Rendiconti
del
Seminario Matematico
della
Università di Padova

Raffaele Balli

Precessioni ad asse verticale del solido pesante

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 55 (1976), p. 91-104
<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1976__55__91_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 55 (1976)

Precessioni ad asse verticale del solido pesante.

RAFFAELE BALLI (*)

1. – Introduzione.

Il problema della possibilità dinamica di precessioni ad asse verticale di un solido pesante, fissato senza attrito per un suo punto 0, è stato affrontato inizialmente da E. Routh [1], il quale ha dimostrato che non sono dinamicamente possibili precessioni regolari non degeneri ad asse di precessione verticale ed asse di figura principale d'inerzia, se non nel ben noto caso giroscopico. Il problema è stato successivamente posto nella sua formulazione più generale da G. Grioli, il quale in un noto lavoro [2] ha determinato l'intera classe delle precessioni regolari dinamicamente possibili per un solido asimmetrico: si tratta di precessioni ad asse di precessione non verticale; risulta dimostrato in tal modo che non sono dinamicamente possibili in generale precessioni regolari del solido asimmetrico con asse di precessione verticale. In questo stesso lavoro G. Grioli ha dimostrato anche che per il solido a struttura giroscopica sono possibili soltanto le ben note precessioni regolari con asse di figura giroscopico (Lagrange-Poisson). Egli ha quindi definitivamente risolto il problema della possibilità dinamica di precessioni regolari. Successivamente ha posto il problema più generale della possibilità dinamica di precessioni non regolari, ed ha individuato una classe di precessioni, indicate come « semiregolari », nelle quali è costante la velocità di precessione, mentre varia quella di rotazione propria [3]. In base ad un risultato di R. Troilo [4], questa classe esaurisce completamente l'insieme delle precessioni semiregolari

(*) Indirizzo dell'A.: Istituto Matematico della Facoltà di Scienze della Università di Perugia.

di questo tipo con asse di precessione verticale; è stato riconosciuto poi da E. Pucci [5] che non sono possibili precessioni semiregolari ad asse verticale dell'altro tipo, cioè con velocità di precessione variabile e velocità di rotazione propria costante.

Resta aperto il problema generale, indicato da G. Grioli [2] della possibilità dinamica di precessioni ad asse verticale non regolari del tutto, e cioè con velocità di precessione e velocità di rotazione propria variabili.

La risoluzione di questo problema costituisce l'oggetto della presente nota, nella quale si dimostra che non sono dinamicamente possibili precessioni ad asse verticale che non siano regolari o semiregolari.

2. – Impostazione meccanica.

Per precessioni non regolari ad asse verticale si intendono moti in cui la velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ ha la forma:

$$\boldsymbol{\omega} = \nu \boldsymbol{c} + \mu \boldsymbol{\chi}$$

con $\boldsymbol{c}$ versore della verticale (che si sceglie orientato verso il basso); $\boldsymbol{\chi}$ versore fisso nel corpo, $\nu = \nu(t)$, $\mu = \mu(t)$ funzioni generalmente variabili nel tempo, note con il nome di velocità di precessione e di velocità di rotazione propria rispettivamente [1].

Conviene scegliere per terna di proiezione una terna $R\Gamma(0, \boldsymbol{i}_1, \boldsymbol{i}_2, \boldsymbol{i}_3)$ solidale al corpo con $\boldsymbol{i}_3 = \boldsymbol{\chi}$ e tale che, rispetto ad essa, l'omografia d'inerzia assuma la forma ridotta:

$$\sigma = \begin{bmatrix} A & 0 & -B' \\ 0 & B & -A' \\ -B' & -A' & C \end{bmatrix}.$$

Si indicano inoltre con c_i le componenti di $\boldsymbol{c}$ e con ξ_i le componenti di $OG^* = mgOG$ rispetto alla terna $R\Gamma$.

[1] Nelle precessioni regolari la velocità di precessione e la velocità di rotazione propria sono costanti. Nelle precessioni semiregolari una delle due velocità varia nel tempo mentre l'altra rimane costante.

Un moto di precessione con $\boldsymbol{\omega} = \nu \boldsymbol{c} + \mu \boldsymbol{i}_3$ è individuato, a meno di un inessenziale spostamento rotatorio attorno alla verticale, dalle funzioni $c_1(t)$, $c_2(t)$, $c_3(t)$, $\nu(t)$, $\mu(t)$. Questo moto è dinamicamente possibile se e solo se le dette funzioni verificano il sistema di equazioni:

$$\dot{\boldsymbol{c}} = \mu \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{i}_3 \tag{1}$$

$$\dot{\nu}\sigma(\boldsymbol{c}) + \dot{\mu}\sigma(\boldsymbol{i}_3) - \nu^2\sigma(\boldsymbol{c})\times\boldsymbol{c} + \mu\nu[\sigma(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{i}_3) + \boldsymbol{c}\times\sigma(\boldsymbol{i}_3) + \boldsymbol{i}_3\times\sigma(\boldsymbol{c})] + \mu^2\boldsymbol{i}_3\times\sigma(\boldsymbol{i}_3) = OG^*\times\boldsymbol{c} \tag{2}$$

per le quali sussistono gli integrali primi classici:

$$\nu^2\sigma(\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{c} + 2\mu\nu\sigma(\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{i}_3 + \mu^2\sigma(\boldsymbol{i}_3)\cdot\boldsymbol{i}_3 - 2OG^*\cdot\boldsymbol{c} = 2E_0 \tag{3}$$

$$\nu\sigma(\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{c} + \mu\sigma(\boldsymbol{i}_3)\cdot\boldsymbol{c} = k_c \tag{4}$$

e l'integrale primo particolarizzato:

$$\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c} = 1\,. \tag{5}$$

Proiettando le (1) sugli assi di $R\Gamma$ si ottengono le equazioni di Poisson:

$$\dot{c}_1 = \mu c_2\,, \qquad \dot{c}_2 = -\mu c_1\,, \qquad c_3 = \text{costante}\,. \tag{1'}$$

Analogamente dalle (2) si ottengono le equazioni di Eulero:

$$a_1\dot{\nu} - \dot{\mu}B' + b_1\nu^2 + d_1\mu\nu + \mu^2 A' = h_1 \tag{2.1}$$

$$a_2\dot{\nu} - \dot{\mu}A' + b_2\nu^2 + d_2\mu\nu - \mu^2 B' = h_2 \tag{2.2}$$

$$a_3\dot{\nu} + \dot{\mu}C + b_3\nu^2 = h_3 \tag{2.3}$$

avendo posto:

$$\begin{aligned}
a_1(c_1, c_2) &\equiv Ac_1 - B'c_3\\
a_2(c_1, c_2) &\equiv Bc_2 - A'c_3\\
a_3(c_1, c_2) &\equiv -B'c_1 - A'c_2 + Cc_3\\
b_1(c_1, c_2) &\equiv -B'c_1c_2 - A'c_2^2 + (C-B)c_2c_3 + A'c_3^2\\
b_2(c_1, c_2) &\equiv B'c_1^2 + A'c_1c_2 + (A-C)\,c_1c_3 - B'c_3^2
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
b_3(c_1, c_2) &\equiv (B - A)\, c_1 c_2 - A' c_1 c_3 + B' c_2 c_3 \\
d_1(c_1, c_2) &\equiv (A - B + C)\, c_2 + 2A' c_3 \\
d_2(c_1, c_2) &\equiv (A - B - C)\, c_1 - 2B' c_3 \\
h_1(c_1, c_2) &\equiv \xi_2 c_3 - \xi_3 c_2 \\
h_2(c_1, c_2) &\equiv \xi_3 c_1 - \xi_1 c_3 \\
h_3(c_1, c_2) &\equiv \xi_1 c_2 - \xi_2 c_1 \,.
\end{aligned}
$$

È possibile risolvere le equazioni fornite dagli integrali primi rispetto alle incognite ν e μ ottenendo (²):

$$\nu = (k_c - \mu a_3)/s \tag{6}$$

e

$$\mu^2 = \Gamma/\Lambda = (ws - k_c^2)/(Cs - a_3^2) \tag{7}$$

essendo

$$
\begin{aligned}
s = s(c_1, c_2) &= Ac_1^2 + Bc_2^2 - 2B' c_1 c_3 - 2A' c_2 c_3 + Cc_3^2 \\
w = w(c_1, c_2) &= 2\xi_1 c_1 + 2\xi_2 c_2 + 2\xi_3 c_3 + 2E_0 \,.
\end{aligned}
$$

Derivando rispetto al tempo la (6), e tenendo conto delle (1′) si ottiene (³):

$$\dot{\nu} = [\dot{\mu}(-sa_3) + \mu^2(zs - 2a_3 b_3) + 2k_c b_3 \mu]/s^2 \tag{6′}$$

essendo $z = z(c_1, c_2) = B' c_2 - A' c_1$.

Sostituendo le espressioni ottenute di ν e $\dot{\nu}$ nelle prime due equazioni di Eulero si ha:

$$P_1\dot{\mu} + P_2\mu^2 + P_3\mu + P_4 = 0 \tag{2.1′}$$

$$Q_1\dot{\mu} + Q_2\mu^2 + Q_3\mu + Q_4 = 0 \tag{2.2′}$$

(²) $s(c_1, c_2) \equiv \sigma(\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{c}$ risulta sempre positivo perchè la forma quadratica associata alla omografia σ è definita positiva (si esclude che il corpo rigido sia rettilineo); $\Lambda(c_1, c_2) \equiv Cs - a_3^2$ è sempre positiva per lo stesso motivo.

(³) Alla stessa relazione si perviene anche utilizzando la (2.3); in effetti ogni moto che verifichi i due integrali primi verifica anche la terza equazione Eulero, data la complanarità in ogni istante di $\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{c}$ ed $\boldsymbol{i}_3$.

avendo posto:

$$\begin{aligned}
P_1 &= P_1(c_1, c_2) \equiv s(-a_1 a_3 - B's)\\
P_2 &= P_2(c_1, c_2) \equiv s(a_1 z - d_1 a_3 + A's) + a_3(-2a_1 b_3 + b_1 a_3)\\
P_3 &= P_3(c_1, c_2) \equiv k_c(2a_1 b_3 - 2a_3 b_1 + d_1 s)\\
P_4 &= P_4(c_1, c_2) \equiv k_c^2 b_1 - h_1 s^2\\
Q_1 &= Q_1(c_1, c_2) \equiv s(-a_2 a_3 - A's)\\
Q_2 &= Q_2(c_1, c_2) \equiv s(a_2 z - d_2 a_3 - B's) + a_3(-2a_2 b_3 + b_2 a_3)\\
Q_3 &= Q_3(c_1, c_2) \equiv k_c(2a_2 b_3 - 2a_3 b_2 + d_2 s)\\
Q_4 &= Q_4(c_1, c_2) \equiv k^2 b_2 - h_2 s^2 .
\end{aligned}$$

Il problema è così ricondotto alla determinazione delle funzioni $c_1(t)$, $c_2(t)$, $\mu(t)$; la compatibilità dinamica del moto è allora caratterizzata dal sistema fornito dalle equazioni (7), (2.1′) (2.2′) e dalle

$$\dot{c}_1 = \mu c_2 \tag{1.1′}$$

$$c_1^2 + c_2^2 = 1 - c_3^2 = \text{costante} = a^2 . \tag{5′}$$

Ad ogni moto di precessione non regolare corrisponde una soluzione $c_1(t)$, $c_2(t)$ e $\mu(t)$ delle dette equazioni con $c_1(t)$, $c_2(t)$, $\mu(t)$ non costanti (4); viceversa da ogni soluzione siffatta delle dette equazioni, ponendo $c_3^2 = 1 - a^2$ e $\nu(t)$ deserminato dalla (6), si ottiene una soluzione delle equazioni di Eulero e di Poisson, cioè un moto dinamicamente possibile a carattere precessionale.

La ricerca delle eventuali soluzioni comuni alle dette equazioni, che sono in numero sovrabbondante, viene effettuata trasferendo il problema nel campo complesso mediante il principio del prolungamento analitico.

3. – Condizioni dedotte mediante il prolungamento analitico.

Le equazioni (1.1′), (5′) e (7) individuano le funzioni analitiche $c_1(t)$, $c_2(t)$, $\mu(t)$ a partire da assegnate condizioni iniziali; il problema

(4) Le soluzioni con $c_1(t)$ e $c_2(t)$ costanti corrispondono a precessioni degeneri in rotazioni attorno alla verticale, le soluzioni con $\mu(t)$ costante corrispondono esclusivamente a precessioni regolari come dimostrato in [4].

della loro determinazione è risolubile per quadrature. Per la (5′) è lecito porre

$$c_1 = a \sin\theta\,, \qquad c_2 = a\cos\theta\ ;$$

dalla (1.1′) si ottiene allora $\dot\theta = \mu$ e dalla (7) $\dot\theta^2 = 1/f(\theta)$. È quindi

$$t - t_0 = \int_{\theta_0}^{\theta} \sqrt{f(\theta)}\, d\theta \tag{8}$$

con $f(\theta) = \Lambda(a\cos\theta,\ a\sin\theta)/\Gamma(a\cos\theta,\ a\sin\theta)$.

La scelta della determinazione della radice è individuata per continuità in corrispondenza a tutti i valori di θ per i quali è $f(\theta) \neq 0$; nella funzione analitica espressa dalla (8) si hanno punti di diramazione in corrispondenza agli zeri della funzione $f(\theta)$, e si hanno singolarità in corrispondenza ai poli di $f(\theta)$.

Poichè Γ e Λ sono polinomi in c_1 e c_2, i punti di diramazione corrispondono a zeri di Γ sulla circonferenza (5′) ed i poli corrispondono a zeri di Λ sulla stessa circonferenza.

La funzione $f(\theta)$ ha quindi in ogni dominio limitato del piano complesso θ un numero finito di poli e di zeri; per ogni coppia di numeri complessi θ_0 e θ_1 distinti da questi, è dunque sempre possibile scegliere un cammino che unendoli non incontri nè poli nè zeri.

Ciò mostra che la funzione analitica $\theta(t)$ assume al variare di t nel campo complesso tutti i valori complessi, quali che siano le condizioni iniziali. In definitiva per ogni soluzione $c_1(t)$, $c_2(t)$, $\mu(t)$ nel campo complesso, la coppia (c_1, c_2) assume, al variare di t, tutti i valori possibili sulla circonferenza $c_1^2 + c_2^2 = a^2$. Fissata una soluzione $c_1(t)$, $c_2(t)$, $\mu(t)$ delle equazioni (1.1′), (5′), (7) il problema di riconoscere se questa è anche soluzione delle (2.1′) e (2.2′) è ricondotto alla verifica di due equazioni nella variabile θ o equivalentemente all'annullarsi di due funzioni della coppia c_1, c_2 in tutti i punti della circonferenza (5′). Infatti la (7) esprime μ in funzione di c_1 e c_2, ed utilizzando le (1) si ottiene:

$$2\mu\dot\mu = \left(\Lambda \frac{d\Gamma}{dt} - \frac{d\Lambda}{dt}\Gamma\right)\Big/\Lambda^2$$

essendo però

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \left(\frac{\partial\Gamma}{\partial c_1} c_2 - \frac{\partial\Gamma}{\partial c_2} c_1\right)\mu\,, \qquad \frac{d\Lambda}{dt} = \left(\frac{\partial\Lambda}{\partial c_1} c_2 - \frac{\partial\Lambda}{\partial c_2} c_1\right)\mu$$

risulta

$$\dot{\mu} = (\mathring{\Gamma}\Lambda - \Gamma\mathring{\Lambda})/\Lambda^2 \tag{9}$$

con

$$\mathring{\Gamma} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\Gamma}{\partial c_1}c_2 - \frac{\partial\Gamma}{\partial c_2}c_1\right) \quad \text{e} \quad \mathring{\Lambda} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\Lambda}{\partial c_1}c_2 - \frac{\partial\Lambda}{\partial c_2}c_1\right).$$

In questo modo anche $\dot{\mu}$ risulta espressa in funzione di c_1 e c_2 e quindi le due equazioni (2.1′) e (2.2′) possono essere tradotte in funzione di c_1 e c_2 e devono essere verificate per ogni coppia c_1, c_2 che appartenga alla circonferenza (5′), poichè per ogni soluzione $c_1(t)$ e $c_2(t)$ assumono tutti i possibili valori sulla detta circonferenza, esclusi al più i poli della funzione $1/f(\theta)$ che sono in numero finito. La scelta della particolare soluzione delle equazioni (1.1′), (5′), (7) è tradotta in queste ultime equazioni, dai valori particolari delle costanti a, E_0, k_c, che intervengono nei coefficienti del polinomio Γ, e dalle quali dipende quindi la presenza di singolarità nella soluzione delle dette equazioni espressa dalla (8).

La verifica esplicita delle equazioni (2.1′) e (2.2′) non è attuabile per la estrema complicazione dei calcoli; è però possibile individuare condizioni strutturali o di moto, necessarie per la compatibilità dinamica dei moti cercati, dallo studio di queste equazioni nell'intorno dei poli della funzione $\mu^2(c_1, c_2) = \Gamma/\Lambda$ definita sulla circonferenza (5′) dalla (7) nel caso in cui questi poli siano presenti, mentre il problema risulta semplificato dalla condizione di assenza di poli.

Si presentano le diverse eventualità a seconda che gli zeri di Λ sulla circonferenza siano o no degli zeri anche di Γ. Gli zeri di Λ sulla circonferenza sono le soluzioni del sistema:

$$\Sigma \equiv \begin{cases} \Lambda(c_1, c_2) \equiv uc_1^2 + vc_2^2 - 2A'B'\,c_1c_2 = 0 \\ c_1^2 + c_2^2 = a^2 \end{cases}$$

avendo posto $u = AC - B'^2$ e $v = BC - A'^2$.

Queste sono:

$$Z_{1,2} = (\lambda_1 a/\varrho_1, a/\varrho_1) \qquad Z_{3,4} = (\lambda_2 a/\varrho_2, a/\varrho_2)$$

con $\lambda_1 = (A'B' + i\sqrt{\Delta C})/u$, $\lambda_2 = (A'B' - i\sqrt{\Delta C})/u$, $\varrho_1^2 = 1 + \lambda_1^2$, $\varrho_2^2 =$

$= 1 + \lambda_2^2$. Esse sono coniugate due a due e distinte tra loro per valori meccanicamente accettabili dei parametri ($\Delta = |\sigma| > 0$, $C > 0$), e sono tutte al finito tranne quando sia $u = v$ e $A'B' = 0$ nel qual caso esse sono tutte improprie.

La discussione prosegue distinguendo i seguenti casi:

1) Le soluzioni Z_i del sistema Σ sono al finito e $\mu^2(c_1, c_2)$ ha poli (al finito) risultando $\Gamma \neq 0$ in corrispondenza a due o a tutte le Z_i:

2) Essendo sempre le Z_i al finito, $\mu^2(c_1, c_2)$ non ha poli al finito risultando $\Gamma(Z_i) = 0$ per tutte le Z_i.

3) le soluzioni del sistema Σ sono tutte improprie: questa eventualità si presenta se e solo se è $u = v$, $A'B' = 0$.

4. – Caso 1.

Siano Z e Z' due soluzioni del sistema Σ in corrispondenza alle quali non si annulli Γ. Poichè si tratta di soluzioni semplici di Σ, in corrispondenza ad esse $\mu^2 = \Gamma/\Lambda$ ha un polo di ordine 1 e quindi $|\mu|$ è infinito di ordine $\frac{1}{2}$. Dalla (9) si riconosce invece che $|\mathring{\mu}|$ è un infinito di ordine 2 non essendo $\mathring{\Lambda}$ infinitesimo.

Una condizione necessaria affinchè le (2.1′) e (2.2′) siano verificate per valori di c_1 e c_2 nell'intorno delle dette soluzioni è che sia:

$$(10) \qquad \begin{cases} P_1(c_1, c_2) \equiv s(a_1 a_3 + B's) = 0 \\ Q_1(c_1, c_2) \equiv s(a_2 a_3 + A's) = 0 \end{cases}$$

quando alla coppia (c_1, c_2) vengano attribuiti i valori Z e Z'.

Poichè nei punti Z e Z' è $\Lambda \equiv Cs - a_3^2 = 0$, l'annullarsi di s comporta l'annullarsi di a_3 e quindi dal sistema (10) si deduce che o è $A'a_1 = B'a_2 \Leftrightarrow AA'c_1 = BB'c_2$, oppure è $a_3 = 0$, $s = 0$. Poichè per ogni radice del sistema Σ il rapporto c_1/c_2 è non reale, la prima eventualità può essere verificata soltanto se risulta

a) $A' = B' = 0$.

La seconda eventualità è invece verificata, come si vede agevolmente, soltanto nei seguenti casi:

b) $A = B$ e $Aa^2 = Cc_3^2$.

c) $B' = 0$, $u > v$ e $A'a\sqrt{u} = \pm Cc_3\sqrt{u - v}$.

d) $A' = 0$, $u < v$ e $B'a\sqrt{v} = \pm Cc_3\sqrt{v - u}$.

i casi c) e d) sono diversi solo nominalmente; in essi il segno $+$ sussiste per una coppia delle radici di Σ ed il segno $-$ per l'altra; ne segue che sono compatibili in questo caso soltanto due poli per μ^2.

5. - Caso 2.

Per esaminare la compatibilità dinamica di moti di precessione nel caso in esame è opportuno osservare che, con riguardo a dei moti che non si riducono a delle rotazioni attorno alla verticale (necessariamente uniformi), la (7) può essere sostituita con una equazione equivalente di forma più semplice.

Utilizzando la parametrizzazione razionale della circonferenza

$$c_1 = 2a\tau/1 + \tau^2 , \qquad c_2 = a(1 - \tau^2)/1 + \tau^2 ; \qquad \tau = (a - c_2)/c_1 ,$$

dalla (7) si ottiene:

$$\mu^2(\tau) = \Gamma'(\tau)/[(1 + \tau^2)\Lambda'(\tau)]$$

essendo $\Gamma'(\tau)$ e $\Lambda'(\tau)$ polinomi di grado 6 e 4 rispettivamente. Poichè $\Gamma(c_1, c_2)$ è nullo in corrispondenza alle soluzioni di Σ, cioè in corrispondenza agli zeri di Λ sulla circonferenza, risulta $\Gamma'(\tau) = 0$ in corrispondenza alle quattro radici di $\Lambda'(\tau)$ e quindi è:

$$\mu^2(\tau) = \Gamma''(\tau)/(1 + \tau^2) \tag{11}$$

con $\Gamma''(\tau)$ polinomio di grado 2.

Effettuando la trasformazione inversa si ottiene la preannunziata equazione più semplice equivalente alla (7):

$$\mu^2(c_1, c_2) = \alpha c_1 + \beta c_2 + \gamma \equiv T(c_1, c_2) . \tag{12}$$

da questa per derivazione si ha:

$$\dot{\mu} = (\alpha c_2 - \beta c_1)/2 \equiv \mathring{T}(c_1, c_2) .$$

Sostituendo nella (2.1′) si ottiene:

$$P_3\mu = -P_4 - P_1\overset{\circ}{T} - P_2 T \equiv W(c_1, c_2)\,.$$

Utilizzando ancora la parametrizzazione razionale della circonferenza si ricava:

$$(1 + \tau^2)^2 P_3'(\tau)\mu = W'(\tau) \tag{13}$$

essendo P_3' e W' polinomi di grado 6 e 10 rispettivamente.

Se $P_3'(\tau)$ non è identicamente nullo, il che avviene se e solo se $P_3(c_1, c_2)$ è identicamente nullo sulla circonferenza (5′) dalla eliminazione di μ tra la (13) e la (11) si ottiene:

$$[W'(\tau)]^2 = (1 + \tau^2)^3 [P_3'(\tau)]^2 \Gamma''(\tau)\,.$$

Questa equazione deve essere verificata identicamente per la compatibilità delle due equazioni; si riconosce allora che deve essere:

$$\Gamma''(\tau) = \mu_0(1 + \tau^2)$$

e quindi dalla (11) $\mu = \mu_0 =$ costante, che comporta, come si è già osservato, precessioni regolari.

L'esistenza di un moto di precessione non regolare è quindi possibile soltanto quando risulti sulla circonferenza (5′) $P_3(c_1, c_2) = 0$. Con ragionamento analogo si riconosce che deve risultare anche $Q_3(c_1, c_2) = 0$ sulla stessa circonferenza.

Da queste condizioni si ottiene:

$$k_c = 0 \qquad \text{oppure} \qquad A' = B' = 0\,, \qquad A = B\,, \qquad c_3^2 = A/(C - A)\,.$$

6. – Condizioni necessarie di moto.

Nei paragrafi precedenti si sono dedotte condizioni necessarie per la possibilità dinamica di moti di precessione non regolare. Le diverse eventualità vengono in seguito esaminate singolarmente confrontandole anche con i risultati parziali già noti. Nel caso giroscopico le sole precessioni possibili sono regolari. Nel caso di Poinsot sono possibili precessioni soltanto quando l'ellissoide d'inerzia è rotondo e si tratta di precessioni regolari. G. Grioli ha inoltre dimostrato che:

i) non sono possibili precessioni non regolari ad asse verticale per il solido asimmetrico con asse di figura passante per il baricentro, quando detto asse risulti ortogonale ai piani ciclici dell'ellissoide d'inerzia relativo al punto fisso;

ii) non sono possibili precessioni non regolari ad asse verticale per il solido asimmetrico qualora l'asse di figura sia uno degli assi principali d'inerzia relativi al punto fisso;

iii) sono possibili soltanto precessioni semiregolari (ν costante) nelle condizioni strutturali di Hess: asse di figura baricentrico ortogonale alla sezione ciclica dell'ellissoide reciproco d'inerzia ([5]).

Questo confronto permette di eliminare direttamente alcuni dei casi individuati, e di ridursi ad esaminare i rimanenti:

1) Caso di esistenza di poli al finito per la funzione $\mu^2(c_1, c_2)$:

1′) $A = B$ e $Aa^2 = Cc_3^2$, μ^2 con 2 o 4 poli.

1″) $B' = 0$, $u > v$, $A'a\sqrt{u} = \pm Cc_3\sqrt{u - v}$, con 2 poli.

2) Caso di assenza di poli al finito per la funzione $\mu^2(c_1, c_2)$:

2′) $k_c = 0$.

3) Caso di assenza di zeri al finito per la funzione $\Lambda(c_1, c_2)$:

3′) $u = v$ e $A'B' = 0$.

7. – Discussione dei casi elencati.

1′) $A = B$, $Aa^2 = Cc_3^2$.

Si discute questo caso indipendentemente dalla ipotesi di esistenza di poli per la funzione $\mu^2(c_1, c_2)$. Essendo $A = B$ l'omografia d'inerzia assume la forma ridotta (adottata nella impostazione generale) per ogni terna di assi con $\boldsymbol{i}_3 = \boldsymbol{\chi}$; è allora possibile scegliere la terna in modo che risulti $B' = 0$. I polinomi P_i, Λ, Γ, assumono così una forma semplificata, e questo permette di determinare agevolmente

([5]) Cfr. [3], pag. 32 e pag. 43.

sotto quali condizioni l'equazione algebrica $F(c_1, c_2) = 0$ ottenuta sostituendo in (2.1′) a μ^2 e $\dot{\mu}$ le loro espressioni fornite da (7) e (9), risulti verificata da ogni coppia (c_1, c_2) appartenente alla $c_1^2 + c_2^2 = a^2$, cioè sotto quali condizioni la $F(c_1, c_2) = 0$, rappresentante in $R^2(c_1, c_2)$ una curva algebrica, contenga la circonferenza $c_1^2 + c_2^2 = a^2$. Una condizione necessaria perchè ciò avvenga è che detta curva passi per i punti ciclici di R^2. Imponendo questa condizione si ottiene:

$$A'(\xi_1 + i\xi_2) = 0 .$$

per la possibilità dinamica di precessioni è necessario quindi che risulti o $A' = 0$ oppure $\xi_1 = \xi_2 = 0$. Con queste ulteriori condizioni si ricade però nei casi i) ed ii).

1″) $B' = 0$, $u > v$, $A'a\sqrt{u} = Cc_3\sqrt{u-v}$ [6].

a_3 si annulla in corrispondenza alle due radici

$$\left(ia\sqrt{v/(u-v)},\ a\sqrt{u/(u-v)}\right) \quad \text{e} \quad \left(-ia\sqrt{v/(u-v)},\ a\sqrt{u/(u-v)}\right)$$

di Σ; l'ipotesi che in corrispondenza a queste due radici μ^2 abbia un polo comporta che sia $k_c \neq 0$; l'ipotesi che μ^2 abbia soltanto due poli comporta che in corrispondenza alle altre due radici

$$\left(ia\sqrt{v/(u-v)},\ -a\sqrt{u/(u-v)}\right) \quad \text{e} \quad \left(-ia\sqrt{v/(u-v)},\ -a\sqrt{u/(u-v)}\right)$$

di Σ risulti $\Gamma = 0$; da queste condizioni si ottiene $\xi_1 = 0$ e $4Cc_3^2(-2\xi_2 \cdot Cc_3/A' + 2\xi_3 c_3 + 2E_0) - k_c^2 = 0$.

Risulta allora $\Lambda = \sqrt{u-v}\, c_2 - a\sqrt{u}$ e

$$\sqrt{u-v}\,\Gamma = [-2\xi_2(B-A)]\,c_2^2 + [2\xi_2 Cc_3(B-A)/A' + 4\xi_2 A' c_3 + \\ + (2\xi_3 c_3 + 2E_0)\,(A-B)]\,c_2 - A'[(2\xi_3 c_3 + 2E_0)(Aa^2 + Cc_3^2) - k_c^2]/Cc_3 .$$

Sostituendo nella prima equazione di Eulero le espressioni semplificate di μ^2 e $\dot{\mu}$ si ricava per μ l'espressione $\mu = G/L$ essendo G ed L polinomi in c_1, c_2 con $L \not\equiv 0$; questi polinomi, poichè contengono soltanto potenze pari di c_1 possono essere riportati a polinomi nella sola variabile c_2. Quali che siano i gradi di questi polinomi l'espressione di

---

[6] L'altro caso (con segno opposto) si discute analogamente.

μ^2 da essi fornita non può accordarsi con l'espressione di $\mu^2 = \Gamma/\Lambda$ nella quale la differenza tra l'ordine del numeratore e del denominatore è 1. Ne segue l'impossibilità dinamica di precessioni non regolari.

2') $k_c = 0$, μ^2 privo di poli.

poichè $\Gamma = ws$ e w è lineare in c_1 e c_2 per almeno una delle coppie di radici di Σ deve essere $s = 0$ e quindi $a_3 = 0$. Questa condizione per quanto visto in precedenza comporta una delle due eventualità b) oppure c).

L'esistenza di moti nella prima eventualità è stata già esclusa a proposito del caso 1') nella discussione del quale non si è utilizzata l'ipotesi di esistenza o meno di poli per $\mu^2(c_1, c_2)$.

Nel secondo caso essendo $A' a\sqrt{u} = + Cc_3\sqrt{u-v}\, s$ si annulla per una sola delle coppie di radici e quindi w deve annullarsi per l'altra coppia. Questo comporta che sia $\xi_1 = 0$ e $A'(\xi_3 c_3 + E_0) = \xi_2 Cc_3$. Si ottiene allora per μ^2 la forma semplificata:

$$\mu^2 = 2\xi_2[A'(B-A)c_2 + (v-u-A'^2)c_3]/A'(v-u)\,.$$

Sostituendo in (2.1') le espressioni di μ^2 e di $\dot{\mu}$ si ottiene una equazione algebrica che rappresenta una curva algebrica in R^2. Imponendo la condizione di passaggio per i punti ciclici si ottiene:

$$A'(\xi_1 + i\xi_2) = 0\,.$$

Per la possibilità dinamica di precessioni è necessario quindi che risulti o $A' = 0$ oppure $\xi_1 = \xi_2 = 0$. Con queste ulteriori condizioni si ricade però nei casi ii) ed iii).

8. – Conclusioni.

Si conclude che le uniche precessioni ad asse verticale del solido pesante asimmetrico fissato senza attrito per un suo punto sono le precessioni semiregolari a velocità di precessione costante individuate da G. Grioli; esse sono dinamicamente possibili per un solido avente la struttura di Hess e sono moti alla Hess.

BIBLIOGRAFIA

[1] E. Routh, *Advanced rigid dynamics of a system of rigid bodies*, Dover Publications Inc., New York (1955).

[2] G. Grioli, *Esistenza e determinazione delle precessioni regolari dinamicamente possibili per un solido pesante asimmetrico*, Annali di Matematica, serie IV, **26** (1947).

[3] G. Grioli, *Forma intrinseca delle equazioni dinamiche del solido pesante asimmetrico con un punto fisso e ricerca dei moti di precessione*, Atti Univ. Ferrara, sez. 7, **3** (1954).

[4] R. Troilo, *Sulla caratterizzazione delle precessioni semiregolari con asse di precessione verticale*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **46** (1971).

[5] E. Pucci, *Sulle precessioni semiregolari di un solido pesante ad asse di precessione verticale*, Rend. Acc. Naz. Lincei, **54**, fasc. 4 (1973).

Manoscritto pervenuto in redazione il 23 aprile 1975.