldsymbol{M}, A)$ F-forza $\alpha(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$ » (in simboli $(\boldsymbol{M}, A) \Vdash_{\mathbb{F}} \alpha(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$) è per induzione su $rg(\alpha(v_1, \ldots, v_n))$ sopra $\mathbb{F}$.

DEFINIZIONE 3.1

i) $(\boldsymbol{M}, A) \Vdash_{\mathbb{F}} \alpha$ *sse* $(\boldsymbol{M}, A) \models \alpha$, se $rg(\alpha) = 0$.

ii) $(\boldsymbol{M}, A) \Vdash_{\mathbb{F}} \alpha \vee \beta$ *sse* $(\boldsymbol{M}, A) \Vdash_{\mathbb{F}} \alpha$ oppure $(\boldsymbol{M}, A) \Vdash_{\mathbb{F}} \beta$, se $rg(\alpha \vee \beta) > 0$.

iii) $(\boldsymbol{M}, A(\Vdash_{\mathbb{F}} \alpha \wedge \beta$ *sse* $(\boldsymbol{M}, A) \Vdash_{\mathbb{F}} \alpha$ e $(\boldsymbol{M}, A) \Vdash_{\mathbb{F}} \beta$, se $rg(\alpha \wedge \beta) > 0$.

iv) $(\boldsymbol{M}, A) \Vdash_{\mathbb{F}} \exists v \alpha$ *sse* $(\boldsymbol{M}, A) \Vdash_{\mathbb{F}} \alpha(t)$, con t termine del linguaggio $L(\boldsymbol{A})$, se $rg(\exists v \alpha) > 0$.

v) $(\boldsymbol{M}, A) \Vdash_{\mathbb{F}} \neg \alpha$ *sse* non esiste $(N, B) \in \mathcal{K}(T)$ con g: $(\boldsymbol{M}, A) \to (N, B)$ F-morfismo e $(N, B) \Vdash_{\mathbb{F}} \alpha(g\boldsymbol{a}_1, \ldots, g\boldsymbol{a})$, se $rg(\neg \alpha) > 0$. □

DEFINIZIONE 3.2. Una struttura $(\boldsymbol{M}, A)$ di $\mathcal{K}(T)$ è detta F-generica se per ogni enunciato α di $\mathbb{F}^*$ definito in $(\boldsymbol{M}, A)$ segue: $(\boldsymbol{M}, A) \Vdash_{\mathbb{F}} \alpha$ oppure $(\boldsymbol{M}, A) \Vdash_{\mathbb{F}} \neg \alpha$. □

Si può dimostrare analogamente al caso del forcing infinito il

LEMMA 3.1. $(\boldsymbol{M}, A)$ è F-generica se e solo se

$$\mathbb{F}^* - \mathrm{Dg}(\boldsymbol{M}, A) = \{\alpha\colon \alpha \text{ definito in } (\boldsymbol{M}, A) \text{ e } (\boldsymbol{M}, A) \vdash_{\mathbb{F}} \alpha\}\,. \quad \square$$

TEOREMA 3.1.

i) Per ogni $(\boldsymbol{M}, A) \in \mathcal{K}(T)$ esiste (N, B) F-generica e un F-morfismo g: $(\boldsymbol{M}, A) \to (N, B)$.

ii) Se $(\boldsymbol{M}, A)$ e (N, B) sono F-generiche e g: $(\boldsymbol{M}, A) \to (N, B)$ è un F-morfismo, allora g è anche un $\mathbb{F}^*$-morfismo.

iii) Se (N, B) è F-generica e g: $(\boldsymbol{M}, A) \to (N, B)$ è un $\mathbb{F}^*$-morfismo allora $(\boldsymbol{M}, A)$ è F-generica. □

DIMOSTRAZIONE. La dimostrazione di i) si basa sul fatto che $\mathcal{K}(T)$ è chiusa rispetto ai limiti diretti. La dimostrazione di ii) discende dal lemma 3.1. La dimostrazione di iii) si basa sul fatto che, dato in $\mathcal{K}(T)$ un diagramma:

$$\begin{tikzcd} & (M_1, A_1) \\ (M, A) \arrow[ur, "g"] \arrow[dr, "h"'] & \\ & (M_2, A_2) \end{tikzcd}$$

con g $\mathbf{F}^*$-morfismo ed h $\mathbf{F}$-morfismo, segue che esiste in $\mathcal{K}(T)$ un (N, B) che lo completa. Per dimostrare ciò si consideri la teoria T' nel linguaggio $L(A_1 \cup A_2)$ (supponendo, come è lecito, $A = A_1 \cap A_2$) così definita: $T' = T \cup S_1 \cup S_2$, dove S_i, $i = 1, 2$, è l'insieme degli enunciati $\alpha(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$ equivalenti a qualche enunciato di $\mathbf{F} - \mathrm{Dg}(M_i, A_i)$. La consistenza di T' mostra l'asserto.

Sia $\mathcal{G}(\mathbf{F}, T)$ la sottocategoria di $\mathcal{K}(T)$ delle strutture $\mathbf{F}$-generiche. Si può dimostrare (cfr. [6], [12]) il

LEMMA 3.2. $\mathcal{G}(\mathbf{F}, T)$ è chiusa sotto i limiti diretti di $\mathcal{K}$.
Da tale lemma discende il

TEOREMA 3.2. $\mathcal{G}(\mathbf{F}, T)$ è l'unica sottocategoria $\mathcal{C}$ di $\mathcal{K}(T)$ tale che:

(i) Da ogni oggetto di $\mathcal{K}(T)$ parte un morfismo verso un oggetto di $\mathcal{C}$ ($\mathcal{C}$ è cofinale in $\mathcal{K}(T)$).

(ii) Ogni morfismo tra due oggetti di $\mathcal{C}$ è un $\mathbf{F}^*$-morfismo.

(iii) Se (M, A) è un oggetto di $\mathcal{K}(T)$ ed esiste un $\mathbf{F}^*$-morfismo da (M, A) verso un oggetto di $\mathcal{C}$, allora $(M, A) \in \mathcal{C}$. $\square$

DIMOSTRAZIONE. L'esistenza discende dal teorema 3.1 e l'unicità dal lemma 3.2 e dal corollario 2.1.

OSSERVAZIONE 3.1. Con una facile generalizzazione si può definire quando una struttura (M, A) è $\mathbf{F}$-esistenzialmente chiusa in (N, B) via l'$\mathbf{F}$-morfismo $g\colon (M, A) \to (N, B)$: ciò sarà quando ogni enunciato $\exists v_1 \ldots \exists v_n \alpha$, definito in (M, A), con α congiunzione di formule di $\mathbf{F}$, risulta vero in (N, B) (interpretando ovviamente le costanti $\boldsymbol{a}$ di A in $g\boldsymbol{a}$) se e solo se è vero in (M, A). Vale che (M, A) è $\mathbf{F}$-esistenzialmente chiuso in (N, B) via g se e solo se esiste un (N', B') e un $\mathbf{F}$-morfismo $g'\colon (N, B) \to (N', B')$ con $g'g$ $\mathbf{F}^*$-morfismo. Di qui si definisce la sottocategoria $\mathcal{E}(\mathbb{F}, T)$ di $\mathcal{K}(T)$ delle strutture $\mathbb{F}$-esistenzialmente chiuse e si caratterizza come l'unica sottocategoria di $\mathcal{K}(T)$ tale che:

(i) $\mathcal{E}(\mathbb{F}, T)$ è cofinale in $\mathcal{K}(T)$.

(ii) Se $g\colon (M, A) \to (N, B)$ è un $\mathbb{F}$-morfismo tra due strutture di $\mathcal{E}(\mathbb{F}, T)$, allora (M, A) è $\mathbb{F}$-esistenzialmente chiusa in (N, B) via g.

(iii) Se una struttura di $\mathcal{K}(T)$ è $\mathbb{F}$-esistenzialmente chiusa in qualche struttura di $\mathcal{E}(\mathbb{F}, T)$, allora appartiene ad $\mathcal{E}(\mathbb{F}, T)$.

Ovviamente $\mathcal{G}(\mathbb{F}, T) \subseteq \mathcal{E}(\mathbb{F}, T)$.

Se T e T' sono teorie in L, si dice che T' è $\mathbb{F}$-model completa relativamente a T se per ogni $(M, A) \in \mathcal{K}(T)$, (M_1, A_1), $(M_2, A_2) \models T'$ con $g_i\colon (M, A) \to (M_i, A_i)$, $i = 1, 2$, $\mathbb{F}$-morfismi, segue

$$\mathbb{F}^* - \mathrm{Dg}(M_1, g_1(A)) = \mathbb{F}^* - \mathrm{Dg}(M_2, g_2(A)) .$$

Si può definire anche $\mathbb{F}$-model-completamento, $\mathbb{F}$-model-companion di una teoria T, confrontare tali concetti con $\mathcal{G}(\mathbb{F}, T)$, $\mathcal{E}(\mathbb{F}, T)$ e generalizzare alcuni classici risultati.

4. Considerazioni ed esempi.

Sarà opportuno discutere come l'$\mathbb{F}$-forcing rappresenti una generalizzazione del forcing infinito di A. Robinson, dare esempi in casi non classici, confrontare con il coforcing infinito di G. S. Sacerdote. (Osserviamo, tra l'altro, che non sarebbe difficile generalizzare anche il forcing finito prendendo come condizioni sottoinsiemi finiti di $\mathbb{F}$-diagrammi di modelli di una data teoria).

Si indichi con At l'insieme delle formule atomiche di un fissato linguaggio L, con At^0 l'insieme delle formule atomiche di L^0 e con $\mathbb{A}$ quelle di $\mathbb{L} = L \cup L^0$, cioè $\mathbb{A} = At \cup At^0$. Discuteremo i tre casi $\mathcal{G}(\mathbb{A}, T)$, $\mathcal{G}(At, T)$, $\mathcal{G}(At^0, T)$ rispettivamente nei prossimi tre punti.

1) Molte volte, quando si ha una struttura M per L, non occorre menzionare l'insieme dei generatori: ad esempio quando il linguaggio non possiede simboli funzionali, l'insieme dei generatori è M stesso. Tuttavia, è da osservare, che quando si parla di una struttura $\mathbb{F}$-generica si intende una struttura (M, A), cioè una L-struttura con un fis-

sato insieme di generatori. Se si considera la classe delle L-strutture M con $(M, A) \in \mathcal{G}(\mathrm{A}, T)$ per qualche A, tale classe, per il teorema 3.2, coincide con la classe $\mathcal{G}_T$ delle strutture infinito-generiche, per il fatto che gli A-morfismi sono immersioni e gli A*-morfismi sono immersioni elementari. Viceversa se si considera la classe delle (M, A), dove A è un insieme di generatori di M e $M \in \mathcal{G}_T$, si ottiene $\mathcal{G}(\mathrm{A}, T)$. Analogamente, dimenticando i generatori $\mathcal{E}(\mathrm{A}, T)$ è la classe delle strutture esistenzialmente chiuse per T.

2) Nel caso di strutture algebriche, cioè quando L possiede solo il simbolo relazionale di uguaglianza, si osserva che ogni At-morfismo è una immersione. Così sempre il teorema 3.2 mostra che $\mathcal{G}(At, T) = \mathcal{G}(\mathrm{A}, T)$. Tuttavia tale uguaglianza non è vera in generale come mostrano gli esempi 4.6 e 4.7. Sempre nelle stesse iopotesi $\mathcal{E}(At, T)$ coincide con la classe delle strutture algebricamente chiuse (cfr. [4]).

3) Si consideri ora $\mathcal{E}(At^0, T)$. Possiamo dimostrare la seguente

PROPOSIZIONE 4.1. Sia L un linguaggio che non possiede simboli relazionali oltre l'uguaglianza, T una teoria con $\mathcal{K}(T)$ chiusa rispetto ai prodotti diretti, allora ogni $(M, A) \in \mathcal{E}(At^0, T)$ è una struttura libera in $\mathcal{K}(T)$ con A insieme di generatori liberi. □

DIMOSTRAZIONE. Per le ipotesi fatte $\mathcal{K}(T)$ possiede algebre libere su un qualsiasi insieme di generatori. Sia allora $(M, A) \in (At^0, T)$. Se M non fosse liberamente generata da A esisterebbero $a_1, \ldots, a_n \in A$ e una equazione (formula atomica di L) $e(v_1, \ldots, v_n)$ tale che: $(M, A) \models e(a_1, \ldots, a_n)$ e $T \models \forall v_1 \ldots \forall v_n e$. Sia ora (S, A) una struttura liberamente generata da A; $g\colon (M, A) \to (S, A)$, definita da $g(a) = a$, è un At^0-morfismo perchè (S, A) è libera su A. Per il fatto che $T \models \forall v_1 \ldots \forall v_n e$ segue $(S, A) \models e(a_1, \ldots, a_n)$. Ma essendo $(M, A) \models e(a_1, \ldots, a_n)$ si cade in assurdo perchè $(M, A) \in \mathcal{E}(At^0, T)$.

COROLLARIO 4.1. Se $\mathcal{K}(T)$ è nell'ipotesi della proposizione 4.1 allora ogni $(M, A) \in \mathcal{G}(At^0, T)$ è liberamente generato da A. □

COROLLARIO 4.2. Se T è una teoria equazionale, allora ogni struttura di $\mathcal{E}(At^0, T)$ è libera.

COROLLARIO 4.3. Se $\mathcal{K}(T)$ è nelle ipotesi della proposizione 4.1 e ogni struttura libera, generata da un sistema di generatori *finito*, è *finita*, allora

$$\mathcal{G}(At^0, T) = \mathcal{E}(At^0, T) = \mathcal{L}$$

con $\mathcal{L} = \{(M, A)$, struttura liberamente generata dall'insieme infinito $A\}$.

DIMOSTRAZIONE. Per le ipotesi fatte $\mathcal{G}(At^0, T) \subseteq \mathcal{E}(At^0, T) \subseteq \mathcal{L}$; basta allora verificare che la classe $\mathcal{L}$ soddisfa le condizioni del teorema 3.2.

OSSERVAZIONE 4.1. Questi ultimi risultati fanno pensare ad una stretta connessione tra $\mathcal{G}(At^0, T)$ e la classe delle strutture cogeneriche per T definite in [14] da G. S. Sacerdote. Tuttavia le due nozioni non coincidono. Se $\mathcal{K}(T)$ è la classe dei campi, $g\colon (M, A) \to (N, B)$ è una suriezione (nel senso di G. S. Sacerdote) se e solo se è un isomorfismo. Dunque ogni struttura in $\mathcal{K}(T)$ è cogenerica. L'esempio 4.5 mostrerà però che non è $\mathcal{G}(At^0, T) = \mathcal{K}(T)$ in questo caso. Tuttavia una definizione di $\mathbf{F}$-forcing, con $\mathbf{F}$ insieme di tutte le formule positive di L^0, come sarebbe suggerito dalle definizioni date in [14], per recuperare la nozione di coforcing, non può essere data essendo l'insieme delle formule positive di L^0 non chiuso rispetto alle sottoformule. Un altro motivo per cui il coforcing non può rientrare nell'$\mathbf{F}$-forcing è il fatto che il punto (iii) del teorema 3.1 viene dimostrato (cfr. [14] teorema 4.7) per il coforcing usando l'ipotesi che la teoria T abbia coamalgamazione.

Passiamo ora a dare esempi specificando nelle strutture l'insieme dei generatori solo quando ciò sia necessario.

ESEMPIO 4.1. Sia T la teoria equazionale delle algebre di Boole. $\mathcal{G}(At^0, T) = \mathcal{E}(At^0, T)$ è la classe delle algebre di Boole (B, X) libere sull'insieme infinito di generatori X per il corollario 4.3.

ESEMPIO 4.2. Sia T la teoria i cui modelli sono gli A-moduli su un anello finito A. $\mathcal{G}(At^0, T) = \mathcal{E}(At^0, T)$ è la classe degli A-moduli liberi su un insieme infinito di generatori.

ESEMPIO 4.3. Sia T la teoria i cui modelli sono spazi vettoriali su un campo infinito. $\mathcal{G}(At^0, T) = \mathcal{E}(At^0, T)$ sono gli spazi vettoriali di dimensione maggiore di zero. Per dimostrare tale fatto si usi il teorema 3.2 e il fatto che la teoria degli spazi vettoriali non nulli su un campo infinito è model-completa per il teorema di Lindström (cfr. [9]) essendo induttiva, priva di modelli finiti e categorica in potenze non contabili.

ESEMPIO 4.4. Sia L il linguaggio con simboli $\{=, <\}$ e T la teoria dell'ordine lineare denso. $\mathbf{F}$ sia l'insieme generalizzato di formule atomiche generato dalle formule di L in forma prenessa con al più due blocchi di quantificatori. In tal caso $\mathrm{Md}(T) = \mathcal{K}(T) = \mathcal{G}(\mathbf{F}, T)$.

La teoria considerata infatti è $\mathbb{F}$-model-completa: basta osservare che l'esistenza del minimo o del massimo in un modello di T si può scrivere mediante una formula con due blocchi di quantificatori.

Esempio 4. 5. Sia T la teoria dei campi non banali nel linguaggio con simboli $\{=, +, \cdot, ^{-1}, 0, 1\}$. È ovvio che ogni At^0-morfismo è anche un At-morfismo essendo la formula $t \neq 0$ equivalente, sotto T, a $t \cdot t^{-1} = 1$. Ne segue

$$\mathcal{E}(At^0, T) = \mathcal{G}(At^0, T) = \mathcal{G}(\mathbb{A}, T)\,.$$

Esempio 4.6. Sia L il linguaggio con simboli $\{=, c, R\}$, c costante, R relazione unaria. Si consideri la teoria con assiomi

$$T = \{\forall v(\neg R(v) \vee v = c)\}\,.$$

Osserviamo che T ha come model-completamento $T' = T \cup \{$assiomi che dicono che il modello è infinito$\}$. Dunque

$$\mathcal{E}(\mathbb{A}, T) = \mathcal{G}(\mathbb{A}, T) = \text{modelli infiniti di } T\,.$$

Mentre

$$\mathcal{E}(At, T) = \mathcal{G}(At, T) = \{A : A \in \mathcal{G}(\mathbb{A}, T) \text{ e } R^A = \{c\}\}\,.$$

Ciò dipende dal fatto che se A è un insieme, id: $(A, c, \emptyset) \to (A, c, \{c\})$ è un At-morfismo, ma non ovviamente un $\mathbb{A}$-morfismo.

Gli esempi fatti finora non sono dei controesempi all'affermazione: $\mathbb{F}_1 \subseteq \mathbb{F}_2$, $\mathbb{F}_1^* = \mathbb{F}_2^*$ implica $\mathcal{G}(\mathbb{F}_1, T) \subseteq \mathcal{G}(\mathbb{F}_2, T)$. Lo saranno gli esempi che seguono.

Esempio 4.7. Sia L il linguaggio con simboli $\{=, R\}$, R simbolo relazionale binario. T sia la teoria $\{\forall v(v = v)\}$. Per il teorema 3.2, segue $\mathcal{G}(At, T) = \{A : A$ infinito, $R^A = A^2\}$. Ma $A \in \mathcal{G}(At, T)$ implica $A \notin \mathcal{G}(\mathbb{A}, T)$. Infatti sia $B = A \cup \{b\}$ con $b \notin A$ e sia $R^B = R^A$ allora $B \models \exists v(\neg\, Rva)$ ma non è $A \models \exists v(\neg\, Rva)$. Sempre per il teorema 3.2, $\mathcal{G}(At^0, T) = \{A : A$ infinito, $R^A = \emptyset\}$ e non esiste $A \in \mathcal{G}(At^0, T) \cap \mathcal{G}_2$.

Esempio 4.8. Sia L il linguaggio con simboli $\{=, f\}$, f simbolo funzionale unario, T la teoria $\{\forall v(f(f(v))) = v\}$. Se $A \models T$ allora $A = B \cup C$ con $B \cap C = \emptyset$ e $B \models \forall v(f(v) = v)$, $C \models \forall v(f(v) \neq v)$. Osserviamo che la struttura A si può rappresentare con un grafo orientato i cui vertici sono elementi di A e c'è una freccia da a verso b

se e solo se $fa = b$. Con questa notazione

$$B = \{b_1 \circlearrowleft, b_2 \circlearrowleft \ldots\} \; C = \left\{ \begin{pmatrix} c_1 \\ d_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_2 \\ d_2 \end{pmatrix} \ldots \right\}.$$

Si ha

$$\mathcal{G}_T = \{A : A \models T,\ A = B \cup C,$$

con B e C dati dalla decomposizione di prima ed entrambi infiniti$\}$: infatti $T' = Th(\mathcal{G}_T)$ è il model-completamento di T. Ma

$$\mathcal{G}(At^0, T) = \{(A, X) \text{ con } A \text{ libera sull'insieme infinito di generatori } X\}.$$

Con la notazione di grafo

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ x_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_3 \\ x_3 \end{pmatrix}, \ldots \right\} \begin{matrix} a_i \in A \setminus X \\ x_i \in X . \end{matrix}$$

BIBLIOGRAFIA

[1] J. Barwise - A. Robinson, *Completing Theories by Forcing*, Annals of Mathematical Logic, **2** (1970), pp. 119-142.

[2] C. C. Chang - H. J. Keisler, *Model Theory*, North Holland, 1973.

[3] P. J. Cohen, *Set Theory and the Continuum Hypothesis*, Benjamin, New York, 1966.

[4] P. Eklof - G. Sabbagh, *Model-completions and modules*, Ann. Math. Logic, **2** (1971), pp. 251-295.

[5] G. Grätzer, *Universal Algebra*, Van Nostrand, Princeton, 1966.

[6] J. Hirschfeld - W. H. Wheeler, *Forcing, Arithmetic, Division Rings*, Lecture notes in Math., Springer-Verlag, Vol. **454**.

[7] H. J. Keisler, *Theory of models with generalized atomic formulas*, J. Symbolic Logic, **25**, No. 1 (1960), pp. 1-26.

[8] H. J. Keisler, *Forcing and the Omitting Types Themrem*, Studies in Model Theory, MAA Studies in Mathematics, Vol. **8**, Buffalo, N. Y., 1973, pp. 96-133.

[9] P. Lindström, *On model-completeness*, Theoria (Lund), **30** (1964), pp. 183-196 M.R.

[10] S. MacLane, *Categories for the Working Mathematician*, Springer-Verlag, 1971.

[11] A. Robinson, *Forcing in Model Theory*, Proceedings of the Colloquium on Model Theory, Roma, November 1969.

[12] A. Robinson, *Infinite forcing in model theory*, pp. 317-340, in the Proceedings of the second Scandinavian symposium in logic (Oslo, 1970), North-Holland, Amsterdam, 1971.

[13] G. S. Sacerdote, *Projective model theory and conforcing*, to appear.

[14] G. S. Sacerdote, *Infinite coforcing in model theory*, to appear.

[15] D. Saracino - V. Weispfenning, *Robinson memorial volume*, Springer lecture notes, Vol. **498**.

[16] H. Simmons, *Companion Theories* (*Forcing in model theory*), Séminaires de Mathématique pure Mensuel, rapport No. 54, Louvain, Janvier 1975.

Manoscritto pervenuto in Redazione il 4 Aprile 1976.