RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

SILVANA BAZZONI

Dualità sul completamento naturale di un anello noetheriano

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 55 (1976), p. 63-80
<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1976__55__63_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 55 (1976)

Dualità sul completamento naturale di un anello noetheriano.

SILVANA BAZZONI (*)

Introduzione.

Nel presente lavoro si generalizza la teoria della dualità di Macdonald, valida sopra un anello locale noetheriano completo [MD], al completamento Ω-adico (o naturale) di un anello noetheriano.

Siano R un anello noetheriano commutativo con unità e Ω l'insieme degli ideali massimali di R. La topologia Ω-adica su R si definisce prendendo come prebase di intorni di 0, le potenze degli ideali massimali.

Sia A il completamento Ω-adico di R. Risulta $A = \prod_{\mathfrak{m}\in\Omega} \hat{R}_{\mathfrak{m}}$, dove $\hat{R}_{\mathfrak{m}}$ è il completamento $\mathfrak{m}$-adico del localizzato di R in $\mathfrak{m}$.

Per ogni $\mathfrak{m} \in \Omega$, sia $E_{\mathfrak{m}}$ l'R-inviluppo iniettivo di $R/\mathfrak{m}$. Come è noto, $E_{\mathfrak{m}}$ risulta in modo naturale un $\hat{R}_{\mathfrak{m}}$-modulo e l'anello degli R-endomorfismi di $E_{\mathfrak{m}}$ (o equivalentemente $\hat{R}_{\mathfrak{m}}$-endomorfismi) è isomorfo a $\hat{R}_{\mathfrak{m}}$.

Posto $E = \bigoplus_{\mathfrak{m}\in\Omega} E_{\mathfrak{m}}$, E è un A-modulo il cui anello degli A-endomorfismi è isomorfo ad A.

La topologia finita, di cui A è dotato in quanto anello degli endomorfismi di E, coincide con quella che gli compete in quanto completamento Ω-adico di R.

(*) Indirizzo dell'A.: Seminario Matematico dell'Università, Via Belzoni 7, 35100 Padova.

Lavoro eseguito nell'ambito dei gruppi di ricerca matematica del C.N.R.

Sia $\hat{\mathfrak{F}}$ l'insieme degli ideali aperti di A e denotiamo con $\mathcal{T}_{\hat{\mathfrak{F}}}$ la classe degli A-moduli così definiti:

$$\mathcal{T}_{\hat{\mathfrak{F}}} = \{M \in \text{Mod-}A \colon \operatorname{Ann}_A(x) \in \hat{\mathfrak{F}} \text{ per ogni } x \in M\}\ .$$

$\mathcal{T}_{\hat{\mathfrak{F}}}$ è una classe ereditaria di torsione che coincide essenzialmente con la classe $\mathcal{T}$ degli R-moduli di torsione secondo Dickson.

$E \in \mathcal{T}$ ed inoltre E è $\hat{\mathfrak{F}}$-iniettivo.

Denotiamo con LTA la categoria degli A-moduli linearmente topologizzati e di Hausdorff su A dotato dalla topologia finita.

Un modulo discreto appartiene a LTA se e solo se esso è di torsione.

Se $M \in LTA$, un morfismo continuo di M in E è detto carattere di M.

Per ogni $M \in \mathcal{T}$, sia $\bar{M}$ il modulo $\operatorname{Hom}_A(M, E)$ dotato della topologia finita.

L'assegnazione $M \mapsto \bar{M}$ definisce una dualità δ tra la categoria degli A-moduli di torsione e quella degli A-moduli linearmente compatti e $\hat{\Omega}$-separati.

Per ogni $M \in LTA$, denotiamo con M^* il duale di M, cioè il modulo dei caratteri di M dotato della topologia della convergenza uniforme sui sottomoduli linearmente compatti e $\hat{\Omega}$-separati di M. Si trova che M^* separa sottomoduli chiusi e punti di M.

Il funtore Γ, dato dall'assegnazione $M \mapsto M^*$ per ogni $M \in LTA$, subordina una dualità tra i moduli discreti e i moduli linearmente compatti e $\hat{\Omega}$-separati, che coincide, a meno di una equivalenza, con il funtore δ.

Inoltre se $M \in LT\hat{R}_{\mathrm{m}}$, M^* coincide con il duale secondo Macdonald di M.

Per ogni $M \in LTA$, il morfismo canonico di M nel proprio biduale M^{**}, è un isomorfismo aperto in generale non continuo come si verifica in [MD].

Si ha, però, che il funtore Γ fornisce una autodualità della categoria degli A-moduli localmente linearmente compatti, la quale subordina una dualità Γ_0 tra una sottocategoria propria della categoria dei moduli linearmente discreti e la categoria degli A-moduli linearmente compatti (o equivalentemente degli R-moduli linearmente compatti).

Si osserva anche che Γ_0 coincide a meno di una equivalenza con la dualità Δ considerata in [O] e che δ è la restrizione del funtore Δ alla sottocategoria di Mod-A formata dai moduli di torsione.

1. – Sia R un anello noetheriano commutativo con unità e Ω l'insieme degli ideali massimali di R.

Com'è noto, una base di intorni di 0 nella topologia Ω-adica su R, è data dai prodotti finiti di ideali massimali.

Denotiamo con $\mathcal{F}$ l'insieme degli ideali aperti di R nella topologia Ω-adica.

Sia $R_{\mathfrak{m}}$ il localizzato di R in $\mathfrak{m}$ e dotiamo $R_{\mathfrak{m}}$ della topologia $\mathfrak{m}$-adica, dove con $\mathfrak{m}$ denotiamo l'ideale massimale di $R_{\mathfrak{m}}$.

Il completamento $\mathfrak{m}$-adico, $\hat{R}_{\mathfrak{m}}$, di $R_{\mathfrak{m}}$ è un anello locale noetheriano con ideale massimale $\hat{\mathfrak{m}} = \mathfrak{m}\hat{R}_{\mathfrak{m}}$ ad è dotato della topologia $\hat{\mathfrak{m}}$-adica.

Il completamento Ω-adico di R è dato da $A = \prod_{\mathfrak{m}\in\Omega} \hat{R}_{\mathfrak{m}}$ dotato della topologia prodotto delle topologie $\hat{\mathfrak{m}}$-adiche degli $\hat{R}_{\mathfrak{m}}$. ([B] Proposizione 17, pag. 64).

Sia $E = \bigoplus_{\mathfrak{m}\in\Omega} E_{\mathfrak{m}}$, dove $E_{\mathfrak{m}}$ è, per ogni $\mathfrak{m} \in \Omega$, l'R-inviluppo iniettivo di $R/\mathfrak{m}$.

Da $[M_1]$ deduciamo le seguenti proprietà di $E_{\mathfrak{m}}$.

(a) *$E_{\mathfrak{m}}$ è un modulo $\mathfrak{m}$-primario (cioè ogni $x \in E_{\mathfrak{m}}$ è annullato da una potenza di $\mathfrak{m}$) e coincide con l'$\hat{R}_{\mathfrak{m}}$-inviluppo iniettivo di $R_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{m}R_{\mathfrak{m}}$.* (Teor. 3.6).

(b) *Ogni R-endomorfismo di $E_{\mathfrak{m}}$ è un $\hat{R}_{\mathfrak{m}}$-endomorfismo e coincide con la moltiplicazione per un unico elemento di $\hat{R}_{\mathfrak{m}}$.* (*Teor.* 3.7).

Da (a) si deduce che E è in modo naturale un A-modulo, e inoltre, poichè se $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2$ sono elementi distinti di Ω, $\mathrm{Hom}_R(E_{\mathfrak{m}_1}, E_{\mathfrak{m}_2}) = 0$, si ottiene:

PROPOSIZIONE 1.1. *Ogni R-endomorfismo di E è un A-endomorfismo e coindice con la moltiplicazione per un unico elemento di A.*

DIMOSTRAZIONE.

$$\mathrm{Hom}_A(E, E) = \prod_{\mathfrak{m}\in\Omega} \mathrm{Hom}_A(E_{\mathfrak{m}}, E) = \prod_{\mathfrak{m}\in\Omega} \mathrm{Hom}_{\hat{R}_{\mathfrak{m}}}(E_{\mathfrak{m}}, E_{\mathfrak{m}}) = \prod_{\mathfrak{m}\in\Omega} \hat{R}_{\mathfrak{m}}. \qquad //$$

Dotiamo E della topologia discreta.

Considerando A come anello degli endomorfismi di E, dotiamo A della topologia indotta dalla topologia prodotto di E^E.

Una base di intorni di 0 in A, è data dagli annullatori di sottomoduli finitamente generati di E: pertanto la topologia sopra definita è detta topologia finita.

PROPOSIZIONE 1.2. *La topologia finita su A coincide con la topologia che compete ad A quale completamento Ω-adico di R, e cioè con la topologia prodotto delle topologie $\hat{\mathfrak{m}}$-adiche degli $\hat{R}_{\mathfrak{m}}$.*

DIMOSTRAZIONE. Poichè $A = \operatorname{Hom}_A\left(\bigoplus_{\mathfrak{m}} E_{\mathfrak{m}}, E\right) = \prod_{\mathfrak{m}\in\Omega} \operatorname{Hom}_A(E_{\mathfrak{m}}, E)$, la topologia finita su A coincide con la topologia prodotto delle topologie finite di $\operatorname{Hom}_A(E_{\mathfrak{m}}, E)$ ([MD] 2.5). Chiaramente $\operatorname{Hom}_A(E_{\mathfrak{m}}, E) = \hat{R}_{\mathfrak{m}}$; inoltre la topologia finita su $\hat{R}_{\mathfrak{m}}$ (pensato come anello degli endomorfismi di $E_{\mathfrak{m}}$) coincide con la topologia $\hat{\mathfrak{m}}$-adica. Infatti un ideale di I di $\hat{R}_{\mathfrak{m}}$ è annullatore di un sottomodulo finitamente generato di $E_{\mathfrak{m}}$ se e solo se $\hat{R}_{\mathfrak{m}}/I$ è artiniano ([M_1] Teor. 4.2., Coroll. 4.3.). Ora, poichè $\hat{R}_{\mathfrak{m}}$ è noetheriano e locale, $\hat{R}_{\mathfrak{m}}/I$ è artiniano se e solo se I contiene una potenza dell'ideale massimale $\hat{\mathfrak{m}}$. Quindi la topologia finita su A è la topologia prodotto delle topologie $\hat{\mathfrak{m}}$-adiche. //

Se $\hat{\mathcal{F}}$ è l'insieme degli ideali aperti nella topologia finita su A, si ha che un ideale J di A è in $\hat{\mathcal{F}}$ se e solo se J coincide con un ideale $\hat{I}$ dove I è un elemento di $\mathcal{F}$ e $\hat{I}$ denota la chisura di I in A, cioè $\hat{I} = IA$.

Denotiamo con $\mathcal{C}_{\hat{\mathcal{F}}}$ la classe di torsione su A associata a $\hat{\mathcal{F}}$. Diciamo cioè, che, se M è un A-modulo, $M \in \mathcal{C}_{\hat{\mathcal{F}}}$ se e solo se $\operatorname{Ann}_A(x) \in \hat{\mathcal{F}}$ per ogni $x \in M$.

Chiaramente $E \in \mathcal{C}_{\hat{\mathcal{F}}}$.

Dimostreremo che la categoria $\mathcal{C}_{\hat{\mathcal{F}}}$ coincide con la categoria $\mathcal{C}$ degli R-moduli così definiti:

$$M \in \mathcal{C} \quad \text{se e solo se per ogni } x \in M\,, \quad \operatorname{Ann}_R(x) \in \mathcal{F}\,.$$

Possiamo, innanzitutto, osservare che la classe $\mathcal{C}$ coincide con la classe dei moduli aventi « maximal orders » studiati da E. Matlis in [M_2], da cui deduciamo le seguenti proprietà:

P.1.1 [M_2] *Se M è un modulo $\mathfrak{m}$-primario, $M \in \mathcal{C}$ e M è un $\hat{R}_{\mathfrak{m}}$-modulo. Inoltre, ogni R-omomorfismo di moduli $\mathfrak{m}$-primari è un $\hat{R}_{\mathfrak{m}}$-omomorfismo.*

P.1.2. [M_2]. *Se $M \in \mathcal{C}$, M contiene un sottomodulo $\mathfrak{m}$-primario massimale, isomorfo al localizzato $M_{\mathfrak{m}}$ di M in $\mathfrak{m}$ e risulta $M = \bigoplus_{\mathfrak{m}\in\Omega} M_{\mathfrak{m}}$.*

P.1.3. *Ogni $M \in \mathcal{C}$ è in modo naturale un A-modulo e ogni R-omomorfismo tra moduli di torsione è un A-omomorfismo.*

DIMOSTRAZIONE. È una conseguenza di P.1.1., P.1.2. e del fatto che, se $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2$ sono elementi distinti di Ω e M, N sono rispettivamente $\mathfrak{m}_1$ ed $\mathfrak{m}_2$-primari, $\mathrm{Hom}_R(M, N) = 0$. //

OSSERVAZIONE 1.4. $\mathcal{C}$ è la sottocategoria di Mod-A costituita dai moduli che sono R-moduli di torsione secondo Dickson.

$\mathcal{C}$ è una sottocategoria localizzante di Mod-A, cioè è chiusa rispetto ai sottomoduli, alle somme dirette, alle immagini omomorfe e alle estensioni ([NA]).

P.1.5. *La categoria $\mathcal{C}_{\hat{\mathcal{F}}}$ è equivalente alla categoria $\mathcal{C}$.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $M \in \mathcal{C}$, per P.1.3., M risulta essere in modo naturale un A-modulo. Inoltre M, come A-modulo, appartiene a $\mathcal{C}_{\hat{\mathcal{F}}}$ poichè per ogni $x \in M$, $\mathrm{Ann}_A(x) \supseteq \widehat{\mathrm{Ann}_R(x)}$.

Viceversa, se un A-modulo $M \in \mathcal{C}_{\hat{\mathcal{F}}}$ e se $x \in M$, $\mathrm{Ann}_A(x) = \hat{I}$ con $I \in \mathcal{F}$, pertanto $\mathrm{Ann}_R(x) \supset I$ e quindi $M \in \mathcal{C}$. //

D'ora in poi identificheremo la categoria $\mathcal{C}_{\hat{\mathcal{F}}}$ con la categoria $\mathcal{C}$.

2. – Proprietà degli A-moduli.

Ogni modulo considerato è un modulo unitario.

Sia $\emptyset \neq \bar{\Omega}$ un sottoinsieme di Ω. Poniamo $A_{\bar{\Omega}} = \prod_{\mathfrak{m} \in \bar{\Omega}} \hat{R}_{\mathfrak{m}}$ e denotiamo con $I_{\bar{\Omega}}$ l'unità di $A_{\bar{\Omega}}$.

Ogni $A_{\bar{\Omega}}$-modulo è in modo naturale un A-modulo.

Per ogni $\mathfrak{m} \in \Omega$ denotiamo con $A'_{\mathfrak{m}}$ l'anello $A_{\Omega \setminus \mathfrak{m}} = \prod_{\substack{\mathfrak{n} \in \Omega \\ \mathfrak{n} \neq \mathfrak{m}}} \hat{R}_{\mathfrak{m}}$.

Se M è un A-modulo, poniamo per ogni $\bar{\Omega} \subset \Omega$, $M_{\bar{\Omega}} = MA_{\bar{\Omega}}$.

Sia $\Omega_1 \cup \Omega_2$ una partizione di Ω, risulta $A = A_{\Omega_1} \oplus A_{\Omega_2}$, inoltre:

LEMMA 2.1. *Per ogni $M \in$ Mod-A, si ha $M = M_{\Omega_1} \oplus M_{\Omega_2}$ e se N_1, N_2 sono rispettivamente A_{Ω_1} e A_{Ω_2}-moduli si ha:*

$$\mathrm{Hom}_A(N_1, N_2) = \mathrm{Hom}_A(N_2, N_1) = 0 .$$

DIMOSTRAZIONE. Ovvia. //

LEMMA 2.2. *Se $M_{\mathfrak{m}}$ ed $N_{\mathfrak{m}}$ sono $\hat{R}_{\mathfrak{m}}$-moduli si ha:*

$$\prod_{\mathfrak{m}\in\Omega}\mathrm{Hom}_{\hat{R}_{\mathfrak{m}}}(M_{\mathfrak{m}}, N_{\mathfrak{m}}) \simeq \mathrm{Hom}_A\Big(\bigoplus_{\mathfrak{m}} M_{\mathfrak{m}}, \bigoplus N_{\mathfrak{m}}\Big) \simeq$$

$$\simeq \mathrm{Hom}_A\Big(\bigoplus_{\mathfrak{m}} M_{\mathfrak{m}}, \prod_{\mathfrak{m}} N_{\mathfrak{m}}\Big) \simeq \mathrm{Hom}_A\Big(\prod_{\mathfrak{m}} M_{\mathfrak{m}}, \prod_{\mathfrak{m}} N_{\mathfrak{m}}\Big);$$

$$\mathrm{Hom}_A\Big(\prod_{\mathfrak{m}} M_{\mathfrak{m}}, \bigoplus_{\mathfrak{m}} N_{\mathfrak{m}}\Big) \simeq \bigoplus_{\mathfrak{m}} \mathrm{Hom}_{\hat{R}_{\mathfrak{m}}}(M_{\mathfrak{m}}, N_{\mathfrak{m}})\,.$$

DIMOSTRAZIONE. Le prime tre uguaglianze sono conseguenze del Lemma 2.1. Per l'ultima uguaglianza osserviamo che un elemento f di $\mathrm{Hom}_A\Big(\prod_{\mathfrak{m}} M_{\mathfrak{m}}, \bigoplus_{\mathfrak{m}} N_{\mathfrak{m}}\Big)$ è pensabile come un A-omomorfismo di $\prod_{\mathfrak{m}} M_{\mathfrak{m}}$, in $\prod_{\mathfrak{m}} N_{\mathfrak{m}}$ ed è quindi scrivibile come $(f_{\mathfrak{m}})_{\mathfrak{m}\in\Omega}$ con $f_{\mathfrak{m}} \in \mathrm{Hom}_{\hat{R}_{\mathfrak{m}}}(M_{\mathfrak{m}}, N_{\mathfrak{m}})$. Poichè $\mathrm{Im}(f)\subseteq\bigoplus_{\mathfrak{m}} N_{\mathfrak{m}}$ si deduce facilmente che gli $f_{\mathfrak{m}}$ sono quasi tutti nulli. //

Osserviamo che per ogni $M\in\mathrm{Mod}\text{-}A$, $M_{\mathfrak{m}} = \hat{R}_{\mathfrak{m}} M = 1_{\mathfrak{m}} M$ è un $\hat{R}_{\mathfrak{m}}$-modulo e $M \supseteq \bigoplus_{\mathfrak{m}} M_{\mathfrak{m}}$.

LEMMA 2.3. *Sia $M = \prod_{\mathfrak{m}} M_{\mathfrak{m}}$ con $M_{\mathfrak{m}}\in\mathrm{Mod}\text{-}\hat{R}_{\mathfrak{m}}$.*

Il sottomodulo di torsione di M è dato da $\bigoplus_{\mathfrak{m}} t(M_{\mathfrak{m}})$ dove $t(M_{\mathfrak{m}})$ è il sottomodulo di torsione di $M_{\mathfrak{m}}$.

DIMOSTRAZIONE. Chiaramente $\bigoplus_{\mathfrak{m}} t(M_{\mathfrak{m}}) \subseteq t(M)$ (Oss. 1.4.).

Sia $0 \neq x = (x_{\mathfrak{m}})_{\mathfrak{m}\in\Omega} \in t(M)$. $\mathrm{Ann}_R(x) \in \mathcal{F}$, cioè esistono k ideali massimali e k interi positivi tali che: $\mathrm{Ann}_R(x) \supset \mathfrak{m}_1^{n_1} \dots \mathfrak{m}_k^{n_k} = I$. Se $\mathfrak{m} \notin \{\mathfrak{m}_1, \dots, \mathfrak{m}_k\}$, poichè $I \not\subset \mathfrak{m}$, esiste un elemento $r\in I\setminus\mathfrak{m}$. Ora $0 = rx = (rx_{\mathfrak{m}})_{\mathfrak{m}\in\Omega}$, quindi $rx_{\mathfrak{m}} = 0$. Poichè $M_{\mathfrak{m}}$ è un $R_{\mathfrak{m}}$-modulo e $r\notin\mathfrak{m}$, si ha $x_{\mathfrak{m}} = 0$. Pertanto $x \in \bigoplus_{\mathfrak{m}} M_{\mathfrak{m}}$.

Verifichiamo ora che $x_{\mathfrak{m}_i} \in t(M_{\mathfrak{m}_i})$ per ogni $i = 1, \dots, k$.

Sia $I_1 = \mathfrak{m}_2^{n_2} \dots \mathfrak{m}_k^{n_k}$; si ha: $I_1 \mathfrak{m}_1^{n_1} = I$ e $I_1 \not\subset \mathfrak{m}_1$.

Sia s un elemento di $I_1\setminus\mathfrak{m}_1$; per ogni $u\in\mathfrak{m}_1^{n_1}$ si ha $usx = 0$, poichè $us\in I$. Quindi $usx_{\mathfrak{m}_1} = 0$ e anche $ux_{\mathfrak{m}_1} = 0$, poichè $s\notin\mathfrak{m}_1$.

Pertanto $\mathfrak{m}_1^{n_1} \subseteq \mathrm{Ann}_R(x_{\mathfrak{m}_1})$. Chiaramente il ragionamento svolto si può ripetere per ogni $i = 2, \dots, k$ e quindi $x \in \bigoplus_{\mathfrak{m}} t(M_{\mathfrak{m}})$. //

DEFINIZIONE 2.4. Se $\mathcal{G}$ è una famiglia di ideali di un anello R e N è un R-modulo, N si dice $\mathcal{G}$-iniettivo se per ogni $I\in\mathcal{G}$, ogni R-omomorfismo di I in N si estende ad un R-omomorfismo di R in N.

PROPOSIZIONE 2.5. *$E = \bigoplus_{\mathfrak{m}} E_{\mathfrak{m}}$ è un A-$\hat{\mathfrak{F}}$-modulo iniettivo.*

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo il diagramma:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & I \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"] & A \\ & E \arrow[d, "j"] & \\ & \bar{E} & \end{tikzcd}$$

con $I \in \hat{\mathfrak{F}}$, $\bar{E} = \prod_{\mathfrak{m}} E_{\mathfrak{m}}$, i e j inclusioni .

$E_{\mathfrak{m}}$ è un $\hat{R}_{\mathfrak{m}}$-modulo iniettivo e anche, come si verifica facilmente sfruttando il Lemma 2.1, un modulo A-iniettivo; quindi $\bar{E}$ è A-iniettivo.

L'omomorfismo $j \circ f$ si estende pertanto ad un A-omomorfismo $\bar{f}$ di A in $\bar{E}$. Consideriamo ora il diagramma:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & I \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"] & A \arrow[r] \arrow[d, "\bar{f}"] & A/I \arrow[r] \arrow[d, dashed, "g"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & E \arrow[r, "j"] & \bar{E} \arrow[r] & \bar{E}/E \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Poichè le righe sono esatte, esiste un unico A-omomorfismo g tale che $g(x + N) = \bar{f}(x) + E$.

Per il Lemma 2.3, e per il fatto che $E_{\mathfrak{m}}$ è $\mathfrak{m}$-primario, si ha che $\bar{E}/E$ è senza torsione, quindi, poichè $A/I \in \mathfrak{C}$, g è l'omomorfismo nullo. Pertanto $\bar{f}(M) \subset E$ e $\bar{f}$ è l'estensione cercata di f. //

La Proposizione 2.5 è equivalente alla seguente:

PROPOSIZIONE 2.5′. *Se $M \in$ Mod-A e N è un sotto A-modulo di M, tale che $M/N \in \mathfrak{C}$, ogni omomorfismo f di N in E si estende ad un omomorfismo $\bar{f}$ di M in E.*

DIMOSTRAZIONE. Cfr. [S] Prop. 6.2. //

PROPOSIZIONE 2.6. *Per ogni $M \in \mathfrak{C}$, $\mathrm{Hom}_A(M, E)$ separa i punti di M.*

DIMOSTRAZIONE. Poichè E è un cogeneratore iniettivo di Mod-R, esiste un elemento $f \in \mathrm{Hom}_R(M, E)$ tale che $f(x) \neq 0$.

Per P.1.3., $f \in \mathrm{Hom}_A(M, E)$. //

3. – Moduli linearmente discreti e moduli linearmente compatti.

DEFINIZIONE 3.1. Denotiamo con LTA la categoria degli A-moduli linearmente topologizzati e di Hausdorff su A dotato della topologia finita.

OSSERVAZIONE 3.2. Un modulo discreto appartiene alla categoria LTA se e solo se è di torsione.

DEFINIZIONE 3.3. Diciamo che un A-modulo M appartenente a LTA è linearmente discreto se ogni sottomodulo a residuo di torsione è aperto e denotiamo con $\mathfrak{LD}A$ la categoria degli A-moduli linearmente *discreti*.

Su ogni $M \in \text{Mod-}A$, si può considerare la topologia avente come base di intorni di 0 la famiglia dei sottomoduli di M a residuo di torsione. Tale topologia sarà detta topologia torsionale e sarà denotata con $\tau(M)$.

Ovviamente per ogni $M \in \text{Mod-}A$, $(M, \tau(M))$ è un A-modulo linearmente topologizzato su A dotato della topologia finita. Si ha inoltre:

PROPOSIZIONE 3.4. *Per ogni* $M \in \text{Mod-}A$ *le seguenti affermazioni sono equivalenti*:

(*a*) *M è di Hausdorff nella topologia torsionale.*

(*b*) $\text{Hom}_A(M, E)$ *separa i punti di* M.

DIMOSTRAZIONE. (*a*) $\Rightarrow$ (*b*). Sia φ_N l'omomorfismo canonico di M in M/N per ogni sottomodulo aperto N e sia φ l'applicazione diagonale delle φ_N.

Per (*a*) φ è un omomorfismo iniettivo di M in $\prod_N M/N$. Ora, poichè per la Prop. 2.6. $\text{Hom}_A(M/N, E)$ separa i punti di M, si ottiene facilmente che $\text{Hom}_A(M, E)$ separa i punti di M.

(*b*) $\Rightarrow$ (*a*). Per ogni $0 \neq x \in M$ sia f_x un elemento di $\text{Hom}_A(M, E)$ tale che $f_x(x) \neq 0$. Allora $\bigcap_N N \subset \bigcap_{x \in M} \text{Ker} f_x = 0$. //

Denotiamo con $\mathfrak{D}(E)$ la categoria degli A-moduli che soddisfano la condizione (*b*) della Prop. 3.4.

$\mathfrak{D}(E)$ contiene, per ogni $\mathfrak{m} \in \Omega$, la categoria $\text{Mod-}\hat{R}_{\mathfrak{m}}$, poichè $E_{\mathfrak{m}}$ è un cogeneratore iniettivo di $\text{Mod-}\hat{R}_{\mathfrak{m}}$.

$\mathfrak{D}(E)$ contiene inoltre la categoria, che denotiamo con $\mathfrak{D}_0(E)$ dei moduli del tipo $\bigoplus_{\mathfrak{m}} M_{\mathfrak{m}}$, con $M_{\mathfrak{m}} \in \text{Mod-}\hat{R}_{\mathfrak{m}}$ e quindi anche la categoria $\mathfrak{T}$ dei moduli di torsione (P.1.2).

Indichiamo con Σ il funtore che ad ogni modulo di $\mathfrak{D}(E)$ associa il modulo stesso dotato della topologia torsionale. Si ha:

PROPOSIZIONE 3.5. *Σ è una equivalenza tra la categoria $\mathfrak{D}(E)$ e la categoria $\mathfrak{LD}A$ che subordina le seguenti equivalenze:*

(*a*) *Σ_{m} tra la categoria* Mod-$\hat{R}_{\mathrm{m}}$ *e la categoria $\mathfrak{LD}\hat{R}_{\mathrm{m}}$ degli $\hat{R}_{\mathrm{m}}$-moduli linearmente discreti.*

(*b*) *$\Sigma_{\mathfrak{G}}$ tra la categoria $\mathfrak{G}$ e la sottocategoria di $\mathfrak{LD}A$ costituita dai moduli discreti.*

DIMOSTRAZIONE. Se $M \in \mathfrak{D}(E)$, chiaramente $\Sigma(M) \in \mathfrak{LD}A$ e inoltre un A-modulo linearmente discreto è dotato della topologia torsionale ed è di Hausdorff in tale topologia. Le altre affermazioni sono ovvie. //

Denoteremo con $\mathfrak{D}(\tau)$, $\mathfrak{D}_0(\tau)$, $\mathfrak{G}(\tau)$ rispettivamente $\Sigma(\mathfrak{D})$, $\Sigma(\mathfrak{D}_0)$ e $\Sigma(\mathfrak{G})$.

LEMMA 3.6. *Sia M un A-modulo dotato della topologia torsionale e $M_{\mathrm{m}} = 1_{\mathrm{m}} M$. La topologia relativa di M_{m} coincide con la topologia torsionale $\tau(M_{\mathrm{m}})$.*

DIMOSTRAZIONE. Ovviamente la topologia indotta è meno fine della topologia torsionale $\tau(M_{\mathrm{m}})$.

Sia ora L un sottomodulo di M_{m} a residuo di torsione. Poichè, per il Lemma 2.1. $M = M_{\mathrm{m}} \oplus M'_{\mathrm{m}} (M'_{\mathrm{m}} = MA'_{\mathrm{m}})$, si ha che $M'_{\mathrm{m}} \oplus L$ è un sottomodulo aperto di M e inoltre $(M'_{\mathrm{m}} \oplus L) \cap M_{\mathrm{m}} = L$. //

LEMMA 3.7. *Siano M, N A-moduli linearmente topologizzati e sia $f\colon M \to N$ un A-omomorfismo. Si ha:*

(*a*) *Se M ha la topologia torsionale, f è continuo.*

(*b*) *Se N ha la topologia torsionale e f è suriettivo, f è aperto.*

DIMOSTRAZIONE. Cfr. [MD] 6.8. //

Richiamiamo ora la nozione di modulo linearmente compatto. Se B è un anello linearmente topologizzato, un modulo $M \in LTB$ è linearmente compatto se ogni famiglia di varietà lineari chiuse con la proprietà della intersezione finita, ha intersezione non vuota.

Osserviamo che la categoria degli R-moduli linearmente compatti, coincide con la categoria degli A-moduli linearmente compatti, poichè un R-modulo M linearmente compatto, essendo completo, è un

A-modulo e tali sono i sotto R-moduli di un A-modulo linearmente compatto.

Denotiamo con $\mathcal{C}_0$ la categoria degli A-moduli linearmente compatti.

Deduciamo da [O] le seguenti proprietà della categoria $\mathcal{C}_0$.

P.3.1. *Un A-modulo M è linearmente compatto nella topologia discreta se e solo se è artiniano.*

P.3.2. *$M \in \mathcal{C}_0$ se e solo se M è il prodotto topologico dei sottomoduli $M_{\mathfrak{m}}$ per ogni $\mathfrak{m} \in \Omega$.*

DEFINIZIONE 3.8. Diciamo che un A-modulo M è $\hat{\Omega}$-separato, se M è di Hausdorff nella topologia $\hat{\Omega}$-adica, cioè nella topologia avente come base di intorni di O i sottomoduli del tipo IM con $I \in \hat{\mathcal{F}}$.

P.3.3. *$M \in \mathcal{C}_0$ è $\hat{\Omega}$-separato se e solo se $M_{\mathfrak{m}}$ è $\hat{\mathfrak{m}}$-separato (cioè di Hausdorff nella topologia $\hat{\mathfrak{m}}$-adica) per ogni $\mathfrak{m} \in \Omega$.*

DIMOSTRAZIONE. Per P.3.2, $M = \prod_{\mathfrak{m} \in \Omega} M_{\mathfrak{m}}$, quindi la topologia $\hat{\Omega}$-adica su M è la topologia prodotto delle topologie $\hat{\mathfrak{m}}$-adiche sugli $M_{\mathfrak{m}}$. //

P.3.4. *A^n è linearmente compatto e $\hat{\Omega}$-separato per ogni $n \in \mathbb{N}$.*

DIMOSTRAZIONE. $\hat{R}^n$ è linearmente compatto e $\hat{\mathfrak{m}}$-separato ([MD) § 7) e A^n è il prodotto topologico $\prod_{\mathfrak{m}} \hat{R}^n_{\mathfrak{m}}$. //

P.3.5. *Siano $M, N \in LTA$ e f un epimorfismo continuo di M su N. Se $M \in \mathcal{C}_0$ ed è $\hat{\Omega}$-separato, tale è N.*

DIMOSTRAZIONE. Ovviamente $N \in \mathcal{C}_0$. Inoltre: $\bigcap_{\substack{\mathfrak{m} \in \Omega \\ k \in N}} \hat{\mathfrak{m}}^k N = \bigcap_{\substack{\mathfrak{m} \in \Omega \\ k \in N}} f(\hat{\mathfrak{m}}^k M)$.

Osserviamo ora che, per ogni $\mathfrak{m} \in \Omega$ e per ogni $k \in N$, $\hat{\mathfrak{m}}^k M$ è chiuso in M, poichè $\hat{\mathfrak{m}}^k$ è un ideale finitamente generato di A e per la Prop. 3.14 di [MD].

Ora, per [MD] 3.12, risulta $\cap f(\hat{\mathfrak{m}}^k M) = f(\cap \hat{\mathfrak{m}}^k M)$, d'onde l'asserto. //

P.3.6. *Sia $M \in LTA$, M finitamente generato. Allora $M \in \mathcal{C}_0$ ed è $\hat{\Omega}$-separato.*

DIMOSTRAZIONE. Segue dalle P.3.4. e P.3.5. //

4. – Duali dei moduli linearmente compatti e linearmente discreti.

Estendiamo ora ad A la teoria della dualità di Macdonald.

Per ogni $M \in \mathcal{C}$ denotiamo con $\bar{M}$ l'A-modulo $\mathrm{Hom}_A(M, E)$ dotato della topologia finita e con δ il funtore dato dall'assegnazione $M \mapsto \bar{M}$ per ogni $M \in \mathcal{C}$.

PROPOSIZIONE 4.3. *Per ogni $M \in \mathcal{C}$, $\bar{M}$ è un A-modulo linearmente compatto e $\hat{\Omega}$-separato.*

DIMOSTRAZIONE. Per la P.1.2. risulta $M = \bigoplus_{\mathfrak{m}} M_{\mathfrak{m}}$ con $M_{\mathfrak{m}}$ moduli $\mathfrak{m}$-primari, quindi $\bar{M} = \prod_{\mathfrak{m}} \mathrm{Hom}_{\hat{R}_{\mathfrak{m}}}(M_{\mathfrak{m}}, E_{\mathfrak{m}})$ (Lemma 2.2) e inoltre per [MD] 2.5, $\bar{M}$ è dotato della topologia prodotto delle topologie finite e degli $\hat{R}_{\mathfrak{m}}$-moduli $\mathrm{Hom}_{\hat{R}_{\mathfrak{m}}}(M_{\mathfrak{m}}, E_{\mathfrak{m}}) = H_{\mathfrak{m}}$.

Ora $H_{\mathfrak{m}}$ coincide con il duale secondo Macdonald dell'$\hat{R}_{\mathfrak{m}}$-modulo discreto $M_{\mathfrak{m}}$ ([MD] 8.6). Quindi $H_{\mathfrak{m}}$ è un $\hat{R}$-$_{\mathfrak{m}}$modulo linearmente compatto e $\hat{\mathfrak{m}}$-separato ([MD] 9.4), pertanto, per P.3.3, $\bar{M}$ è linearmente compatto e $\hat{\Omega}$-separato. //

Per ogni $M \in LTA$ definiamo il duale $M^* = C\,\mathrm{Hom}_A(M, E)$ dotato della topologia della convergenza uniforme sui sottomoduli linearmente compatti e $\hat{\Omega}$-separati di M.

Se $M \in LTA$ e N è un sottomodulo di M, denotiamo con $N^{\perp}$ l'ortogonale di N in M^*, cioè $N^{\perp} = \{\xi \in M^*: \xi(N) = 0\}$.

Allora una base di intorni di O in M^* è data dai sottomoduli del tipo $N^{\perp}$ con N sottomodulo linearmente compatto e $\hat{\Omega}$-separato di M.

Osserviamo che, se $M \in LT\hat{R}_{\mathfrak{m}}$, il duale M^* sopra definito, coincide con il duale secondo Macdonald di M.

PROPOSIZIONE 4.2. *Per ogni $M \in LTA$, $M^* \in LTA$.*

DIMOSTRAZIONE. Se $\xi \in M^*$ e N è un sottomodulo linearmente compatto e $\hat{\Omega}$-separato di M, $\mathrm{Ker}\,\xi \cap N = V$ è aperto nella topologia relativa di N. Pertanto N/V, quale modulo discreto e linearmente compatto, è di torsione e artiniano (P.3.1), cioè $N/V = \bigoplus_{i \in F} C_{\mathfrak{m}_i}$ con $C_{\mathfrak{m}_i}$ $\hat{R}_{\mathfrak{m}_i}$-moduli artiniani e con F insieme finito di indici.

Esistono allora degli interi k_i tali che $\left(\prod_{i \in F} \hat{\mathfrak{m}}_i^{k_i}\right)(N/V) = 0$.

Ora, $I = \left(\prod_{i \in F} \hat{\mathfrak{m}}_i^{k_i}\right) \in \hat{\mathcal{F}}$ e da $IN \subset V$, si deduce che $I\xi \in N^{\perp}$.

Pertanto M^* è linearmente topologizzato su A dotato della topologia finita.

Inoltre, poichè per P.3.6, la topologia di M^* è più fine della topologia finita, si conclude che M^* è di Hausdorff. //

Richiamiamo alcune nozioni riguardanti la teoria della dualità esposta in [O].

Per ogni $M \in \mathfrak{D}(E)$, in [O] è definito il duale $\bar{M} = \mathrm{Hom}_A(M, E)$ dotato della topologia finita.

Se Δ è il funtore dato dall'assegnazione $M \mapsto \bar{M}$ per ogni $M \in \mathfrak{D}(E)$, $\Delta(\mathfrak{D}(E))$ è una sottocategoria piena di LTA che contiene la categoria degli A-moduli linearmente compatti.

Per ogni $M \in \Delta(\mathfrak{D}(E))$, $\bar{M}$ denota il modulo dei caratteri di M. Δ è una dualità alla Pontryagin, nel senso che per ogni $M \in \mathfrak{D}$, M è isomorfo a $\bar{\bar{M}}$, e se $M \in \Delta(\mathfrak{D}(E))$, $\bar{\bar{M}}$ è isomorfo topologicamente a M. Osserviamo che il funtore δ è la restrizione a $\mathfrak{C}$ del funtore Δ.

TEOREMA 4.3. *Se $M \in \mathfrak{D}_0(\tau)$, M^* ha la topologia finita e $M^* \in \mathfrak{C}_0$.*

DIMOSTRAZIONE. Poichè $M \in \mathfrak{LD}A$, si ha:

(a) $1_{\mathfrak{m}} M = M_{\mathfrak{m}}$, con la topologia relativa, è linearmente discreto (Lemma 3.6) e quindi per [MD] 6.2, è semidiscreto (cioè tale che ogni sottomodulo è chiuso).

(b) Se $N_{\mathfrak{m}}$ è un sotto $\hat{R}_{\mathfrak{m}}$-modulo di M linearmente compatto e $\hat{\mathfrak{m}}$-separato nella topologia relativa, $N_{\mathfrak{m}}$ è finitamente generato.

Infatti, $N_{\mathfrak{m}}$ è un sottomodulo di $M_{\mathfrak{m}}$ ed è pertanto semidiscreto. Basta, allora applicare [MD] 7.3.

Se N è un sottomodulo linearmente compatto e $\hat{\Omega}$-separato di M, per P.3.2 e P.3.3, N è il prodotto topologico $\prod_{\mathfrak{m}} N_{\mathfrak{m}}$ con gli $N_{\mathfrak{m}} \hat{R}_{\mathfrak{m}}$-moduli linearmente compatti e $\hat{\mathfrak{m}}$-separati nella toplogia relativa. Poichè $M \in \mathfrak{D}_0$, N deve coincidere anche con $\bigoplus_{\mathfrak{m}} N_{\mathfrak{m}}$; allora gli $N_{\mathfrak{m}}$ sono quasi tutti nulli, quindi per (b), N è finitamente generato. Viceversa, ogni sottomodulo finitamente generato di M è linearmente compatto e $\hat{\Omega}$-separato. Quindi M^* ha la topologia finita.

Dimostriamo ora che $M^* \in \mathfrak{C}_0$.

Poichè $M = \bigoplus_{\mathfrak{m}} M_{\mathfrak{m}}$ e M è linearmente discreto, M^* è isomorfo algebricamente a $\prod_{\mathfrak{m}} \mathrm{Hom}_{\hat{R}_{\mathfrak{m}}}(M_{\mathfrak{m}}, E_{\mathfrak{m}})$. (Lemmi 2.2 e 3.7).

Inoltre, per la prima parte del Teorema, M^* ha la topologia finita, cioè la topologia prodotto delle topologie finite degli $\hat{R}_{\mathfrak{m}}$-moduli $\mathrm{Hom}_{\hat{R}_{\mathfrak{m}}}(N_{\mathfrak{m}}, E_{\mathfrak{m}}) = H_{\mathfrak{m}}$. ([MD] 2.5).

Per (*a*) e per [MD] 8.6., $H_{\mathfrak{m}}$ con la topologia finita, è il duale secondo Macdonald di $M_{\mathfrak{m}}$ ed è pertanto linearmente compatto ([MD] 9.3). Quindi $M^* \in \mathcal{C}_0$. //

COROLLARIO 4.3. *Per ogni* $M \in \mathcal{D}_0$ *si ha*: $\bar{M} = (\Sigma(M))^*$.

TEOREMA 4.4. *Se* $M \in \mathcal{C}_0$, $M^* \in \mathcal{D}_0(\tau)$.

DIMOSTRAZIONE. M è il prodotto topologico $\prod_{\mathfrak{m}} M_{\mathfrak{m}}$ con $M_{\mathfrak{m}}$ $\hat{R}_{\mathfrak{m}}$-moduli linearmente compatti.

Allora M^* è isomorfo algebricamente a $\bigoplus_{\mathfrak{m}} M^*_{\mathfrak{m}}$. ([O] Prop. 2 2).

Se V è un sottomodulo di M^*, tale che $M^*/V \in \mathcal{T}$, si ha ovviamente $V = \bigoplus_{\mathfrak{m}} V_{\mathfrak{m}}$ e $M^*_{\mathfrak{m}}/V_{\mathfrak{m}}$ è di torsione per ogni $\mathfrak{m} \in \Omega$.

Per [MD] 9.13, $M^*_{\mathfrak{m}}$ è linearmente discreto, quindi $V_{\mathfrak{m}}$ contiene l'ortogonale di un sottomodulo linearmente compatto e $\hat{\mathfrak{m}}$-separato $N_{\mathfrak{m}}$ di $M_{\mathfrak{m}}$. Allora $\prod_{\mathfrak{m}} N_{\mathfrak{m}} = N$ è un sottomodulo linearmente compatto e $\hat{\Omega}$-separato di M tale che $N^{\perp} = \bigoplus_{\mathfrak{m}} N^{\perp}_{\mathfrak{m}} \subseteq V$.

Pertanto, poichè per la Pr. 4.2, la topologia di M^* è meno fine della topologia torsionale, si ha che M^* è linearmente discreto. //

COROLLARIO 4.4. *Se* $M \in \mathcal{C}_0$, $\Sigma(\bar{M}) = M^*$.

TEOREMA 4.5. *Se* $M \in LTA$ *è discreto*, $M^* \in \mathcal{C}_0$ *ed è* $\hat{\Omega}$*-separato. Se* $M \in \mathcal{C}_0$ *ed è* $\hat{\Omega}$*-separato*, M^* *è discreto.*

DIMOSTRAZIONE. Se M è discreto, M è di torsione e linearmente discreto, quindi $M^* = \mathrm{Hom}_A(M, E)$ e per il Teorema 4.3, M^* è dotato della topologia finita.

Allora si ha: $M^* = \delta(M)$ e per la Prop. 4.1, $M^* \in \mathcal{C}_0$ ed è $\hat{\Omega}$-separato. Se M è linearmente compatto e $\hat{\Omega}$-separato, $M^{\perp} = 0$ è aperto in M^*. //

5. - Dualità.

Denotiamo con Γ il funtore dato dall'assegnazione $M \mapsto M^*$ per ogni $M \in LTA$.

PROPOSIZIONE 5.1. *Per ogni* $M \in LTA$, M^* *separa i punti di* M.

DIMOSTRAZIONE. Sia $0 \neq x \in M$ e sia V un sottomodulo aperto di M sia tale che $x \notin V$. M/V, quale modulo discreto, è di torsione. Per la Prop. 2.6, esiste un $\bar{f} \in \mathrm{Hom}_A(M/V, E)$ tale che $\bar{f}(x+V) \neq 0$. Allora, se π è l'omomorfismo canonico di M in M/V, $g = \bar{f}\circ\pi$ è un carattere di M tale che $g(x) \neq 0$ $(\mathrm{Ker}\, g \supseteq V)$. //

PROPOSIZIONE 5.2. *Sia $M \in LTA$, N un sottomodulo di M. Ogni carattere f di N si estende ad un carattere g di M.*

Se N è chiuso in M e $c \in M \setminus N$, g si può scegliere in modo tale che $g(c) \neq 0$.

DIMOSTRAZIONE. Sia f un carattere di N e V un sottomodulo aperto di M tale che $\mathrm{Ker}\, f \supseteq V \cap N$. f induce un omomorfismo $f'\colon N/V \cap N \to E$.

Sia ora j l'isomorfismo algebrico di $N + V/V$ in $N/N \cap V$ e sia $\bar{f} = f'\circ j$. $\bar{f}$ è un omomorfismo di $N+V/V$ in E. $M/V + N$ è un A-modulo discreto, quin di ditorsione, pertanto $\bar{f}$ è estendibile ad un omomorfismo $\bar{g}$ di M/V in E (Prop. 2.5').

Se π è l'omomorfismo canonico di M in M/V, $\bar{g}\circ\pi = g$ è un carattere di M $(\mathrm{Ker}\, g \supset V)$ che estende f.

La situazione è illustrata dal seguente diagramma:

$$\begin{tikzcd}
N \arrow[rr] \arrow[drrr, "f"'] & & N/V \cap N \arrow[rr, leftrightarrow, "j"] \arrow[dr, "f'"] & & N+V/V \arrow[rr] \arrow[dl, "\bar{f}"'] & & M/V \arrow[dlll, "\bar{g}"] \\
& & & E & & &
\end{tikzcd}$$

Sia ora $g(c) = 0$ e sia σ l'omomorfismo canonico di M in M/N. Poichè N è chiuso in M, $M/N \in LTA$ e quindi, per la Prop. 5.1, esiste $\bar{h}$ di M/N tale che $\bar{h}(c + N) \neq 0$. Allora, se $h = \bar{h}\circ\sigma$, $h + g$ è un carattere di M tale che $(h + g)(c) \neq 0$. //

LEMMA 5.3. *Siano M, N appartenenti a LTA e sia f un A-omomorfismo continuo di M in N. f^*, trasposto di f, definito ponendo per ogni $\xi \in N^*$, $f^*(\xi) = \xi \circ f$ è un A-omomorfismo continuo di N^* in M^*. Inoltre se f è suriettivo, f^* è iniettivo; se f è iniettivo e aperto sull'immagine, f^* è suriettivo.*

DIMOSTRAZIONE. Per ogni sottomodulo C linearmente compatto e $\hat{\Omega}$-separato di M, $(f^*)^{-1}(C^\perp) = f(C)^\perp$ dove, per P.3.5., $f(C) \in \mathrm{C}_0$ ed è $\hat{\Omega}$-separato. Quindi f^* è continuo.

Se f è suriettivo, ovviamente f^* è iniettivo; se f è iniettivo e aperto sull'immagine, M è identificabile con un sottomodulo topologico di N e quindi, per la Prop. 5.2, f^* è suriettivo. //

LEMMA 5.4. *Sia $M \in LTA$ e N un sottomodulo chiuso di M. Si ha:*

(*a*) *Esiste un isomorfismo continuo di $(M/N)^*$ su $N^\perp$.*

(*b*) *Esiste un isomorfismo continuo di M^*/N su N^*.*

Se $N \in \mathcal{C}_0$, l'isomorfismo è *topologico.*

DIMOSTRAZIONE. (*a*) Dalla sequenza esatta $M \xrightarrow{\pi} M/N \to 0$, si ottiene, per il Lemma 5.3, la sequenza esatta $O \to (M/N)^* \xrightarrow{\pi^*} M^*$ con π^* continuo e $\operatorname{Im}\pi^* = N^\perp$.

(*b*) Dalla sequenza esatta $0 \to N \xrightarrow{i} M$ si ottiene, per il Lemma 5.4, $M^* \xrightarrow{i^*} N^* \to 0$ con i^* continuo e $\operatorname{Ker} i^* = N^\perp$.

Se $N \in \mathcal{C}_0$, N^* è linearmente discreto (Teor. 4.4), quindi i^* è aperto per il Lemma 3.7. //

Sia $M \in LTA$, per ogni $x \in M$ sia $\tilde{x}$ l'elemento di $\operatorname{Hom}_A(M^*, E)$ definito ponendo: $\tilde{x}(\xi) = \xi(x)$ per ogni $\xi \in M^*$.

$\tilde{x}$ è un elemento di M^{**}, infatti $\operatorname{Ker}\tilde{x} = (x)^\perp$ che per P.3.6 è aperto in M^*.

Sia ora ω_M l'omomorfismo di M in M^{**} definito ponendo $\omega_M(x) = \tilde{x}$, per ogni $x \in M$.

Per ogni $M \in LTA$, ω_M è un omomorfismo iniettivo (Prop. 5.1).

PROPOSIZIONE 5.5. *Se $M \in \mathcal{C}_0$, ω_M è un isomorfismo topologico.*

DIMOSTRAZIONE. Per il Teor. e il Coroll. 4.4, si ha che $M^* = \Sigma(\overline{M})$ con $\overline{M} \in \mathfrak{D}_0$: Per il Teor. 4.3 si ha allora $\overline{\overline{M}} = (\Sigma(\overline{M}))^* = M^{**}$.

Quindi M^{**} coincide con $\overline{\overline{M}}$.

Da [O] si ricava che, per ogni $M \in \mathcal{C}_0$, $\overline{\overline{M}}$ è isomorfo topologicamente a M e l'isomorfismo è dato dall'omomorfismo canonico ω_M. //

PROPOSIZIONE 5.6. *Per ogni $M \in LTA$, ω_M è un isomorfismo algebrico.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $\alpha \in M^{**}$. $\operatorname{Ker}\alpha$ è aperto in M^*, quindi esiste un sottomodulo linearmente compatto e $\hat{\Omega}$-separato N di M tale che $\operatorname{Ker}\alpha \supseteq N^\perp$. α induce un carattere $\bar{\alpha}$ di $M^*/N^\perp$ tale che, se π è l'omomorfismo canonico di M^* in $M^*/N^\perp$, $\bar{\alpha}\circ\pi = \alpha$.

Per il Lemma 5.4 (*b*) vi è un isomorfismo topologico j di $M^*/N^\perp$

su N^*. Consideriamo il diagramma commutativo:

$$\begin{tikzcd}
M^* \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, dashed, "i^*" near end] & E \\
M^*/N^{\perp} \arrow[r, leftrightarrow, "j"'] \arrow[ur, dashed, "\bar{\alpha}"' near end] & N^* \arrow[u, "\bar{\alpha}\circ j^{-1}"']
\end{tikzcd}$$

dove i^* è la restrizione a N dei caratteri di M.

$\bar{\alpha}\circ j^{-1}$ è un carattere di N. Esiste pertanto un $x \in N$ tale che $\omega_N(x) = \bar{\alpha}\circ j^{-1}$. Allora $\alpha = \omega_N(x)\circ j \circ \pi = \omega_N(x)\circ i^*$.

Per ogni $\xi \in M^*$ si ha quindi $\alpha(\xi) = \omega_N(x)\ (\xi/N) = \xi(x)$. //

LEMMA 5.7. *Sia $M \in LTA$ e N un sottomodulo chiuso di M. Allora $\omega_M(N) = N^{\perp\perp}$.*

DIMOSTRAZIONE. Chiaramente $\omega_M(N) \leqslant N^{\perp\perp}$.

Sia ora $\alpha \in N^{\perp\perp}\setminus\omega_M(N)$. Per la Prop. 5.6, $\alpha = \omega_M(x)$ per un opportuno $x \in M\setminus N$. Per la Prop. 5.2, esiste un carattere ξ di M nullo su N e tale che $\xi(x) \neq 0$. Allora $\omega_M(x) \notin N^{\perp\perp}$ contro l'ipotesi. //

PROPOSIZIONE 5.8. *Per ogni $M \in LTA$, ω_M è aperto.*

DIMOSTRAZIONE. Se V è un sottomodulo aperto di M; M/V è discreto e quindi $(M/V)^* \in \mathfrak{C}_0$ ed è $\hat{\Omega}$-separato per il Teor. 4.5.

Allora $V^{\perp}$, quale immagine omomorfa continua di $(M/V)^*$, è linearmente compatto e $\hat{\Omega}$-separato (Lemma 5.4 (a), e P.3.5).

Pertanto $\omega_M(V) = V^{\perp\perp}$ è aperto in M^{**}. //

LEMMA 5.9. *Se $M \in LTA$, N è un sottomodulo chiuso di M se e solo se $\omega_M(N)$ è chiuso in M^{**}.*

DIMOSTRAZIONE. Se N è chiuso in M, per il Lemma 5.7, $\omega_N(N) = N^{\perp\perp} = \bigcap_{x \in N^{\perp}} (x)^{\perp}$; quindi $\omega_M(N)$ è chiuso in M^{**}.

Se $\omega_M(N)$ è chiuso in M^{**} e x è un elemento di $M\setminus N$, $\tilde{x} \notin \omega_M(N)$ e quindi, per la Prop. 5.2, esiste un carattere ξ di M^{**} tale che $\xi(\omega_M(N)) = 0$ e $\xi(\tilde{x}) \neq 0$. Per la Prop. 5.6, $\xi = \tilde{\eta}$ per un opportuno $\eta \in M^*$. Abbiamo allora $0 = \tilde{\eta}(\omega_M(N)) = \omega_M(N)\ (\eta) = \eta(N)$ e $0 \neq \tilde{\eta}(\tilde{x}) = x(\eta) = \eta(x)$.

Pertanto Ker η è un aperto di M contenente N e non contenente x, cioè N è chiuso in M. //

TEOREMA 5.10. *Sia $M \in LTA$. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(*a*) *ω_M è un isomorfismo topologico.*

(*b*) *$M = N^*$ per qualche $N \in LTA$.*

DIMOSTRAZIONE. (*a*) $\Rightarrow$ (*b*). Basta porre $N = M^*$.

(*b*) $\Rightarrow$ (*a*) $\omega_M\colon M \to M^{**}$ è aperto per la Prop. 5.8, cioè $\omega_{N^*}\colon N^* \to N^{***}$ è aperto. Ma ω_{N^*} è il trasposto dell'A-omomorfismo continuo $\omega_N^{-1}\colon N^{**} \to N$. Allora ω_M è continuo e quindi è un isomorfismo topologico. //

DEFINIZIONE 5.11. *Diciamo che $M \in LTA$ è localmente linearmente compatto se M ha un sottomodulo $N \in \mathcal{C}_0$ tale che $M/N \in \mathcal{D}_0(\tau)$.*

TEOREMA 5.12. *Il funtore Γ induce una dualità Γ' della categoria dei moduli localmente linearmente compatti in sè. Esso subordina una dualità tra le categorie $\mathcal{D}_0(\tau)$ e $\mathcal{C}_0$ che coincide a meno di una equivalenza con la dualità Δ.*

DIMOSTRAZIONE. Sia M localmente linearmente compatto e N un sottomodulo linearmente compatto di M tale che $M/N \in \mathcal{D}_0(\tau)$.

Dimostriamo che ω_M è continuo.

Siano V' un sottomodulo aperto di M^{**}, $V = \omega_M^{-1}(V')$ e $N' = \omega_M(N)$. ω_M induce un isomorfismo (algebrico) $f\colon M/N \to M^{**}/N'$.

Poichè M/N è linearmente dicreto, f è continuo per il Lemma3.7 (*a*), pertanto, dato che $(V' + N'/N')$ è aperto in M^{**}/N', $(V + N)$ è aperto in M. ω_M induce anche un isomorfismo $g\colon (V+N/V) \to (V'+N'/V')$ dove $V + N/V \in LTA$ perchè, per il Lemma 5.9, V è chiuso in M.

g coincide con $\omega_{(V+N/V)}$ e $(V + N/V)$ è linearmente compatto quale immagine omomorfa continua di N. Allora, per la Prop. 55., g è un isomorfismo topologico e per il fatto che, $(V' + N'/V')$ è discreto, si ottiene che V è aperto in $V + N$. Pertanto V è aperto in M.

Verifichiamo ora che M^* è ancora localmente linearmente compatto. Per il Lemma 5.4 (*a*), $N^\perp \in \mathcal{C}_0$, quale immagine omomorfa continua del modulo linearmente compatto $(M/N)^*$ (Teor. 4.3).

Inoltre $M^*/N^\perp$ è isomorfo topologicamente a N^* (Lemma 5.4 (*b*)), dove N^* appartiene a $\mathcal{D}_0(\tau)$ per il Teor. 4.4.

Dimostriamo ora la seconda parte del Teorema.

Per i Teoremi 4.3 e 4.4, se $M \in \mathcal{D}_0(\tau)$, $M^* \in \mathcal{C}_0$ e se $M \in \mathcal{C}_0$, $M^* \in \mathcal{D}_0(\tau)$, quindi, poichè $\mathcal{D}_0(\tau)$ e $\mathcal{C}_0$ sono ovviamente sottocategorie della categoria dei moduli localmente linearmente compatti, si ha che Γ fornisce una dualità tra la categoria $\mathfrak{D}_0(\tau)$ e la categoria $\mathcal{C}_0$. Per i Corollari 4.3 e 4.4, la suddetta dualità coincide con la dualità Δ considerata in [O] a meno dell'equivalenza Σ definita tra la categoria $\mathfrak{D}_0$ e la categoria $\mathfrak{D}_0(\tau)$. //

COROLLARIO 5.12. *Il funtore Γ subordina una dualità tra i moduli discreti e i moduli linearmente compatti e $\hat{\Omega}$-separati che coincide a meno di una equivalenza con il funtore δ.*

DIMOSTRAZIONE. Ovvio per il Teorema 4.5 e per il fatto che δ è la restrizione a $\mathcal{C}$ della dualità Δ. //

BIBLIOGRAFIA

[B] BOURBAKI, *Algèbre Commutative*, cap. 3.

[M_1] MATLIS, *Injective modules over noetherian rings*, Pac. J. of Math., **8** (1958), pp. 511-528.

[M_2] MATLIS, *Modules with descending chain condition*, Trans. Am. Math. Soc., **97** (1970), pp. 495-508.

[MD] MACDONALD, *Duality over complete local rings*, Topology, **1** (1962), pp. 213-235.

[NA] NASTASESCU - ALBU, *Decomposition primaire des modules*, J. of Alg., **23**, no. 2 (1972), pp. 263-270.

[O] ORSATTI, *Dualità per alcune classi di moduli E-compatti*, in via di pubblicazione sugli Ann. Mat. Pura e Applicata.

[S] STENSTRÖM, *Rings and modules of quotients*, Springer-Verlag, 1971.

Manoscritto pervenuto alla redazione il 25 marzo 1975.